Restaurace

1. jarní série — Termín odeslání: 2. února 2026

Úloha 1. (3 body)

Pět orgů – Alicka, Bára, Cdeněk, David a Káťa – se sešlo v restauraci a každý z nich si objednal buď rybu, nebo salát. Víme, že org, který si objednal rybu, vždy lže a org, který si objednal salát, vždy mluví pravdu. Určete, který org si objednal jaký pokrm, znáte-li následující výpovědi:

(a) Alicka: „Traja moji kamaráti si objednali šalát a jeden rybu.“
(b) Bára: „Čtyři mí kamarádi si objednali rybu.“
(c) Cdeněk: „Jeden můj kamarád si objednal salát a tři rybu.“
(d) David: „Čtyři mí kamarádi si objednali salát.“

Úloha 2. (3 body)

Fofík a pan G čekají, až jim přinesou jídlo, a tak si krátí čas hrou. Hra má pět kol a v každém kole může Fofík vsadit nezápornou celočíselnou částku. Pan G mu řekl, že ve čtyřech kolech z pěti mu vsazenou částku zdvojnásobí a vrátí, ale v jednom kole mu všechny vsazené peníze vezme. Jaká je nejvyšší suma peněz, kterou může Fofík zaručeně po skončení hry mít, má-li před hrou 3 Kč?

Úloha 3. (3 body)

V čísílkové polévce plave devět nezáporných reálných čísel splňujících, že součet jejich druhých mocnin je alespoň 25. Dokažte, že existují tři z nich, jejichž součet je alespoň 5.

Úloha 4. (5 bodů)

Hedvika si rýsuje do kaše. Nejprve nakreslila pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Poté zkonstruovala kružnici k se středem v bodě A procházející bodem B. Obdobně kružnice ℓ má střed v bodě C a prochází bodem B. Buď P průsečík k a ℓ různý od B. Dále buď m kružnice se středem v P procházející bodem D. Nakonec ať X je její průsečík s ℓ různý od D a Y její průsečík se stranou AE různý od E. Dokažte, že v Hedvičině kaši platí $|AX| = |AY|$.

Úloha 5. (5 bodů)

Ivan má borůvkovou vafli, která má prohlubně tvaru čtverce. Tyto prohlubně tvoří obdélníkovou tabulku $m \times n$ a v každé z nich je maximálně jedna borůvka. Pro i-tou z celkových k borůvek nechť r_i značí počet borůvek v témže řádku (včetně samotné borůvky i) a q_i značí počet borůvek v témže sloupci. Pomozte Ivanovi dokázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i + q_i} \leq \frac{m+n}{4}.$$

Úloha 6. (5 bodů)

Johy při čekání na jídlo usnula. V jejím snu ji navštívil souvislý graf[1] s 2026 vrcholy, z nichž k jich bylo obarveno červeně, zbylé modře. Johy chtěla umazat některé jeho hrany tak, aby po jejím

[1] Více o grafech, souvislosti a stupních se můžeš dočíst třeba v následujícím příspěvku: https://prase.cz/library/UvodTeorieGrafuKG/UvodTeorieGrafuKG.pdf.

zákroku všechny červené vrcholy měly lichý stupeň a všechny modré stupeň sudý. Pro která k se jí to vždy může podařit, nezávisle na původním rozmístění hran a obarvení vrcholů?

Úloha 7. (5 bodů)

Kladná celá čísla jsou obarvená k barvami, kde $k > 0$. Buď $d_x(n)$ počet dělitelů čísla n, které mají barvu x. Předpokládejme, že pro každé kladné celé n a každé dvě barvy x, y platí $|d_x(n) - d_y(n)| \leq 1$. Určete všechny možné hodnoty k.

Úloha 8. (5 bodů)

Fofík a pan G se stále nedočkali svého jídla, a tak hrají další hru. Na začátku si Fofík vymyslí polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty. Pan G se pak v každém svém tahu může zeptat na celé číslo a a Fofík mu řekne počet celočíselných kořenů $P(x) = a$. Pan G vyhraje, když Fofík zopakuje nějaké číslo dvakrát (pan G se nemůže ptát na stejné číslo více než jednou). Kolik nejméně dotazů musí pan G položit, aby vynutil výhru?