

Cyklovýlet

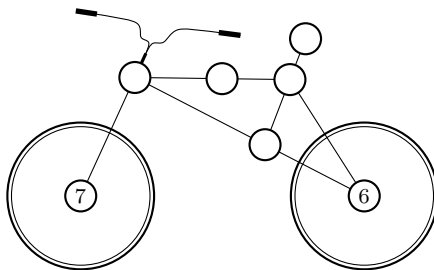
3. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. DUBNA 2026

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Anička má na svém jízdním kole matematickou hádanku, aby zabavila přihlízející. Ondra ji právě viděl projet kolem a chce hádanku vyluštit. Musí do každého volného políčka doplnit jedno z čísel 1 až 5 (přičemž se nesmí opakovat) tak, aby políčka na každé z pěti přímek měla stejný součet. Ukažte Ondrovi řešení.



ÚLOHA 2.

(3 BODY)

Pro která reálná nenulová x, y, z, w je splněna soustava rovnic:

$$x = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right), \quad w = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)?$$

ÚLOHA 3.

(3 BODY)

Markét se chystá na cyklovýlet, ale když po dlouhé době vytáhla zámek na kolo, zjistila, že už si nepamatuje jeho čtyřmístný kód. Naštěstí má ale ráda čísla, a proto si pamatuje některé jejich vlastnosti. O tomto kódu $k = \overline{abcd}$ si pamatuje, že všechny jeho (ne nutně různé) cifry jsou liché, a také, že čísla $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ i $\overline{cd}$ dělí k . Jaké všechny kombinace musí Markét vyzkoušet? Všechna čísla jsou brána v desítkové soustavě.

ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic pro a, b, c, d :

$$(b + c + d)^{2026} = 3a,$$

$$(c + d + a)^{2026} = 3b,$$

$$(d + a + b)^{2026} = 3c,$$

$$(a + b + c)^{2026} = 3d.$$

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Petr jel na výlet k prarodičům a našel u nich na půdě starou cyklickou deskovku. Hrací deska je tvořena očíslovanými políčky ležícími na kružnici. Políček je dohromady $n \geq 2$ a jsou v nějakém pořadí očíslována 1 až n . Petr může na libovolné políčko umístit figurku. Nyní kdykoliv se nachází na políčku s číslem i , posune se o i políček dál ve směru hodinových ručiček. Petr vyhraje, pokud na začátku umístí figurku tak, že po nějakém počtu kroků navštíví všech n políček. Pro která n existuje takové očíslování desky, že Petr může vyhrát?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Mějme reálná čísla a, b, c , pro která platí $a + b + c = 1$. Dokažte, že

$$3(a + bc)^2(b + ca)^2 + 3(b + ca)^2(c + ab)^2 + 3(c + ab)^2(a + bc)^2 \geq 4(a + bc)(b + ca)(c + ab).$$

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Máme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ takový, že AD není rovnoběžná s BC . Jeho úhlopříčky se protínají v bodě E . Kružnice určená body A, D, E protíná přímku AB v bodě $P \neq A$ a kružnice určená body B, C, E protíná přímku AB v bodě $Q \neq B$. Dále kružnice určená body A, C, P protíná přímku AD v bodě $R \neq A$ a kružnice určená body B, D, Q protíná přímku BC v bodě $S \neq B$. Dokažte, že body A, B, S, R leží na jedné kružnici.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Najdi všechny funkce¹ $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ splňující následující rovnost pro všechna $m, n \in \mathbb{Z}^+$:

$$f^{f(m)}(n) + n = f^m(n) + f(n).$$

¹Horní index u funkce f značí skládání, takže např. $f^3(x) = f(f(f(x)))$.