

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 11. KVĚTNA 2026

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

ÚLOHA 1.

- (a) Nechtě a , b , c jsou kladná celá čísla. Ukažte, že alespoň jedno z čísel $a^2 + b + c$, $a + b^2 + c$, $a + b + c^2$ není druhou mocninou kladného celého čísla. (2 BODY)
- (b) Mějme pravidelnou trojúhelníkovou mřížku tvořenou rovnostrannými trojúhelníky. Z trojúhelníků je složen souvislý obrazec¹ bez děr s obvodem 2026. Dokažte, že v obrazci je nějaký vnitřní úhel roven 120° nebo 240° . (3 BODY)

ÚLOHA 2.

- (a) Pro kladné celé pěticiferné číslo n označme $\sigma(n)$ čtyřciferné číslo, které vznikne odstraněním prostřední cifry z ciferového zápisu n v desítkové soustavě. Nalezněte všechna n taková, že $\sigma(n) \mid n$. (2 BODY)
- (b) Lucka řešila domácí úkol. Měla zadané dvě soustředné kružnice se středem A . Na kružnici s menším poloměrem Lucka vyznačila bod B , na druhé bod vyznačila C . Pak ještě do obrázku dorysovala dvě další kružnice se shodnými poloměry, první z nich se dotýkala úsečky AB v bodě B a druhá se dotýkala úsečky AC v bodě C . Tyto kružnice se navíc dotýkaly v bodě K . Určete množinu všech možných bodů K , které takto mohla Lucka získat. (3 BODY)

ÚLOHA 3.

- (a) Máme čtvercový papír o straně délky 1. Dokažte, že pouze pomocí jeho přehýbání na něm lze naměřit vzdálenost $\frac{1}{3}$. (2 BODY)
- (b) Káťa si hrála s kružnicí, na níž umisťovala oranžové a fialové body. Na začátku na ni umístila dva oranžové. V každém dalším kroku mohla udělat jedno z následujících
- (a) Přidat oranžový bod a změnit barvu obou sousedních;
 - (b) Někjaký oranžový bod odstranit a tím opět změnit barvu jeho sousedů. Toto může udělat, jen pokud se na kružnici nachází alespoň tři body.

Rozhodněte, zda může Káťa po konečném počtu kroků mít na kružnici právě dva fialové body a žádné oranžové. (3 BODY)

ÚLOHA 4.

- (a) Máme krabičky očíslované číslami $1, 2, \dots, 2n$ a čísla $1, 2, \dots, 2n$. Do každé krabičky vložíme jedno číslo a spočítáme součet krabičky a čísla v něm. Ukažte, že mezi těmito součty se alespoň jeden zbytek po dělení $2n$ zopakuje. (2 BODY)
- (b) Je dána neprázdná podmnožina A množiny $\{2, 3, \dots, 28\}$ taková, že když $a \in A$, tak zbytek po dělení čísla a^2 číslem 29 opět leží v množině A . Najděte nejmenší možnou hodnotu $|A|$. (3 BODY)

¹Trojúhelníky v obrazci spolu sousedí stranami.

ÚLOHA 5.

(a) Pizza je rozdělena na klasických 2026 dílků, které jsou očíslovány čísly $0, 1, \dots, 1012$. Každé číslo je právě na dvou dílcích. Pizzu označíme jako *dobrou*, pokud pro každé $i \in \{0, 1, \dots, 1012\}$ je mezi dílky s číslem i právě i jiných dílků. Může tato pizza být dobrá? (2 BODY)

(b) Po obvodu kulatého stolu je prostřeno $k \geq 3$ talířů a na každém je nějaký počet brambor. José chodí okolo stolu a čas od času aktivuje nějaký talíř (jsou-li na něm alespoň dvě brambory), což způsobí, že se z něj přesune jedna brambora o talíř doleva a jedna brambora o talíř doprava. Po několika aktivacích se stalo, že bylo na každém talíři stejně brambor jako na začátku. Dokažte, že počet aktivací byl násobek k . (3 BODY)

ÚLOHA 6.

(a) Na stole leží několik stříbrných mincí spolu se zlatým a stříbrným seznamem (oba jsou na začátku prázdné). Orgové chodí postupně ke stolu a každý buď přidá na stůl zlatou minci a připiše na stříbrný seznam počet stříbrných mincí na stole, nebo odebere jednu stříbrnou minci a připiše na zlatý seznam počet zlatých mincí na stole. Po vystřídání všech orgů nezbyla na stole žádná stříbrná mince. Dokažte, že součet čísel na zlatém seznamu je stejný jako součet čísel na stříbrném seznamu. (2 BODY)

(b) Markét má v řadě za sebou položeno 2345 mincí, přičemž pouze n -tá mince je otočena rubem vzhůru, kdežto ostatní jsou otočeny rubem dolů. Jeden Markétin tah spočívá v tom, že zvolí nějakou minci, která je rubem vzhůru, a otočí její bezprostřední sousedy (či souseda, jde-li o krajní minci). Určete všechna n taková, že Markét může po konečném počtu tahů docílit stavu, kdy budou všechny mince otočeny rubem vzhůru. (3 BODY)

ÚLOHA 7.

(a) Pro posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že a_{n+1} je rovno součtu druhých mocnin cifer čísla a_n . Dokažte, že pro všechna a_1 existují k a N takové, že pro $n \geq N$ je $a_n = a_{n+k}$. (2 BODY)

(b) Nechtě a, b, c, d jsou kladná reálná čísla splňující $a + b + c + d = 4$. Dokažte, že pak platí

$$ab + bc + cd + da \geq ab^2c + bc^2d + cd^2a + da^2b.$$

(3 BODY)