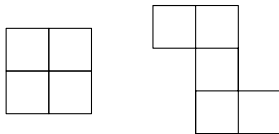


Skládání

3. PODZIMNÍ SÉRIE

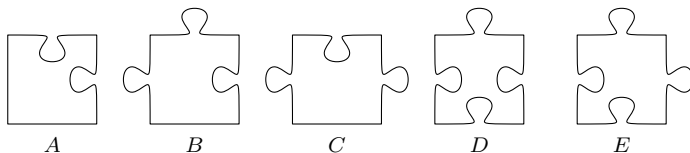
TERMÍN ODESLÁNÍ: 8. PROSINCE 2025

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Dlaždič Dláža dláždí tabulku 8×8 , přičemž má pouze dlaždičky níže vyobrazených tvarů (dlaždičky může otáčet i překlápět). Každý tvar použije alespoň jednou. Nakreslete, jak může Dlážovo vydláždění tabulky vypadat.



ÚLOHA 2. (3 BODY)
Najděte všechna prvočísla p, q taková, že $p^2 + q^2 + 2044$ je složené číslo.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Anička dostala obdélníkové puzzle. Když jej otevřela, s úžasem zjistila, že každý z 851 dílků má jeden z následujících tvarů. Kolik je dílků typu E ?



ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Věhlasný skladatel Ivan rád skládá funkce. Najděte pro něj všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

$$f(f(x) + y) = x + f(f(y))$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Mějme tabulku $n \times n$ a obdélníky $1 \times k$ pro nějaké přirozené $k \geq 2$, kterými je tato tabulka vydlážděna¹. Řekneme, že řádek či sloupec tabulky je *vyvážený*, pokud do něj zasahuje stejný počet vodorovně a svisle orientovaných obdélníků. Dokažte, že vyvážených řádků a sloupců bude v součtu maximálně $\frac{3}{2}n$.

¹Tím myslíme, že každé políčko tabulky je zakryto právě jedním obdélníkem a každý z použitých obdélníků leží celý v tabulce.

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

Markét si na papír nakreslila ostroúhlý trojúhelník ABC , nad jehož stranami zkonstruovala půlkružnice tak, že všechny leží vně trojúhelníku. Průsečík výšky z vrcholu A a půlkružnice nad stranou BC označila D . Obdobně zkonstruovala body E, F po řadě naproti bodům B, C . Lucka pak přišla a chtěla z šestiúhelníku $AFBDCE$ složit jehlan se základnou ABC . Dokažte, že se jí to mohlo povést.

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Pašík Vašík přes rok hodně zlobil. Proto na něj přišel čert a řekl: „Najdi všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

$$f(xy + f(f(x))) = yf(x) + x$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.“ Zachraňte pašíka před čertem a najděte je.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Terka na stole tvaru nekonečné roviny hraje hru s figurkami A, B, C, D . Jeden tah figurkou A vypadá tak, že její nová pozice je obrazem její staré pozice v osové souměrnosti podle úsečky BD . Obdobně, figurka D se při svém tahu přesune na místo, které je obrazem její stávající pozice v osové souměrnosti podle úsečky AC . Figurky B, C se nepohybují a ve hře není povoleno dvakrát po sobě táhnout stejnou figurkou. Na začátku byly figurky umístěny tak, že $|AB| = |BC| = |CD|$. Dokažte, že po odehrání konečně mnoha tahů budou obě figurky A, D stát na své počáteční pozici.