

Středy

2. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. LISTOPADU 2025

ÚLOHA 1. (3 BODY)
V rovině jsou vyznačeny vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Ondra má nepopsané pravítko, takže pomocí něj může jen narýsovat přímkou procházející dvěma různými vyznačenými body. Navíc může vyznačit průsečík dvou narýsovaných různoběžných přímek. Poradte mu, jak sestavit střed pětiúhelníku.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Mějme trojúhelník ABC s nejdelší stranou BC . Na straně BC si vyznačíme body P a Q tak, že $|BP| = |BA|$ a $|CQ| = |CA|$. Dokažte, že střed kružnice vepsané ABC a střed kružnice opsané PQA splývají.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Nechť v trojúhelníku ABC bod D různý od A leží na ose úhlu BAC . Buďte O , O_1 , O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC , ABD , ACD . Dokažte, že $|OO_1| = |OO_2|$.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Je dán pravoúhlý trojúhelník a tři kružnice, které mají středy v jeho vrcholech a mají každá s každou vnější dotyk. Dokažte, že střed kružnice, která má se všemi třemi danými kružnicemi vnitřní dotyk, leží na opsané kružnici tohoto trojúhelníku.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Mějme v trojúhelníku ABC střed I kružnice vepsané, bod dotyku D kružnice vepsané se stranou BC a střed M strany BC . Dokažte, že přímka MI prochází středem úsečky AD .

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Buď ABC trojúhelník se středem kružnice vepsané I . Buďte P , Q , R po řadě průsečíky přímek AI , BI , CI s kružnicí opsanou k ABC . Dokažte, že

$$\frac{|AI| \cdot |AP|}{|AB| \cdot |CA|} + \frac{|BI| \cdot |BQ|}{|BC| \cdot |AB|} + \frac{|CI| \cdot |CR|}{|CA| \cdot |BC|} = 2.$$

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Jsou dány trojúhelník ABC a čtverec $PQRS$ tak, že body P , Q leží na straně BC , bod R leží na CA a bod S leží na AB . Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží uvnitř $PQRS$.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Matěj má rovinu a osoúhlítko. S pomocí osoúhlítka lze provádět následující dvě operace:

- Zvolit tři vyznačené body X , Y , Z , které neleží na jedné přímce, a nakreslit osu vnitřního úhlu XYZ .
- Vyznačit průsečík dvou různoběžných nakreslených přímek.

Na začátku jsou v rovině vyznačeny pouze vrcholy nede degenerovaného trojúhelníku ABC . Dokažte, že Matěj dovede v konečné mnoha krocích pouze používáním osoúhlítka vyznačit střed kružnice opsané trojúhelníku ABC .