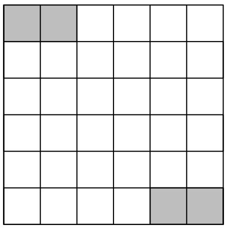
Kombinatorická

2. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. BŘEZNA 2026

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Klárka dostala čokoládovou tabulku 6×6, kde právě čtyři čtverečky jsou z hořké čokolády, vizte obrázek níže. Klárka chce tuto tabulku rozdělit na čtyři části tak, aby každá část měla (po vhodném otočení či překlopení) stejný tvar a umístění čtverečku s hořkou čokoládou v rámci tohoto tvaru bylo pro všechny čtyři dílky stejné. Ukažte, jak to může udělat.



ÚLOHA 2. (3 BODY)

Najděte v závislosti na n počet uspořádaných dvojic (A, B) splňujících, že A i B jsou podmnožiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a zároveň A není podmnožinou B a B není podmnožinou A.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Lenka si hraje s tabulkou 3×3, která je na začátku postupně po řádcích vyplněná čísly 1 až 9. Na této tabulce umí provést následující operaci: vybere jeden řádek či sloupec a libovolné kladné celé číslo k, načež čísla (po řadě) a, b, c v tomto řádku či sloupci nahradí čísly $a + k$, $b - k$, $c - k$, nebo čísly $a - k$, $b - k$, $c + k$. Operaci může provést jen tehdy, když žádné ze vzniklých čísel nebude záporné. Dokáže Lenka konečně mnoha operacemi dostat tabulku do stavu, kdy v každém políčku bude totéž číslo?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Aničce z minulé série zbyla špageta dlouhá $2n$, ale Anička má chuť na špagetu o délce přesně n, kde n je kladné celé číslo. Anička láme špagetu vždy tak, aby výsledné dílky měly celočíselnou délku. Určete nejmenší k takové, že ať už Anička láme špagetu libovolně, tak po k lámáních existuje podmnožina úlomků se součtem délek n.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Mára a Naty si hrají. Na začátku hry si každý z nich vytvoří své tajné číslo tak, že stokrát za sebou hodí standardní šestistěnnou kostkou a výsledky těchto hodů si zapíše jako jedno stociferné číslo. Následně oba naráz zakřičí číslo mezi 1 a 100 a zapamatují si n-tou cifru svého čísla, kde n bylo číslo vyřčeno druhým hráčem. Pokud si oba mají zapamatovat šestku, vyhrají, jinak prohrají. Jaká zábava! Mohou najít strategii[1] s pravděpodobností výhry více než $\frac{1}{36}$?

[1] Na strategii se smí domlouvat pouze před začátkem hry, během hry spolu komunikovat nesmí.

Úloha 6. (5 bodů)

Ondra narýsoval kružnici a po jejím obvodu nakreslil n květin. Poté vybral množinu *souvislých úseků*[2] květin U takovou, že každý úsek z U má v U nejvýše jeden nadúsek[3]. Buď a počet úseků z U, které v U nadúsek nemají, a b počet těch, které mají (právě jeden). Dokažte, že platí $a + \frac{b}{2} \leq n$.

Úloha 7. (5 bodů)

Na Matfyzu mají n atomů, přičemž každý atom obsahuje nanejvýš jeden elektron. Matfyzáci ovšem nevědí, které atomy elektron obsahují ani kolik elektronů celkem je. Mají však diodu, kterou mohou zavést od atomu A k atomu B (přičemž záleží na orientaci diody). V tu chvíli pokud je v atomu A elektron a v atomu B ne, tak se přesune do atomu B, jinak se nestane nic. Matfyzáci při použití diody nevědí, jestli došlo k přesunu elektronu. Rozhodněte, zda Matfyzáci mohou několikrát za sebou použít diodu tak, aby pak mohli o některých dvou atomech s jistotou říct, že jsou ve stejném stavu (s elektronem nebo bez).

Úloha 8. (5 bodů)

Mějme graf s $2n$ vrcholy a n^2 hranami. Dvojici vrcholů $\{x, y\}$ nazveme *přátelskou*, pokud mají alespoň jednoho společného souseda. Dokažte, že tento graf obsahuje alespoň $n(n-1)$ přátelských dvojic.

[2]Množina květin se nazývá souvislý úsek, pokud lze vybrat dva (ne nutně různé) kvítky takové, že všechny kvítky z této množiny leží na jednom z kružnicových oblouků určených těmito body a všechny kvítky nepatřící do dané množiny leží mimo tento oblouk.

[3]Nadúsekem úseku V rozumíme libovolný úsek W takový, že V je podmnožina W a W obsahuje alespoň jednu květinu nepatřící do V.