Metrické prostory 3

3. seriálová série | Termín odeslání: 6. dubna 2026

Úloha 1. (5 bodů)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť pro každá reálná $a < b$ splňující $f(a) = f(b)$ existuje $s \in (a, b)$ takové, že $f(s) = f(a) = f(b)$. Dokažte, že pak je již f monotónní[1] na $\mathbb{R}$.

Úloha 2. (5 bodů)

Nechť $A \subseteq \mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle)$ je množina polynomů mající člen u x^2 nulový neboli

$$A = \{a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_2 = 0\}.$$

Rozhodněte, zda je uzávěr A roven celému $\mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle)$, tj. jestli je A v $\mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle)$ hustá.

Úloha 3. (5 bodů)

Nalezněte všechny spojité funkce $f : \langle 0, 1) \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \langle 0, 1)$ rovnost

$$x^3 f(x^2) - x^2 f(x) - x f(x^2) + f(x) = 1.$$

[1] Tedy že je f nerostoucí nebo neklesající.