

Metrické prostory 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 8. PROSINCE 2025

ÚLOHA 1.

(5 BODŮ)

Pro dva body a, b v rovině definujeme *manhattanskou osu úsečky a, b* jako množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost v manhattanské metrice od a jako od b , tj.

$$o_{ab} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho_1(a, x) = \rho_1(b, x)\}.$$

Mějme tedy dva body a, b , jejich manhattanskou osu úsečky o_{ab} a dva různé body x, y na této ose. Necht z je nějaký bod na přímce¹ procházející x a y . Rozhodněte, zda z musí také ležet na ose o_{ab} .

ÚLOHA 2.

(5 BODŮ)

Necht (M, ρ) je metrický prostor a A je podmnožina M . Dokažte, že A je otevřená právě tehdy, když pro každý bod $x \in A$ a každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z M , která konverguje k x , platí, že od jistého indexu již všechny body posloupnosti leží v A .²

ÚLOHA 3.

(5 BODŮ)

Rozhodněte, zda existuje metrický prostor (M, ρ) , ve kterém existuje nekonečná posloupnost uzavřených koulí $F_1, F_2, F_3, \dots$ takových, že poloměr každé z nich je větší než 1, pro každé přirozené n platí $F_{n+1} \subseteq F_n$ a mají prázdný průnik, čili $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

¹Myslíme úplně obyčejnou přímku.

²Tím myslíme, že existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n \in A$.