Metrické prostory II – Lovci kompaktů

Milý příteli,

v minulém díle seriálu jsme vybudovali základy pro práci v metrických prostorech. V tomto díle se pustíme do větších hloubek a objevíme tam pořádné věty, které jsou dosti zásadní a netriviální. Neobejde se to bez pár úvodních kapitol, jejichž cílem bude porozumění pojmům úplnost a spojitost. Čti je tedy tak podrobně, abys měl(a) pocit, že rozumíš, co ty pojmy opravdu znamenají.

Poté už přijdou na řadu těžší věty a tvrzení. Tvrzení mají podobnou roli jako příklady, jelikož jsou obvykle dokazované (tj. řešené) a ukazují nějaké základní vlastnosti zkoumaných objektů. Typicky jsou ale o něco obecnější než příklady a častěji se na ně později odvoláváme. Naopak příklady nejsou pro celý seriál zas tak důležité a neboj se je (třeba jen dočasně) přeskakovat, když by ses na nich zasekl(a).

Věty jsou pak v našem seriálu opravdu významná, užitečná a někdy obtížná tvrzení. Jejich důkazy, ač dle našeho názoru pěkné a poučné, se Ti můžou zdát zprvu obtížné a je úplně v pořádku, pokud je napoprvé nepochopíš. Vůbec je dobré si při studiu látku projít vícekrát, myšlenky pak najednou začnou vypadat méně trikově a začneš pro ně mít intuici (toto platí i mimo studium metrických prostorů :)).

Zlatým grálem tohoto dílu bude kompaktnost. Kompaktnost je na první pohled prapodivná vlastnost, která má však spoustu velmi přátelských důsledků. Vědět o metrickém prostoru, že je kompaktní, je asi to nejlepší, co bychom si mohli přát. Na její docenění je ale potřeba vybudovat znalost jistých jednodušších vlastností, což uděláme v tomto díle, abychom příště již mohli využívat kompaktnosti v plné síle.

Úplnost

Pohádka 1. *Kdysi vládl v PraSestánu matematicky nadšený král, který si na svém hradě pěstoval rozsáhlou sbírku konvergentních posloupností. Každá z nich bydlela ve svém metrickém prostoru a měla v něm nějakou limitu. Jedné noci se ale do hradu vloupal zloděj a některým posloupnostem jejich limity ukradl, tedy z některých metrických prostorů odebral body, které byly limitami králových posloupností (metrika na zbylé body fungovala pořád stejně, takže stále šlo o metrické prostory). Když to král zjistil, povolal svého nejlepšího matematika, že mu nyní původně konvergentní posloupnosti k ničemu nekonvergují a že neví, co bude dělat. Matematik však prohlásil: „To nevadí. Zloděj ať si ukradené body klidně nechá, my si vyrobíme nové. Měl jste totiž štěstí, že neukradl žádný bod z žádné z vašich posloupností. Protože posloupnosti samotné zůstaly nedotčeny, tak, přestože teď už nekonvergují, na nich lze poznat, že by měly konvergovat. Já vám tam ty limity doplním, a dokonce budou odpovídat těm původním!“*

Zkusme se na chvilku zamyslet nad tím, co znamená, že posloupnost konverguje (neboli že má limitu). Jak víme z minulého dílu, posloupnost konverguje, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ se od nějakého bodu celý zbytek posloupnosti nachází v kouli o poloměru ε se středem v její limitě. Co kdyby ale tyto koule nemusely mít střed v limitním bodě posloupnosti, ale stačilo by, aby měly střed v nějakém jiném bodě? Ukáže se, že tato vlastnost stále jistým způsobem určuje posloupnosti, které by měly konvergovat.

Definice 2. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v něm. Řekneme, že tato posloupnost je *cauchyovská* (nebo že splňuje *Bolzanovu–Cauchyovu podmínku*), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m > n_0 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

nebo ekvivalentně

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : \rho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon.$$

První verze definice prostě říká, že jsou si body posloupnosti časem libovolně blízko. Tato formulace je hezky symetrická a typicky se cauchyovskost definuje tímto způsobem.

Druhá, ekvivalentní verze může být jednodušší na ověření a víc připomíná definici limity – pro danou toleranci ε se body časem všechny nachází v ε-kuličce kolem *nějakého bodu posloupnosti* x_{n_0}. Vhodný bod x_{n_0} se může měnit pro různá ε, nemusí být „pevně daný“ narozdíl od limity.

Všimněme si, že cauchyovskost se dívá pouze na to, jak jsou od sebe vzdáleny body posloupnosti, ne na zbylé prvky našeho prostoru. Je to tedy vlastnost posloupnosti samotné, nezávisí na tom, jak vypadá zbytek prostoru (například zda má v sobě „díry“). Morální podstata je, že jde o posloupnost, která „by měla“ konvergovat. Body posloupnosti jsou k sobě totiž od nějakého bodu velmi blízko, a tak bychom očekávali existenci limity. Obecně ale žádná limita nemusí existovat.

Příklad 3. Dokaž, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Řešení. Zvolíme si $\varepsilon > 0$ a dokážeme, že časem budou všechny body nejvýše 2ε daleko od sebe. Protože posloupnost konverguje, existuje její limita x. Od jistého n_0 dál tedy jsou všechny body posloupnosti nejvýše ε daleko od x. Pak ale pro všechny dvojice $n, m > n_0$ máme z trojúhelníkové nerovnosti $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. To přesně znamená, že je posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská.[1]

Cauchyovskost je tedy slabší než konvergence. To vskutku odpovídá intuici – posloupnosti mající limitu vskutku splňují, že by *měly mít limitu.*

Příklad 4. Uvažujme metrický prostor $\mathbb{R}$ se standardní metrikou a odeberme z něj bod 0. Uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Dokaž, že tato posloupnost je cauchyovská, ale nemá limitu.

Řešení. Nejdříve poznamenáme, že pokud z libovolného prostoru odebereme libovolnou množinu bodů, zbylé body s metrikou zúženou pouze na ně budou tvořit metrický prostor, protože axiomy definující metriku budou stále platit, pokud platily předtím.

Nyní k samotné úloze: Uvažujme tutéž posloupnost ze zadání jakožto posloupnost v celém $\mathbb{R}$. Tam má posloupnost patrně limitu nula. Tudíž musí být cauchyovská. Z jednoznačnosti limity pak víme, že žádný další bod $\mathbb{R}$ nemůže být také limitou této posloupnosti, protože pak by měla dvě limity. Tudíž ani po odebrání nuly nemůže žádný jiný bod být limitou, a nula již v našem prostoru není, a tudíž limita nyní neexistuje.

Povšimni si elegance řešení. Nemuseli jsme nic počítat s epsilony, jen jsme si všimli, že náš prostor je vlastně jen $\mathbb{R}$-ko s *dírou*, a že naše posloupnost konverguje právě k té díře. Za chvíli uvidíme, že každý prostor, ve kterém existují nekonvergující cauchyovské posloupnosti je tohoto tvaru – byl to prostor bez děr, ze kterého někdo odebral pár bodů a zbyly po nich díry. To motivuje zabývat se prostory bez děr, kterým se v matematice říká *úplné.*

Definice 5. Metrický prostor (M, ρ) nazveme *úplný*, pokud je v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní. O množině $A \subseteq M$ řekneme, že je *úplná*, pokud každá cauchyovská posloupnost bodů v A má také v A limitu.

[1] Výsledný odhad byl nakonec 2ε, ne ε, ale tento výraz stále umí být libovolně malý. Případně problém lze obejít volbou $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ v podmínce limity.

Úplnost je velmi užitečná. Dokázat, že je nějaká posloupnost konvergentní, může být obecně velmi obtížné. Museli bychom totiž hledat limitu a u té není jasné, kde ji vůbec vzít. Zato ověřit cauchyovskost je snadné – stačí se podívat, jak daleko jsou od sebe body posloupnosti. Pokud jsou časem dost blízko, je posloupnost cauchyovská. No a pokud se pohybujeme v úplném metrickém prostoru, pak už automaticky má limitu.

Cvičení 1. Dokaž, že každý konečný metrický prostor je úplný.

Většina prostorů, se kterými se běžně pracuje, je úplná. Důležitý příklad pro nás budou reálná čísla, byť tuto větu nebudeme dokazovat.

Věta 6. (úplnost reálných čísel) *Prostor $\mathbb{R}$ se standardní metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ je úplný. Obecněji, prostor $\mathbb{R}^n$ s eukleidovskou metrikou je úplný pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.*

Naopak racionální čísla $\mathbb{Q}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x-y|$ úplná nejsou. Například je možné vytvořit posloupnost čím dál lepších racionálních aproximací iracionálních čísel π nebo $\sqrt{2}$ – tyto aproximační posloupnosti budou v $\mathbb{Q}$ cauchyovské, ale přitom π ani $\sqrt{2}$ v $\mathbb{Q}$ neleží. To je důležitý rozdíl mezi množinami $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$. Dokonce je to jeden ze způsobů, jak $\mathbb{R}$ definovat (ekvivalentních způsobů je ovšem víc, takže podle toho, jaký se zvolí, je předchozí věta buď opravdu věta, která se musí dokázat, nebo je to přímá vlastnost definice reálných čísel).

Cvičení 2. Nechť (M, ρ) je úplný metrický prostor a $F \subseteq M$. Dokaž, že F je úplná, právě když je uzavřená.

Věta 7. (zúplnění prostoru) *Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Pak M lze zúplnit, neboli existuje úplný metrický prostor $(\bar{M}, \bar{\rho})$ takový, že $M \subseteq \bar{M}$ a $\bar{\rho} = \rho$ na M. Dokonce M je hustá*[2] *v $\bar{M}$ a toto zúplnění je v jistém smyslu jednoznačné (resp. všechna taková zúplnění jsou v jistém smyslu stejný prostor).*

Větu dokazovat nebudeme, jen poznamenáme, že důkaz zúplněný prostor vytvoří v podstatě jako množinu všech limit cauchyovských posloupností z původního prostoru. Pokud tedy zúplníme úplný prostor, nic se na něm nezmění. Věta nám říká, že nikdy nemusíme pracovat s neúplným prostorem. Všechny neúplné prostory totiž vznikly tak, že někdo vzal úplný prostor a udělal v něm díry.

Jako jednu ukázku toho, že úplné prostory mají pěkné vlastnosti, si dokážeme Banachovu větu, která se věnuje problému řešení rovnice $f(x) = x$ na úplném metrickém prostoru. V této rovnici f značí funkci, která navíc musí mít speciální vlastnosti (například musí být takzvaně spojitá). Než se proto k Banachově větě dostaneme, podívejme se nejdřív na funkce jako takové, a speciálně pak na funkce spojité. Budeme je potkávat stále častěji.

Zobrazení

Naším společníkem na pouti tímto a přístím dílem seriálu budou *funkce* (nebo také *zobrazení*). V této kapitolce si jen krátce shrneme některé základní značení používané pro funkce, které budeme používat.

Funkci si můžeme představit jako mašinku, která něco přijímá a něco jiného vrací. To, co funkce přijímá a vrací, mohou být čísla, množiny, vánoční stromečky, ale i jiné funkce. Obvykle je ale možné množinu všech objektů, které daná funkce přijímá (tzv. *argumenty*), nějak rozumně popsat,

[2]To znamená, že uzávěr M je roven celému prostoru $\bar{M}$. Proto také nový úplný prostor značíme $\bar{M}$, tj. stejně jako uzávěr M. Pokud si vzpomeneš na cvičení v prvním díle seriálu, že uzávěr množiny A je roven množině limit všech posloupností v A, pak by Ti značení $\bar{M}$ mělo připadat ještě přirozenější – zúplnění $\bar{M}$ je nadmnožina M, do které přidáme všechny limity (a tím odebereme neúplnostní díry).

stejně jako lze popsat množinu objektů, které funkce vrací (*funkční hodnoty*). Například funkce dolní celé části $f(x) = \lfloor x \rfloor$ dělá z reálných čísel celá čísla zaokrouhlením dolů. Takovou situaci značíme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Šlo by i říct, že f jde z reálných čísel do reálných čísel, značeno $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Příklad 8. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ definovaná jako $f(x) = x^2$ každé reálné číslo umocní na druhou. Protože jsou všechny druhé mocniny reálných čísel nezáporné, leží všechny funkční hodnoty vskutku v $\mathbb{R}_0^+$. Mohli bychom ale říct, že f je $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a stále by to byla pravda, jen to o té funkci tolik neříká.

Příklad 9. Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definovaná jako $f(x, y) = (x, -y)$ bodům roviny přiřazuje body roviny s opačnou y-ovou složkou. Je to, geometricky vzato, osová souměrnost podle souřadné osy x.

Příklad 10. Pokud A je libovolná množina, pak každá funkce $a : \mathbb{N} \to A$, která n přiřadí $a_n \in A$, odpovídá posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definice 11. Buď $f : A \to B$ zobrazení a $C \subseteq A$. Množinu všech hodnot, na které se body z C zobrazí, nazýváme *obrazem* C a značíme ji

$$f(C) = \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Nechť naopak $D \subseteq B$, pak množinu všech bodů, které se zobrazí do D, nazýváme *vzorem* D a značíme ji

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}.$$

Příklad 12. Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = x^2$ platí $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$, což jsou tedy všechny možné hodnoty, kterých může f nabývat. Stejně tak ale platí třeba $f\big(\langle 0, \infty)\big) = \mathbb{R}_0^+$. Hodnoty x, které po aplikování f dají číslo nejvýše 4, lze popsat množinou

$$f^{-1}\big((-\infty, 4\rangle\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\} = \langle -2, 2\rangle.$$

Definice 13. Nechť $f : A \to B$ a $C \subseteq A$. Výrazem $f|_C$ budeme značit funkci f zúženou na množinu C, tedy funkci, která je definovaná na C a je v bodech C identicky rovná funkci f.

Příklad 14. Funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou jako $f(x) = x^3$ můžeme zúžit na funkci $f|_{\mathbb{N}}$, čímž získáme funkci představující posloupnost $(1, 8, 27, \dots)$.

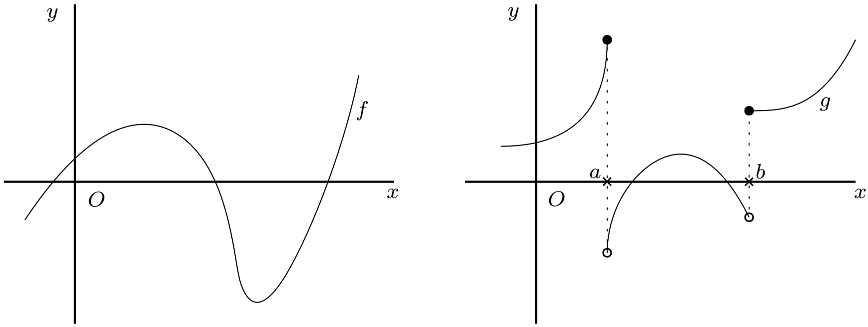
Definice 15. Řekneme, že funkce $f : A \to B$ je *na* B, pokud množina jejích funkčních hodnot je celé B. Řekneme, že funkce je *prostá*, pokud neexistují dva různé body a_1, a_2 takové, že $f(a_1) = f(a_2)$. Řekneme, že funkce je *bijekce*, pokud je prostá a na.

Příklad 16. Funkce $\frac{1}{x}$ definovaná na $\mathbb{R}^+$ je bijekce na $\mathbb{R}^+$. Každé $y \in \mathbb{R}^+$ umíme vyjádřit jako $f\left(\frac{1}{y}\right)$ a zároveň pro různá kladná x_1, x_2 jsou i hodnoty $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ různé.

To by bylo k funkcím v obecnosti všechno a můžeme se vrhnout na nějaké zajímavější vlastnosti, jako třeba spojitost.

Spojitost

Se spojitou funkcí ses s největší pravděpodobností již někdy setkal(a), i když o tom možná nevíš. Možná jsi o některých funkcích slyšel, že jsou spojité, ale nevíš přesně, co se tím myslí. V této kapitolce se pokusíme nějak intuitivně odůvodnit to, jak se obvykle spojitost zavádí, tak, aby to nebylo příliš strašidelné, a zvykneme si na některé vlastnosti spojitých funkcí.



Vlevo příklad spojité funkce, vpravo příklad funkce nespojité v bodech a a b.

Co tedy ta spojitost je? Někdy se říká, že reálná funkce je spojitá, když má souvislý graf (tedy dá se nakreslit jednou čarou). Tento pohled sice dává dobrou přibližnou představu, ale není tak úplně správný.

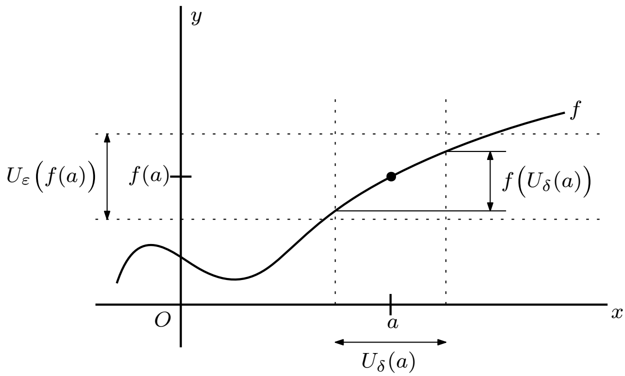
Najdeme si tedy poněkud lepší definici. Velmi neformálně se dá říct, že pokud je funkce spojitá, tak nikde skokově nemění svoji hodnotu. Anebo jinak, malá změna argumentu udělá jen malou změnu funkční hodnoty. Jak tuto myšlenku ale popsat matematicky přesně? Bohužel nejde přímočaře říct, že má existovat nějaká konstanta c, aby se při změně argumentu o libovolné δ funkční hodnota změnila o nejvýše $c\delta$. Spojitá funkce totiž může růst velmi rychle. Například funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(x) = x^2$ je spojitá, ale přesto pokud se s x-em blížíme k nekonečnu, bude růst libovolně rychle a nebude splňovat vztah, který jsme uvedli. Tato vlastnost nám tedy spojitost nedefinuje, není však zbytečná a více se o ní můžeš dočíst v rámečku o něco dále.

Trik v zadefinování spojitosti je v tom, že místo toho, abychom rovnou pohnuli argumentem a koukali se, o kolik se změní funkční hodnota, si nejdřív předepíšeme, že funkční hodnota se má změnit nejvýše o ε, a poté najdeme δ takové, že pokud se pohneme z daného bodu nejvýše o δ, hodnota se změní nejvýše o ε. Formálně nám totéž říká tato definice:

Definice 17. Nechť (X, ρ), (Y, σ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$. O f řekneme, že je *spojitá*, pokud

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \rho(x, y) < \delta \implies \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

To znamená, že pokud se od bodu x pohneme o nejvýše δ, funkční hodnota se změní o nejvýše ε, a že to umíme zařídit pro libovolné kladné ε a libovolný bod x původního prostoru.



Ve skutečnosti každá funkce, která splňuje vztah $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < c\delta$, je automaticky spojitá. Těmto funkcím se říká *lipschitzovské* (nebo taky *c-lipschitzovské*, pokud záleží na tom, kolik přesně je c), a mají spoustu přátelských vlastností. Spojitost samotná totiž dovoluje funkcím chovat se trochu zákeřně, protože, ač se nemohou skokovitě měnit, mohou se hýbat libovolně rychle.

Například dlouho se věřilo, že každá spojitá funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má konečnou derivaci na „velké množině bodů", tedy že jí tam lze přiložit tečnu, která ji v nějakém smyslu dobře aproximuje. To se později ukázalo být mýlkou, když byl nalezen příklad funkce, která je velmi špičatá a nelze jí přiložit tečnu v žádném bodě, ale přesto je spojitá. Této funkci se říká Weierstrassova a její existence značně zaskočila tehdejší matematiku. Ukázalo se tím, že i spojité funkce nemusí být tak slušně vychované, jak bychom si přáli. Zato lipschitzovské funkce už uvedenou vlastnost splňují a s ní i mnoho dalších, což částečně zjistíme už v tomhle díle seriálu. Zatím si však vystačíme se spojitými funkcemi. Ale neboj, ač se mohou někdy chovat prapodivně, my budeme studovat hlavně ty pěkné vlastnosti :).

Ještě k definici poznamenáme, že definuje spojitou funkci mezi dvěma metrickými prostory. Standardní spojitost funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je pak jen speciální případ, stačí za oba metrické prostory vzít $\mathbb{R}$ se standardní metrikou. Nejlepší bude si na spojitost zvyknout pomocí příkladů:

Příklad 18. Dokaž, že funkce $f(x) = x^2$ je spojitá.

Řešení. Stačí uvažovat $x \in \mathbb{R}$ libovolné a $1 > \varepsilon > 0$ (uvažujeme jen $\varepsilon < 1$, protože tím to bude platit i pro větší epsilony, a zjednoduší se nám volba δ, když bude platit $\varepsilon^2 < \varepsilon$). Hledáme δ, které vyhovuje definici. Položme[3] $\delta = \frac{1}{4(|x|+1)}\varepsilon$ a opravdu, pokud si každé $y \in (x - \delta, x + \delta)$ napíšeme jako $y = x + t$ pro $|t| < \delta$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| = |(x+t)^2 - x^2| = |2xt + t^2| \le |2xt| + |t^2| < 2x\delta + \delta^2 \\
< \varepsilon\Big(\frac{1}{2(|x|+1)} + \frac{1}{16(|x|+1)^2}\Big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Toto lze provést pro každé x a ε, čímž je definice ověřena.

Cvičení 3. Rozmysli si, že libovolná funkce z diskrétního prostoru do libovolného metrického prostoru je spojitá.

Cvičení 4. Rozmysli si, že v definici spojité funkce by šlo psát

$$\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f\big(U_\delta(x)\big) \subseteq U_\varepsilon\big(f(x)\big),$$

tedy že jakkoliv malou ε-kuličku se středem v $f(x)$ zvolíme, vždy jsme schopni najít δ-kuličku se středem v x, kterou f zobrazí do původní ε-kuličky.

Cvičení 5. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, c je kladné reálné číslo a $f : X \to Y$ splňuje pro každé body $x, y \in X$

$$\sigma\big(f(x), f(y)\big) \le c \cdot \rho(x, y).$$

Dokaž, že pak je f spojitá funkce.

Úloha 1. Uvažujme jako metrický prostor vrcholy grafu mající tvar n-úhelníku (tj. množinu V obsahující n vrcholů spojených postupně dokolečka hranami) s grafovou metrikou ρ.

---

[3]Volba δ je taková, aby odhad vyšel. Lze samozřejmě volit mnoho různých δ, ale zdálo se nám, že tato volba vede k nejkratšímu řešení.

Nechť $f : V \to \mathbb{N}$ splňuje, že pro libovolná $u, v \in V$ je $|f(u) - f(v)| \leq \rho(u, v)$. Pro která n musí vždy (ve smyslu „pro každou takovou f“) existovat nějaké sousední vrcholy x, y takové, že $f(x) = f(y)$?

Podívejme se na příklad spojitosti pro funkci více proměnných, která některým bodům roviny přiřazuje čísla. Již v takovém případě je dokazování spojitosti trochu pracné a ošklivé, byť celkem přímočaré (prostě chceme, aby pro dostatečně blízké body (x, y) a $(x + t, y + s)$ byla hodnota $|f(x, y) - f(x+t, y+s)|$ také malá). Typicky tak nechceme dokazovat spojitost takovýmto způsobem, ale chceme si nějak ulehčit práci. To naštěstí často jde, jak uvidíme.

Příklad 19. Dokaž, že funkce $f : A \to \mathbb{R}$ daná předpisem $f(x, y) = x/y$ je spojitá, kde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

Řešení. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné a $z_0 = (x, y) \in A$ je bod, v němž ověřujeme spojitost. Zatím nevolme konkrétní δ, prostě předpokládejme, že δ je kladné a splňující $y - \delta > 0$, aby $U_\delta(z_0) \subseteq A$. Spočteme, jak moc se od sebe může lišit $f(x + t, y + s)$ a $f(x, y)$ pro $(x + t, y + s) \in U_\delta(z_0)$, a na základě toho zvolíme δ dost malé, aby se funkční hodnoty vždy lišily nejvýše o ε.

Mějme tedy $(x + t, y + s) \in U_\delta(z_0)$. Předně platí $y + s > 0$ z předpokladu $y - \delta > 0$. Můžeme třeba[4] odhadovat

$$\begin{aligned} |f(x+t, y+s) - f(x, y)| &= \left|\frac{x+t}{y+s} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{(x+t)y - x(y+s)}{y(y+s)}\right| = \frac{|ty - sx|}{y(y+s)} \leq \frac{|t|y + |s||x|}{y(y-\delta)} \\ &\leq \frac{\sqrt{(t^2+s^2)(y^2+x^2)}}{y(y-\delta)} < \frac{\delta\sqrt{x^2+y^2}}{y(y-\delta)}, \end{aligned}$$

kde předposlední nerovnost je Cauchyova–Schwarzova nerovnost říkající v tomto případě

$$(ty + sx)^2 \leq (t^2 + s^2)(y^2 + x^2)$$

pro libovolná reálná x, y, t, s (a v této zjednodušené podobě ji můžeš dokázat jednoduše roznásobením závorek; je to ale jedna z nerovností, co je dobré znát, neboť se často hodí). Poslední nerovnost pak plyne z toho, že $(x + t, y + s) \in U_\delta(x, y)$, takže pro eukleidovskou vzdálenost bodů (x, y) a $(x + t, y + s)$ platí

$$\delta > \rho_2\big((x, y), (x + t, y + s)\big) = \sqrt{\big((x + t) - x\big)^2 + \big((y + s) - y\big)^2} = \sqrt{t^2 + s^2}.$$

Odhad

$$|f(x + t, y + s) - f(x, y)| < \frac{\delta\sqrt{x^2 + y^2}}{y(y - \delta)}$$

již nezávisí na konkrétních hodnotách t a s. Umíme zvolit $\delta > 0$ dost malé tak, aby celá pravá strana byla menší než ε? Chceme

$$\frac{\delta\sqrt{x^2 + y^2}}{y(y - \delta)} < \varepsilon,$$

což lze roznásobením a upravením ekvivalentně převést na $\delta(\sqrt{x^2 + y^2} + y\varepsilon) < y^2\varepsilon$, neboli

$$\delta < \frac{y^2\varepsilon}{\sqrt{x^2 + y^2} + y\varepsilon}.$$

[4] Úplně bez problémů by šlo postupovat i jinými nerovnostmi. Pointou je nakonec dostat výraz závisející jen na bodu (x, y) a hodnotě δ, který navíc umí být libovolně malý při volbě malého δ.

Pokud tedy máme daný bod $(x,y) \in A$ a $\varepsilon > 0$, umíme volbou δ splňující předchozí nerovnost a $y - \delta > 0$ zařídit, aby

$$|f(x+t, y+s) - f(x,y)| < \frac{\delta\sqrt{x^2+y^2}}{y(y-\delta)} < \varepsilon$$

pro libovolný bod $(x+t, y+s)$ z δ-kuličky kolem (x,y). To dokazuje, že f je spojitá funkce.

Pro snazší určování spojitosti funkcí se hodí následující cvičení a tvrzení, která říkají, že skládání funkcí i základní aritmetické operace typicky zachovávají spojitost.

Tvrzení 20. *Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : M \to \mathbb{R}$ jsou spojitá zobrazení. Pak platí:*

(1) *Funkce daná součtem $f(x) + g(x)$ je na M spojitá.*
(2) *Funkce daná součinem $f(x) \cdot g(x)$ je na M spojitá.*
(3) *Pokud g není v žádném bodě M nulová, pak funkce daná podílem $f(x)/g(x)$ je na M spojitá.*

Například z tohoto tvrzení ihned plyne, že libovolný polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je spojitý – stačí vědět, že funkce $g(x) = x$ je spojitá, načež postupně i $x \cdot x = x^2, x^3, \ldots, x^n$ jsou spojité, a pak i jejich součty jsou spojité.

Někdy se též spojitost definuje vlastností z následujícího cvičení, která říká, že spojité funkce vzorují otevřené množiny na otevřené množiny. Tato alternativní definice nám přijde méně názorná, ale je to každopádně užitečná vlastnost, neboť se pomocí ní dá snadno ukazovat otevřenost (a s lehkou modifikací uzavřenost) množin. Například ve chvíli, kdy víme, že funkce $f(x,y) = x^2 + xy - y^3$ je na $\mathbb{R}^2$ spojitá, můžeme hned říct, že množina

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy > y^3\}$$

je otevřená, neboť A je vzorem intervalu $(0,\infty)$ při zobrazení f (symbolicky $M = f^{-1}\big((0,\infty)\big)$), tento interval je otevřený a f je spojitá.

Cvičení 6. Nechť (X,ρ) a (Y,σ) jsou metrické prostory. Dokaž, že $f : X \to Y$ je spojitá právě tehdy, když pro každou G otevřenou podmnožinu Y platí, že $f^{-1}(G)$ je otevřená v X.

Cvičení 7. Pomocí předchozího cvičení ukaž, že funkce f mezi metrickými prostory (X,ρ) a (Y,σ) je spojitá právě tehdy, když pro každou F uzavřenou podmnožinu Y je i $f^{-1}(F)$ uzavřená v X.

Cvičení 8. Nechť (X,ρ), (Y,σ), (Z,τ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ jsou spojité funkce. Pak složení těchto funkcí (tj. $h(x) = g\big(f(x)\big)$ pro $x \in X$) je spojitá funkce.

Tato tři nevinná cvičení jsou poněkud magická – místo toho, aby se dívala na vzdálenosti bodů, jako se dívá klasická definice spojitosti, dívají se jen na to, jak se na sebe zobrazují otevřené (uzavřené) množiny. Na tom je v podstatě postaven obor topologie, který na metriku zapomíná a nechává si jen otevřené a uzavřené množiny. Ty stále splňují pravidla, na která jsme přišli v prvním dílu seriálu, tedy že sjednocení otevřených množin je otevřená množina a že průnik dvou otevřených množin je otevřená množina. Každý metrický prostor je tedy topologickým prostorem, protože otevřené množiny splňují tato pravidla. Mnoho věcí, které si ukazujeme v metrických prostorech, platí i v topologických prostorech, které jsou mnohem obecnější a obvykle tam žádná metrika nejde zadefinovat.

Nakonec si ukážeme ještě jeden jiný způsob, jak rozumět spojitosti. Ten se nám bude často hodit, a navíc vypadá elegantně – říká, že spojité funkce dovolují zaměňovat pořadí limity a výpočtu funkce.

Věta 21. (Heineova) *Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(1) *f je spojité.*
(2) *pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů v X konvergující k $x \in X$ platí, že $\lim f(x_n) = f(x)$ (tj. $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$).*

Důkaz. Nechť je nejdříve f spojité. Buď $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů v X s limitou x. Ověříme, že posloupnost $\big(f(x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $f(x)$. Nechť je $\varepsilon > 0$ libovolné. Ze spojitosti f nalezneme $\delta > 0$ takové, aby $f\big(U_\delta(x)\big) \subseteq U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. K δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $x_n \in U_\delta(x)$. Pak ale pro $n \geq n_0$ také platí

$$f(x_n) \in f\big(U_\delta(x)\big) \subseteq U_\varepsilon\big(f(x)\big),$$

tedy $\sigma\big(f(x_n), f(x)\big) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $\lim f(x_n) = f(x)$.

Nechť je naopak f nespojité. To po znegování definice spojitosti znamená, že existuje bod $x \in X$ a existuje konkrétní $\varepsilon > 0$ takové, že ať bude $\delta > 0$ jakékoliv, stejně bude existovat problematický bod $y \in X$, který je sice blízko k x ($\rho(x, y) < \delta$), ale funkční hodnoty v těchto bodech budou od sebe daleko, tj. $\sigma\big(f(x), f(y)\big) \geq \varepsilon$.

Můžeme tak zkonstruovat posloupnost bodů v X tak, že pro $\delta = 1/n$ zvolíme za bod x_n odpovídající hodnotu y, která je k x blízko, ale funkční hodnotou je od $f(x)$ daleko – platí nám tedy

$$\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}, \qquad \sigma\big(f(x), f(x_n)\big) \geq \varepsilon.$$

Pak zřejmě body x_n konvergují k x, ale posloupnost funkčních hodnot $\big(f(x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ určitě k $f(x)$ nekonverguje, protože bude vždy alespoň ε daleko od $f(x)$. Tedy výrok (2) neplatí. □

Vybaveni úplností i spojitostí se můžeme konečně podívat na první hezkou větičku přesahující rámec metrických prostorů, Banachovu větu.

Banachova věta

V této kapitolce si ukážeme jednu z nejznámějších vět o pevném bodě, *Banachovu větu o kontrakci*. *Pevným bodem* (libovolného) zobrazení $f : M \to M$ se myslí takové $x \in X$, že $f(x) = x$. Věty o pevných bodech jsou pak tvrzení, která za určitých předpokladů o množině X a o zobrazení f vyvozují existenci nebo jednoznačnost pevného bodu.

Ve škole po Tobě asi ještě nechtěli, abys hledal(a) pevné body, ale určitě jsi řešil(a) spousty rovnic, jako třeba

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad \text{nebo} \qquad 25^x + 5^x = 3.$$

Řešení rovnice lze ale vždy převést na hledání pevného bodu, v našich příkladech například můžeme ekvivalentně řešit[5]

$$x^2 + 3x + 3 = x \qquad \text{nebo} \qquad 25^x + 5^x - 3 + x = x,$$

tj. hledat pevné body zobrazení

$$f(x) = x^2 + 3x + 3, \qquad \text{respektive} \qquad f(x) = 25^x + 5^x - 3 + x.$$

[5] Obecně stačí nejdřív všechny členy převést z pravé strany rovnice na levou, a pak přičíst k oběma stranám x. Není to ale jediná cesta, jak rovnici převést na hledání pevného bodu zobrazení. Někdy se může hodit být s úpravami rovnice trošku kreativnější, například proto, aby výsledné zobrazení, jehož pevný bod se hledá, bylo jednodušší nebo splňovalo nějaké hezké vlastnosti.

Zároveň i když nejsme schopni nějakou rovnici přímo vyřešit, může být užitečné vědět, že nějaké řešení existuje, případně kolik jich je.

Banachova věta pro $f : M \to M$ jednak požaduje, aby M byl úplný metrický prostor, a jednak aby f byla takzvaná kontrakce. Řekněme si nejdřív, co to je.

Definice 22. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $\lambda \in \langle 0, 1)$. O zobrazení $f : M \to M$ řekneme, že je to *kontrakce*, pokud pro každá $x, y \in M$ platí

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot \rho(x, y).$$

Kontrakce k sobě vlastně přibližuje body – například pokud $\lambda = 1/2$, pak pro každé dva různé body x, y je

$$\frac{\rho(f(x), f(y))}{\rho(x, y)} \leq \frac{1}{2},$$

tj. $f(x)$ a $f(y)$ jsou k sobě alespoň dvakrát blíž než x a y. Zároveň podle cvičení 5 je každá kontrakce automaticky spojitá.

Teď už jsme plně připraveni na Banachovu větu.

Věta 23. (Banachova o kontrakci) *Nechť (M, ρ) je úplný metrický prostor a $f : M \to M$ je kontrakce. Pak existuje právě jeden bod $p \in M$ splňující $f(p) = p$.*

Důkaz. Důkaz má pěknou myšlenku: Prostě začneme z nějakého bodu $x_0 \in M$ budovat posloupnost $x_{n+1} = f(x_n)$. Kdyby tato posloupnost měla limitu p, pak by platilo $p = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(p)$, a p by tak bylo hledaným bodem. To, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu, bude plynout z úplnosti M za předpokladu, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. A tenhle poslední chybějící dílek vyplyne z toho, že f je kontrakce, takže body prostoru nezobrazuje „moc daleko“.

Nechť je tedy $x_0 \in M$ libovolně zvolený bod a definujme posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ skrze $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Označme si jako $\lambda \in \langle 0, 1)$ koeficient kontrakce f, aby platilo

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot \rho(x, y), \quad x, y \in M.$$

Všimneme si, že pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \lambda \cdot \rho(x_n, x_{n-1})$$

a tento odhad můžeme opakovat:

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda \cdot \rho(x_n, x_{n-1}) \leq \lambda^2 \cdot \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq \lambda^n \rho(x_1, x_0).$$

Protože $\lambda \in \langle 0, 1)$, pravá strana konverguje k nule, takže sousední body x_n, x_{n+1} jsou s rostoucím n stále blíž a blíž.

To nám na cauchyovskost posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ještě úplně nestačí, neboť bychom chtěli odhad na vzdálenost obecných bodů x_n a x_m pro $n > m$. Pomůžeme si trojúhelníkovou nerovností:

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n-1}) + \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + \rho(x_{m+1}, x_m) \leq (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda^m) \cdot \rho(x_1, x_0).$$

Otázkou je, zda součet mocnin λ v závorce umí být pro velká m, n libovolně blízko nuly. Upravme si ho pomocí vzorce pro součet[6] geometrické řady:

$$\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda^m = \lambda^m (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-m-1}) = \lambda^m \frac{1 - \lambda^{n-m}}{1 - \lambda} = \frac{\lambda^m - \lambda^n}{1 - \lambda} \leq \frac{\lambda^m}{1 - \lambda}.$$

[6] Konkrétně, pro $|q| \neq 1$ platí $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

To znamená, že

$$\rho(x_n, x_m) \leq \lambda^m \cdot \frac{\rho(x_1, x_0)}{1 - \lambda},$$

což překvapivě nezávisí na hodnotě n, a zároveň tento odhad konverguje (v indexu m) k nule – pokud je m velké, je pravá strana malá, a všechny body x_n, $n > m$ jsou už velmi blízko x_m. Formálně, pokud dostaneme libovolné $\varepsilon > 0$, tak můžeme zvolit $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m \geq n_0$ již platí

$$\lambda^m \cdot \frac{\rho(x_1, x_0)}{1 - \lambda} < \varepsilon.$$

Pak pro každá $n > m \geq n_0$ přirozená bude

$$\rho(x_n, x_m) \leq \lambda^m \cdot \frac{\rho(x_1, x_0)}{1 - \lambda} < \varepsilon,$$

takže $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

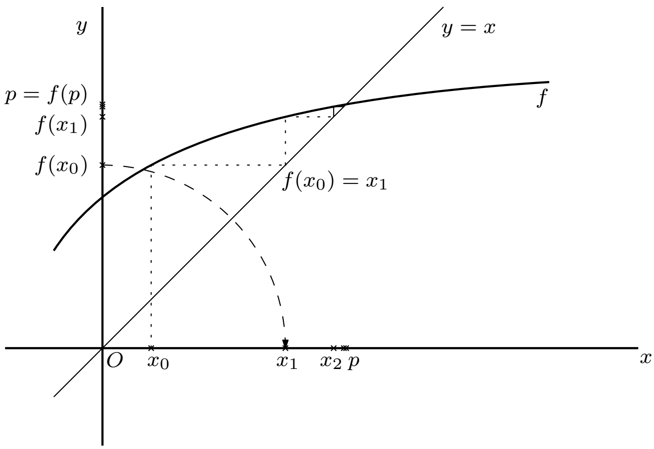
Z úplnosti prostoru M má tato posloupnost limitu $p \in M$. Nakonec, jak jsme zmínili na začátku důkazu, díky spojitosti f (každá kontrakce je spojitá) dostaneme

$$f(p) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = p.$$

Ukázali jsme tak, že nějaký vyhovující bod p existuje. Věta ještě říká, že těchto bodů není víc, takže musíme dokázat ještě tuto část. Nechť $q \in M$ je také bod splňující $f(q) = q$. Pak

$$\rho(p, q) = \rho(f(p), f(q)) \leq \lambda \cdot \rho(p, q),$$

takže $(1 - \lambda) \cdot \rho(p, q) \leq 0$. Protože $1 - \lambda$ je kladné a $\rho(p, q)$ je nezáporná vzdálenost, musí platit $\rho(p, q) = 0$. Tedy $p = q$. $\square$



V důkazu je úplně jedno, jak si počáteční bod x_0 posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zvolíme. V každém případě tato posloupnost bude konvergovat k pevnému bodu p, a navíc ji jsme schopni rekurentně počítat, protože víme, že $x_{n+1} = f(x_n)$. Banachova věta (respektive její důkaz) nám tudíž navíc popisuje, jak se pevný bod kontrakce dá v principu najít.

Pomocí Banachovy věty se dají hledat přibližná řešení rovnic na počítači (případně v ruce během dlouhých zimních večerů). Na začátku této kapitoly jsme si ukázali, jak se dá úloha řešení rovnice převést na hledání pevného bodu zobrazení f. Pokud máme navíc štěstí a f je kontrakce, pak dle důkazu Banachovy věty lze zvolit libovolné x_0 a počítat aproximace

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \quad \ldots, \quad x_{n+1} = f(x_n),$$

o kterých máme zaručeno, že konvergují k hledanému řešení x. Můžeme tak napočítat prvních pár členů

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$$

a prohlásit, že x_k je aproximace hledaného neznámého řešení x. Z důkazu Banachovy věty dokonce víme, že pro $n > m$ libovolná platí

$$\rho(x_n, x_m) \le \lambda^m \cdot \frac{\rho(x_1, x_0)}{1-\lambda},$$

z čehož se dá celkem jednoduše dostat i odhad chyby

$$\rho(x, x_m) \le \lambda^m \cdot \frac{\rho(x_1, x_0)}{1-\lambda},$$

díky kterému víme, jak velký počet iterací k zvolit, abychom dosáhli předem dané chyby (alespoň pokud známe hodnotu λ).

Stejně lze postupovat i pro soustavy rovnic, akorát pak f nebude zobrazení na podmnožině $\mathbb{R}$, ale na podmnožině $\mathbb{R}^n$ (například soustava tří rovnic o třech neznámých bude dána třemi rovnostmi „zakódovanými“ v zobrazení f na $\mathbb{R}^3$).

Pohádka 24. *Mapa PraSdubic leží rozložená na zemi na náměstí PraSdubic. Pak na mapě musí existovat*[7] *bodík, který fyzicky přímo leží na místě, které vyznačuje. Dokud bude mapa položená kdekoliv v PraSdubicích, takový bod vždy bude existovat.*

Pro jednoduchost řekněme, že půdorys PraSdubic je čtverec v rovině

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1000 \land 0 \le y \le 1000\}$$

a mapa je fyzicky čtverec

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 3 \land 1 \le y \le 3\}$$

se středem v bodě $(2, 2)$. Fyzický střed PraSdubic tak má souřadnice $(500, 500)$ a odpovídající bod na mapě tak fyzicky leží na souřadnicích $(2, 2)$. Prakticky máme zobrazení $f : P \to C \subseteq P$, které zobrazuje tak, že vezme fyzický bod PraSdubic $x \in P$, najde ho na mapě ležící na zemi, a vrátí souřadnice $f(x)$ fyzického bodu nacházejícího se pod bodem mapy.

A protože P je úplný prostor jakožto uzavřená podmnožina úplného $\mathbb{R}^2$, a navíc f je kontrakce (můžeš i přímo spočítat předpis f, je vcelku jednoduchý), musí opravdu dle Banachovy věty existovat bod ležící přímo pod svým vyznačením na mapě.

Příklad 25. Nechť $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost *Fibonacciho čísel*, definována jako

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

[7] Teda alespoň dokud mapa není stejně velká jako celé PraSdubice.

Najdi dvěma způsoby pevný bod zobrazení

$$f : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle, \quad f(x) = \frac{x+1}{x+2},$$

a pomocí toho spočti $\lim \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}$.

Řešení. Jeden způsob, jak najít pevný bod f, je přímočarý – prostě na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ řešíme rovnici

$$x = \frac{x+1}{x+2}.$$

K ní je ekvivalentní kvadratická rovnice $x(x+2) = x+1$, neboli $x^2+x-1 = 0$. Ta má právě jeden kořen v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, je jím $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Postupujme nyní pracněji a spíš ze zvědavosti pomocí Banachovy věty. Předně $\langle 0, 1\rangle$ se standardní metrikou je úplný metrický prostor a f je kontrakce, neboť pro $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$\left|\frac{x+1}{x+2} - \frac{y+1}{y+2}\right| = \frac{|(x+1)(y+2)-(y+1)(x+2)|}{(x+2)(y+2)} = \frac{|x-y|}{(x+2)(y+2)} \leq \frac{1}{4}|x-y|$$

(pro $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ je $x+2$ i $y+2$ alespoň 2). Navíc zřejmě pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ i $f(x) \in \langle 0, 1\rangle$.

Podle Banachovy věty tak na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ existuje právě jeden pevný bod zobrazení f, což je v souladu s naším přímým vyřešením rovnice. Navíc volbou libovolného $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ a počítáním $x_{n+1} = f(x_n)$ dostaneme posloupnost mající jako limitu hledaný pevný bod.

Jako příjemná počáteční volba x_0 se jeví nula. Další dva členy posloupnosti pak jsou

$$x_1 = f(0) = \frac{1}{2}, \quad x_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+2} = \frac{1+2}{1+2\cdot 2} = \frac{3}{5},$$

a ještě dále $x_3 = 8/13$ a $x_4 = 21/34$. Obecněji, pišme ve zlomku $x_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ (pro x_0 položme $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$). Pak

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} = x_{n+1} = \frac{\frac{\alpha_n}{\beta_n}+1}{\frac{\alpha_n}{\beta_n}+2} = \frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n+2\beta_n},$$

takže

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n, \qquad \beta_{n+1} = \alpha_n + 2\beta_n = \alpha_{n+1} + \beta_n.$$

První vypočítané čitatele a jmenovatele hodnot x_n už nápadně připomínají Fibonacciho čísla, konkrétně z chování prvních členů vypadá slibně $\alpha_n = F_{2n}$ a $\beta_n = F_{2n+1}$. Ověřme to indukcí. Předně díky $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ platí

$$\alpha_0 = 0 = F_0, \quad \alpha_1 = 1 = F_2, \quad \beta_0 = 1 = F_1, \quad \beta_1 = 2 = F_3,$$

což odpovídá Fibonacciho číslům. Nechť pro n nezáporné celé platí $\alpha_n = F_{2n}$ a $\beta_n = F_{2n+1}$. Pak pro následující členy platí

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2} = F_{2(n+1)},$$
$$\beta_{n+1} = \alpha_{n+1} + \beta_n = F_{2n+2} + F_{2n+1} = F_{2n+3} = F_{2(n+1)+1}.$$

Tím je indukce dokončena a opravdu platí $x_n = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}$. Protože podle Banachovy věty tato posloupnost konverguje k pevnému bodu f a ten jsme spočítali, dostáváme vztah

$$\lim \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

což je převrácená hodnota známého *zlatého řezu* $\varphi \approx 1{,}618$.

Cvičení 9. Zobecni předchozí příklad na výpočet $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n}$, kde posloupnosti $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ splňují rekurence

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + p\beta_n, \qquad \beta_{n+1} = \alpha_n + q\beta_n$$

pro $q > 1$ a $q > p \geq 0$.

Příklad 26. V rovině je zobrazení $f(x, y) = (r(x - p_1) + p_1, r(y - p_2) + p_2)$ stejnolehlost podle bodu $P = (p_1, p_2)$ s koeficientem stejnolehlosti $r \in \mathbb{R}$. Pro $r \in (-1, 1)$ je f kontrakcí, načež má stejnolehlost v rovině právě jeden pevný bod, kterým je samozřejmě P.

Cvičení 10. Nechť $a > 1$ a x_0 je kladné. Definujme posloupnost

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big).$$

Dokaž, že tato posloupnost konverguje[8] k $\sqrt{a}$.

Cvičení 11. Jsou dána čísla $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Najdi na $\mathbb{R}$ funkci, která má právě tyto body jako své pevné body.

Cvičení 12. Nechť (M, ρ) je neprázdný metrický prostor. Existuje na něm vždy nějaká kontrakce?

Podposloupnosti

Snad jsme Tě už v průběhu seriálu přesvědčili, že konvergentní posloupnosti mají hezké vlastnosti. O posloupnostech bez limity jsme zatím moc nemluvili. V této kapitolce se krátce podíváme na podposloupnosti, které nám můžou říct něco o chování posloupností bez limity. Podposloupnosti vzniknou tak, že z původní posloupnosti

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots)$$

vybereme některé prvky „zleva doprava". Tedy podposloupnost například může být, že vynecháme první dva prvky a uvažujeme posloupnost

$$(x_{k+2})_{k=1}^{\infty} = (x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots).$$

Nebo vybereme pouze sudé prvky

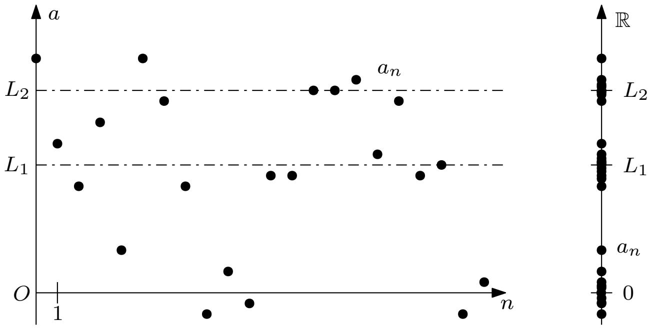
$$(x_{2k})_{k=1}^{\infty} = (x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \ldots).$$

Prakticky chceme vybrat nekonečnou rostoucí posloupnost indexů a pomocí ní vybrat prvky podposloupnosti – například v případě sudých prvků to je posloupnost indexů $(2k)_{k=1}^{\infty}$. Rostoucí proto, abychom vybírali „zleva doprava" (a speciálně nějaký prvek nevybrali víckrát), nekonečnou pak proto, abychom mohli mluvit o limitách.

Definice 27. Nechť A je množina a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů v A. Nechť $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ je *podposloupností* posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

[8] Tuto posloupnost jsme již potkali v rámečku v prvním díle seriálu. V principu by tímto způsobem šlo počítat druhé odmocniny v ruce, protože k výpočtu členů posloupnosti stačí umět sčítat a dělit.

Otázka je, jak souvisí konvergence původní posloupnosti a konvergence jejích podposloupností. To nám totiž může dát další vhled do toho, jak se posloupnost chová, i když sama o sobě nekonverguje.



Posloupnost „hromadící“ se kolem tří hodnot 0*,* L_1 *a* L_2*.*

Například reálná posloupnost

$$\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$$

nemá limitu, ovšem její sudá podposloupnost $(1, 1, 1, \dots)$ má limitu 1 a její lichá podposloupnost $(-1, -1, -1, \dots)$ má limitu -1. Můžeš si rozmyslet, že každá podposloupnost této posloupnosti buď nemá limitu, a nebo má za limitu 1 nebo -1.

Obdobně to platí třeba pro posloupnost

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \dots\right),$$

která má také za limity podposloupností jen 1 nebo -1, pokud podposloupnost vůbec konverguje. To nám něco říká o jejím chování – body ± 1 jsou jediné, kolem kterých se posloupnost „shlukuje“.[9]

To, že $\big((-1)^n + 1/n\big)_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, lze samozřejmě ukázat z definice, ale také to ihned plyne z následujícího tvrzení – kdyby totiž $\big((-1)^n + 1/n\big)_{n=1}^{\infty}$ měla limitu, pak bychom neměli být schopní najít dvě její podposloupnosti se dvěma různými limitami, nicméně to se nám před chviličkou podařilo.

Tvrzení 28. (limita podposloupnosti) *Nechť* (M, ρ) *je metrický prostor a* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost bodů v* M *s limitou* $x \in M$*. Pak každá podposloupnost* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *posloupnosti* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *má též limitu* x*.*

Důkaz. Prostě ověříme definici limity. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Protože původní posloupnost má limitu x, umíme najít n_0 přirozené takové, že pro každé $n \geq n_0$ již $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. Posloupnost indexů $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ musí v nějakou chvíli toto n_0 přerůst, řekněme že se to stane od indexu k_0 dál. Tedy pro $k > k_0$ je $n_k > n_{k_0} \geq n_0$. To znamená, že na takové indexy n_k se také vztahuje předchozí epsilonový odhad, takže pro $k \geq k_0$ je $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$. Z definice limity to znamená, že $\lim_k x_{n_k} = x$. $\square$

Přejít od konvergentní podposloupnosti ke konvergentní posloupnosti bude logicky problematičtější. Jak jsme totiž viděli, vůbec to nemusí jít: $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ sice má konvergentní podposloupnost, ale sama o sobě nekonverguje. Nicméně pro cauchyovské posloupnosti to možné je:

[9] Ve smyslu, že množina $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bodů naší posloupnosti má hranici $\{1, -1\}$.

Tvrzení 29. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a posloupnost bodů $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ v M má následující dvě vlastnosti:*

(1) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.*
(2) *Existuje podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ mající limitu $x \in M$.*

Pak má i původní posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu x.

Důkaz. Kdyby M byl úplný, stačila by nám vlastnost (1). Vlastnost (2) nám tu tak vlastně supluje úplnost M, kterou nepředpokládáme. Myšlenka je taková, že podposloupnost nám umožní dostat se *některými* body blízko k x, a cauchyovskost nám pak zaručí, že ostatní body nebudou od těchto bodů blízkých k x daleko.

Tedy mějme $\varepsilon > 0$ libovolné. Z cauchyovskosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nalezneme $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n, m \geq m_0$ bude $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Z konvergence $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zase nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ splňující, že pro $k \geq k_0$ je $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Navíc ale požadujme, aby $n_{k_0} \geq m_0$ – kdyby to původní k_0 nesplňovalo, můžeme ho zvyšovat tak dlouho, dokud n_{k_0} nepřeroste m_0, a takové nové k_0 též bude splňovat předchozí odhad.

Protože $n_{k_0} \geq m_0$, můžeme ho chápat jako index m vystupující v odhadu cauchyovskosti. Pro libovolné $n \geq m_0$ tak speciálně platí $\rho(x_{n_{k_0}}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nakonec z trojúhelníkové nerovnosti

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_{k_0}}) + \rho(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad n \geq m_0.$$

Ověřili jsme tak, že $\lim x_n = x$. □

Cvičení 13. Nechť (M, ρ) je metrický prostor, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů v M a $x \in M$. Nechť obě podposloupnosti $(x_{2k})_{k=1}^{\infty}$ a $(x_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ mají za limitu x. Dokaž, že pak i původní posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k x.

Úloha 2. Ukaž pomocí předchozího cvičení, že pro Fibonacciho čísla $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ z příkladu 25 platí

$$\lim \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Dá se tak říct, že i když o nějaké posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nevíme, jestli konverguje, může být užitečné zabývat se některými jejími podposloupnostmi, u nichž třeba limitu najdeme. Třeba s trochou štěstí z toho bude plynout konvergence původní $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, a i kdyby ne, tak aspoň zjistíme něco o limitním chování některých bodů $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Také ale existují posloupnosti, které žádnou konvergentní podposloupnost nemají. Například v reálných číslech to je posloupnost

$$(n)_{n=1}^{\infty} = (1, 2, 3, \dots),$$

která pořád jen stejně rychle roste a nikde se „neshlukuje“. Mohli bychom zkusit náš metrický prostor $\mathbb{R}$ omezit, aby nešlo takto růst nade všechny meze, třeba na prostor $(-2026, 2026)$. Omezujeme ho i zezdola, jinak by $(-n)_{n=1}^{\infty}$ neměla konvergentní podposloupnost. Tím nám ale zase vznikají nové problémy, neboť $(-2026, 2026)$ není úplný, takže třeba posloupnost $(2026 - 1/n)_{n=1}^{\infty}$ nemá konvergentní podposloupnost (to zase platí díky tomu, že v $\mathbb{R}$ má tato posloupnost limitu 2026, a tedy každá podposloupnost musí mít limitu 2026, která ale v našem intervalu neleží).

Můžeme se místo toho zkusit omezit na uzavřený interval $\langle -2026, 2026 \rangle$. To je úplný prostor, a navíc v něm nelze růst nade všechny meze. Zajišťuje nám to ale, že každá posloupnost už musí nějakou konvergentní podposloupnost mít? Možná Tě překvapí, že v reálných číslech ano, jak říká slavná Bolzanova–Weierstrassova věta, kterou si v příští kapitole dokážeme.

Nejdřív si ale pojďme prostory, v nichž existují konvergentní podposloupnosti, nějak pojmenovat. Jsou to jedny z nevýznamnějších typů metrických prostorů se spoustou krásných vlastností, které všechny v principu vyplývají z této nevinné vlastnosti podposloupností. Jsou to takzvané *kompakty.*

Kompaktnost

Definice 30. O podmnožině $K \subseteq M$ v metrickém prostoru (M, ρ) řekneme, že je *kompaktní*, pokud pro každou posloupnost bodů $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ v K existuje podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, která má v K limitu. Pokud $K = M$, říkáme, že (M, ρ) je *kompaktní metrický prostor*.

Není to jediný způsob, jak kompaktnost definovat. V průběhu seriálu ještě narazíme na několik jiných vlastností, které kompaktnost charakterizují. Zajímavé na nich je, jak bývají různorodé a zdánlivě úplně jiné – v těch ostatních, které v seriálu potkáme, se o posloupnostech vůbec mluvit nebude. Mít různé odlišné pohledy na to, co to kompaktnost je, pak výrazně ulehčuje práci v důkazech, protože na každý problém se hodí mít trochu jiný úhel pohledu. Zároveň si člověk udělá lepší představu o tom, co to ta kompaktnost asi je a k čemu může být užitečná.

Když už jsme u užitečnosti, časem uvidíme několik tvrzení a vět, které ukazují, že spojité funkce na kompaktech se chovají moc pěkně, například že spojité bijekce mají automaticky spojitou inverzní funkci nebo že na kompaktu existují body minima a maxima spojité funkce (což je nesmírně užitečná věta, jak teoreticky, tak prakticky). Pro kompaktní množiny třeba v $\mathbb{R}^3$ platí různá geometrická tvrzeníčka o protínání těles nebo o pokrývání množiny jinými množinami. Také některé významné věty o pevných bodech využívají kompaktnosti. K některým těmto důsledkům se postupně propracujeme.

Zatím ale ani pořádně nevíme, jestli nějaké kompaktní prostory existují. Pojďme proto nejdříve najít nějaké příklady kompaktů a prozkoumat jejich základní vlastnosti.

Na konci předchozí kapitoly jsme na příkladu nahlédli, že aby měl prostor vůbec šanci být kompaktní, tak musí být úplný. Platí to obecně, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 31. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $K \subseteq M$ je kompaktní. Pak K musí být úplná.*

Důkaz. Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost v K. Z kompaktnosti K nalezneme podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, která konverguje k $x \in K$. Podle tvrzení 29 z toho ale už plyne, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ má také limitu x. Tedy K je úplný. $\square$

Prvními, nepříliš zajímavými příklady kompaktů jsou konečné množiny.

Cvičení 14. Buď (M, ρ) metrický prostor a K jeho konečná podmnožina. Dokaž, že K je kompaktní.

V diskrétních prostorech jiné kompakty ani neexistují.

Cvičení 15. Dokaž, že v prostoru (M, ρ_{disk}) s diskrétní metrikou je $K \subseteq M$ kompaktní právě tehdy, když je K konečná.

Cvičení 16. Nechť (M, ρ) je kompaktní metrický prostor a $K \subseteq M$. Pak K je kompaktní právě tehdy, když je K uzavřená v M.

Jak jsme zmínili v kapitole o podposloupnostech, každý uzavřený interval v $\mathbb{R}$ je kompaktní. To bude náš první zajímavější (a také základní) příklad kompaktu. Pomocí této věty v dalším textu dokážeme, jak vypadají kompakty obecně v $\mathbb{R}^n$ (tj. speciálně v rovině a v prostoru).

Věta 32. (Bolzanova–Weierstrassova) *Každý uzavřený interval v $\mathbb{R}$ se standardní eukleidovskou metrikou je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $a < b$ jsou dvě reálná čísla a $\langle a, b\rangle$ je uvažovaný uzavřený interval. Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost bodů v tomto intervalu – to vlastně znamená, že tato posloupnost reálných čísel je omezená. Protože $\langle a, b\rangle$ je úplný, stačí nám nalézt cauchyovskou podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ – pak tato podposloupnost bude automaticky konvergentní.

Myšlenkou důkazu je náš interval $\langle a,b\rangle$ postupně půlit. Při prvním půlení na intervaly $\left\langle a, \frac{a+b}{2}\right\rangle$ a $\left\langle \frac{a+b}{2}, b\right\rangle$ musí alespoň v jednom z nich ležet nekonečno bodů naší posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – pokud by v obou bylo jen konečně bodů, pak by i v celém $\langle a,b\rangle$ leželo jen konečně bodů posloupnosti, která je ale nekonečná. Jeden takový interval si zvolíme a opět ho rozpůlíme. V jedné z těchto půlek musí zase ležet nekonečno bodů naší posloupnosti, ten si zvolíme. Takto budeme postupně vytvářet menší a menší intervaly, v nichž ale stále bude nekonečno bodů naší posloupnosti. Tím se tyto body k sobě víc a víc přibližují, protože intervaly jsou čím dál menší. Pomocí toho zkonstruujeme cauchyovskou podposloupnost.

Formálně si n-tý interval označíme jako $\langle a_n, b_n\rangle$. První interval má krajní body $a_1 = a$ a $b_1 = b$. Dále postupujeme induktivně, jak jsme popsali v předchozím odstavci – pokud již máme interval $\langle a_k, b_k\rangle$, ve kterém leží nekonečno bodů posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, pak musí v alespoň jednom z intervalů $\left\langle a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right\rangle$, $\left\langle \frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right\rangle$ ležet nekonečno bodů posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Takový si zvolíme a jeho levý, respektive krajní bod označíme jako a_{k+1}, respektive b_{k+1}.

Máme tak posloupnost intervalů $\big(\langle a_n, b_n\rangle\big)_{n=1}^{\infty}$, které jsou uzavřené, jejich délky se postupně zmenšují (n-tý interval má délku $(b-a)/2^{n-1}$) a které splňují $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle$. Navíc díky tomu, že jsme volili intervaly tak, aby v nich vždy bylo nekonečně bodů naší posloupnosti, můžeme nyní vybírat postupně nějaké body $x_{n_1} \in \langle a_1, b_1\rangle$, pak $x_{n_2} \in \langle a_2, b_2\rangle$ navíc s podmínkou $n_2 > n_1$, pak $x_{n_3} \in \langle a_3, b_3\rangle$ navíc s podmínkou $n_3 > n_2$, a tak dále, obecně $x_{n_k} \in \langle a_k, b_k\rangle$ navíc s podmínkou[10] $n_k > n_{k-1}$.

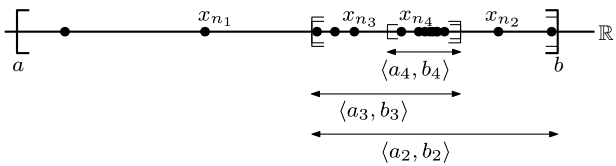
Máme tak podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Je cauchyovská? Ano, díky vlastnostem našich intervalů $\langle a_k, b_k\rangle$. Pokud totiž dostaneme $\varepsilon > 0$, můžeme nejdřív nalézt index k_0 takový, aby platilo

$$\frac{b-a}{2^{k_0-1}} < \varepsilon.$$

Levá strana je délka intervalu $\langle a_{k_0}, b_{k_0}\rangle$, takže všechny body v něm mají nejvýše takovou vzdálenost. Pro libovolné $k, \ell \geq k_0$ je $x_{n_k}, x_{n_\ell} \in \langle a_{k_0}, b_{k_0}\rangle$, protože $x_{n_k} \in \langle a_k, b_k\rangle \subset \langle a_{k_0}, b_{k_0}\rangle$, stejně tak pro ℓ. Tedy

$$|x_{n_k} - x_{n_\ell}| \leq \frac{b-a}{2^{k_0-1}} < \varepsilon$$

a podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská, tedy z úplnosti $\langle a,b\rangle$ konvergentní. □



Cvičení 17. Rozmysli si, proč by důkaz Bolzanovy–Weierstrassovy věty nefungoval pro intervaly $\langle 0,1)$ a $\langle 0,\infty)$. Také si rozmysli, že s lehkou modifikací důkaz naopak platí i pro $\langle 0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle$.

Cvičení 18. Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $K_1, \ldots, K_m$ jsou kompaktní podmnožiny M. Dokaž, že pak i $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ je kompaktní. Platí to i pro sjednocení nekonečna kompaktů?

Kromě toho, že kompakty musí být uzavřené, jsme v $\mathbb{R}$ viděli, že nemůžou být „moc velké", například v $\langle 0,\infty)$ posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ nemá konvergentní podposloupnost. Velikost metrického prostoru lze popsat například takto:

[10]Tady se právě hodí, že v $\langle a_k, b_k\rangle$ leží nekonečno bodů naší posloupnosti. Kdyby jich tam leželo jen konečně, mohlo by se stát, že všechny tyto body by měly indexy menší než n_{k-1}.

Definice 33. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Řekneme, že A je *omezená*, pokud existují střed $a \in M$ a poloměr $r > 0$ takové, že $A \subseteq U_r(a)$.

Prakticky, v omezené množině jsou všechny body od sebe vzdálené méně než $2r$. Takováto omezenost je celkem intuitivní a užitečná, ale časem ji budeme muset trošku vylepšit – chtěli bychom nalézt charakterizaci, že kompakty jsou právě úplné a „malé“ množiny, podobně jako to platí v $\mathbb{R}$. Omezené množiny ale bohužel obecně nejsou „dost malé“.

Přesto se nám omezenost bude hodit, protože například v $\mathbb{R}^n$ s eukleidovskou metrikou omezenost opravdu stačí. To nám říká Heineova–Borelova věta, kterou si za chvíli dokážeme.

Cvičení 19. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$ je omezená. Ukaž, že pak i $\bar{A}$ je omezený.

Tvrzení 34. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $K \subseteq M$ je kompaktní. Pak je K omezená.*

Důkaz. Předpokládejme, že K není omezená. Zvolme $x_0 \in K$ a definujme $r_0 = 0$. Z neomezenosti K lze nalézt $x_1 \in K \setminus U_1(x_0)$. Označme $r_1 = \rho(x_1, x_0)$. Z neomezenosti K lze dále nalézt $x_2 \in K \setminus U_{r_1+1}(x_0)$, označme $r_2 = \rho(x_2, x_0)$.

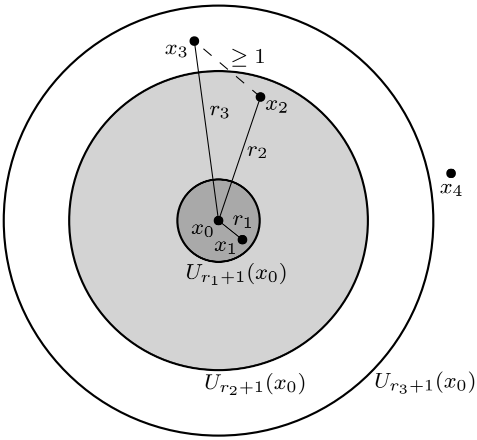
Obecně, předpokládejme, že máme body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a poloměry $r_1, \ldots, r_n$ takové, že $r_i = \rho(x_i, x_0)$ a $x_i \in K \setminus U_{r_{i-1}+1}(x_0)$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pak lze z neomezenosti K nalézt $x_{n+1} \in K \setminus U_{r_n+1}(x_0)$ a označit $r_{n+1} = \rho(x_{n+1}, x_0)$. Tímto způsobem jsme schopni zkonstruovat nekonečné posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující

$$r_n = \rho(x_n, x_0), \qquad x_{n+1} \in K \setminus U_{r_n+1}(x_0), \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0.$$

Pro body x_n, x_m, $n > m$ platí přeuspořádáním trojúhelníkové nerovnosti

$$\rho(x_n, x_m) \geq \rho(x_n, x_0) - \rho(x_0, x_m) \geq (r_{n-1} + 1) - r_{n-1} = 1,$$

neboť $x_n \notin U_{r_{n-1}+1}$ a $\rho(x_m, x_0) = r_m < r_{m+1} < \cdots < r_{n-1}$. To znamená, že žádná podposloupnost posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nemůže být cauchyovská, a tedy ani konvergentní. Tedy pokud K není omezená, tak není ani kompaktní. $\square$



Věta 35. (Heineova–Borelova) *Podmnožina A prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardní eukleidovskou metrikou je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a omezená.*

Důkaz. Již víme, že kompaktní množiny v libovolném metrickém prostoru jsou uzavřené a omezené, takže stačí dokázat opačnou implikaci. Budeme postupovat indukcí podle dimenze n. Myšlenka je taková, že body posloupnosti v $\mathbb{R}^{n+1}$ promítneme do $\mathbb{R}^n$ a do $\mathbb{R}$, ve kterých pomocí kompaktnosti nalezneme konvergentní podposloupnosti, a pomocí nich dáme zpátky v $\mathbb{R}^{n+1}$ dohromady konvergentní podposloupnost původní posloupnosti.

Tedy postupujme indukcí. Nechť je nejdříve $n = 1$ a $A \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená a omezená. Z omezenosti leží celá K v nějaké otevřené kuličce, což je v případě $\mathbb{R}$ otevřený interval konečné délky, označme ho (a, b). Ten zase leží v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost bodů v A. Pak tato posloupnost leží i v $\langle a, b\rangle$, takže podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty umíme nalézt konvergentní podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ mající limitu $x \in \langle a, b\rangle$. Protože ale body podposloupnosti $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ leží v uzavřené množině A, musí zde ležet i jejich limita, tj. $x \in A$. Tím jsme ověřili kompaktnost A.

Nyní provedeme indukční krok. Nechť pro $\mathbb{R}^n$ tvrzení platí, dokážeme ho pro $\mathbb{R}^{n+1}$. Buď A uzavřená a omezená podmnožina $\mathbb{R}^{n+1}$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů v A, ze které chceme vybrat konvergentní podposloupnost. Souřadnice bodu $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ pišme jako $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)})$ nebo také jako $x = (\tilde{x}, x^{(n+1)})$, kde $\tilde{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$. Na prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ značme eukleidovskou metriku ρ, na $\mathbb{R}^n$ zase $\tilde{\rho}$.

Nechť $A \subseteq U_r(a)$ z omezenosti A. Nechť $x \in A$, pak $\rho(x, a) < r$ a okamžitě také platí

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{a})^2 &= \left(x^{(1)} - a^{(1)}\right)^2 + \cdots + \left(x^{(n)} - a^{(n)}\right)^2 \\
&\leq \left(x^{(1)} - a^{(1)}\right)^2 + \cdots + \left(x^{(n)} - a^{(n)}\right)^2 + \left(x^{(n+1)} - a^{(n+1)}\right)^2 \\
&= \rho(x, a)^2 < r^2,
\end{aligned}$$

takže i body A „po zapomenutí poslední souřadnice“ tvoří omezenou množinu v $\mathbb{R}^n$. Speciálně díky $x_n \in A$ platí $\{\tilde{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U_r(\tilde{a}) \subset \mathbb{R}^n$. To ale znamená, že body $(\tilde{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ všechny leží i v uzavřené kuličce $B_r(\tilde{a})$, která je omezená. Podle indukčního předpokladu je kompaktní, takže můžeme vybrat podposloupnost $(\tilde{x}_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ konvergující k $y \in \mathbb{R}^n$.

Našli jsme tak podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, která někam konverguje v prvních n složkách. Obdobně se vypořádáme s chybějící $(n+1)$. složkou. Posloupnost $\left(x_{n_k}^{(n+1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ celá leží v kuličce $U_r\left(a^{(n+1)}\right) \subset \mathbb{R}$, protože pro $x \in A$ je

$$\left|x^{(n+1)} - a^{(n+1)}\right|^2 \leq \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{a})^2 + \left|x^{(n+1)} - a^{(n+1)}\right|^2 = \rho(x, a)^2 < r^2.$$

Proto také $\left(x_{n_k}^{(n+1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ leží v uzavřené kuličce $B_r\left(a^{(n+1)}\right)$ (tj. uzavřeném intervalu), což je kompakt, takže můžeme provést druhý výběr podposloupnosti $(x_{m_i})_{i=1}^{\infty}$, kde každému indexu m_i odpovídá nějaký index n_k. Tato posloupnost konverguje k $z \in \mathbb{R}$.

Stále ale platí, že $(\tilde{x}_{m_i})_{i=1}^{\infty}$ konverguje k y, neboť je to podposloupnost (pod)posloupnosti $(\tilde{x}_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Odtud plyne, že posloupnost $(x_{m_i})_{i=1}^{\infty}$ v A konverguje jak v prvních n složkách k y, tak i v poslední složce k z. Pak již ale musí[11] celá konvergovat k bodu $p = \left(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}, z\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$. A protože A je uzavřená a body $(x_{m_i})_{i=1}^{\infty}$ v A leží, je $p \in A$. Tím jsme našli konvergentní podposloupnost pro $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a ukázali kompaktnost A. $\square$

Heineova–Borelova věta nám ukazuje, že v $\mathbb{R}^n$ je kompaktů celá řada, a dává nám vcelku jednoduchý způsob, jak kompaktnost ověřovat. Například v rovině ihned vidíme, že uzavřený čtverec, kruh nebo 2026úhelník jsou kompaktní.

Cvičení 20. Dokaž, že množina $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$ je kompaktní.

[11] Intuitivně např. v $\mathbb{R}^2$, pokud x_n konvergují k x a zároveň y_n konvergují k y, tak i body $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ se budou postupně blížit k (x, y). Formálně se to udělá tak, že pro $\varepsilon > 0$ se najde n_0 takové, aby pro $n \geq n_0$ zároveň platilo $|x_n - x| < \sqrt{\varepsilon}/2$ a $|y_n - y| < \sqrt{\varepsilon}/2$, načež bude $\rho\big((x_n, y_n), (x, y)\big)^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2 < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon$. Pro více složek se postupuje podobně.

Cvičení 21. Dokaž, že množina $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ není kompaktní.

Na závěr tu máme ochutnávku toho, jak se spojité funkce a kompakty hezky vzájemně doplňují, čemuž se budeme více věnovat v třetím díle seriálu.

Tvrzení 36. (spojitý obraz kompaktu) *Nechť (K, ρ) je kompaktní metrický prostor, (Y, σ) je metrický prostor a $f : K \to Y$ je spojité zobrazení. Dokaž, že pak $f(K)$ je kompaktní v Y.*

Důkaz. Buď $(y_n)_{n=1}^\infty$ nějaká posloupnost bodů v metrickém prostoru $f(K)$. Chceme ukázat, že tato posloupnost má konvergentní podposloupnost. Z definice

$$f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$$

umíme nalézt nějaká $x_n \in K$ taková, že $f(x_n) = y_n$. Protože K je kompaktní, má $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergentní podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ s limitou $x \in K$. Díky spojitosti f je pak

$$\lim_k y_{n_k} = \lim_k f(x_{n_k}) = f(\lim x_{n_k}) = f(x),$$

takže $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$ je konvergentní podposloupnost naší původní posloupnosti $(y_n)_{n=1}^\infty$. □

Tvrzení je zajímavé i z toho důvodu, že spojité funkce nemusí zobrazovat omezené množiny na omezené množiny: Například $f(x) = 1/x$ zobrazuje omezenou množinu $(0, 1)$ na neomezenou množinu $(1, \infty)$. Stejně tak spojité funkce nemusí zobrazovat uzavřené množiny na uzavřené množiny (narozdíl od vzorování uzavřených množin, jak jsme viděli ve cvičení 7): Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ zobrazuje celé $\mathbb{R}$ (což je uzavřená množina) na množinu $(0, 1\rangle$, která uzavřená není.

V kontextu Heineovy–Borelovy věty, pokud je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zároveň omezená a uzavřená, tak je kompaktní, takže ji spojitá funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zobrazí na kompakt $f(A) \subseteq \mathbb{R}^m$, tedy f zachová omezenost a uzavřenost. Kdyby ale A byla jen omezená nebo jen uzavřená, tak $f(A)$ nemusí být ani omezená, ani uzavřená. V jakémsi smyslu se omezenost a uzavřenost chovají pro spojité funkce hezky jenom dohromady, ne samy o sobě.

Příklad 37. Nechť (K, ρ) je kompaktní metrický prostor a $f : K \to K$ zachovává vzdálenosti[12], tj. pro každá $x, y \in K$ platí

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) = \rho(x, y).$$

Dokaž, že f je na K (tj. každý bod K je obrazem nějakého bodu z K).

Řešení. Pro spor předpokládejme, že existuje bod $x \notin f(K)$. Z předchozího tvrzení víme, že $f(K)$ je kompakt, tudíž jde o uzavřenou množinu. Protože x neleží v $f(K)$, má od $f(K)$ nějakou kladnou vzdálenost $\varepsilon > 0$ (v opačném případě by totiž ležel na hranici $f(K)$ a z uzavřenosti by byl prvkem $f(K)$). Každý prvek $f(K)$ je alespoň ε vzdálen od x.

Uvažujme nyní posloupnost $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$ Pro lepší značení označme prvky posloupnosti jako $f^n(x)$ (tedy například $f^2(x) = f(f(x))$). Jak daleko jsou od sebe prvky této posloupnosti? Protože je f izometrie, můžeme „ohoblovat“ nadbytečné aplikace funkce a spočítat si pro přirozená $n > m$

$$\rho(f^n(x), f^m(x)) = \rho(f^{n-1}(x), f^{m-1}(x)) = \cdots = \rho(f^{n-m}(x), x)$$

Výsledný výraz ale udává vzdálenost mezi x a prvkem $f(K)$, tudíž je velký alespoň ε. Libovolné dva prvky posloupnosti jsou od sebe tedy vzdáleny alespoň ε. Potom ale tato posloupnost nemůže mít konvergentní podposloupnost, protože nemůže mít ani cauchyovskou podposloupnost, natož pak konvergentní. To je ale spor, protože se nacházíme na kompaktu.

[12] Takovým zobrazením říkáme *izometrie.*

V minulém díle seriálu jsme v rámečku popisovali Hausdorffovu metriku ρ_{H}, pomocí které lze měřit odlišnost (některých) podmnožin metrického prostoru, a to tak, že se v každém bodu obou množin určí minimální vzdálenost k nějakému bodu druhé množiny, a pak se za vzdálenost množin položí největší z těchto čísel. Dá se ukázat, že „některé podmnožiny“ můžou být například všechny kompakty – speciálně například v rovině uzavřenost zaručuje, že dvě různé množiny mají kladnou vzdálenost (jinak by např. otevřený a uzavřený kruh o stejném středu a poloměru měly vzdálenost 0), a omezenost zase zaručuje, že vzdálenost dvou množin je konečná.

Můžeme tak třeba v rovině vyšetřovat konvergence posloupností množin. Bude se nám hodit vědět, že kompaktní podmnožiny $\mathbb{R}^2$ spolu s Hausdorffovou metrikou tvoří úplný prostor.

Podívejme se na jednu takovou posloupnost. Řekněme, že máme rovnostranný trojúhelník T s vrcholy A, B, C. Označme S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} středy stran AB, BC, CA. Tomuto trojúhelníku přiřaďme množinu $f(T) = T_A \cup T_B \cup T_C$, kde T_A je trojúhelník $AS_{AB}S_{CA}$, T_B je trojúhelník $BS_{BC}S_{AB}$ a T_C je trojúhelník $CS_{CA}S_{BC}$ (jinými slovy, $f(T) = T \setminus I$, kde I je otevřený trojúhelník $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$).

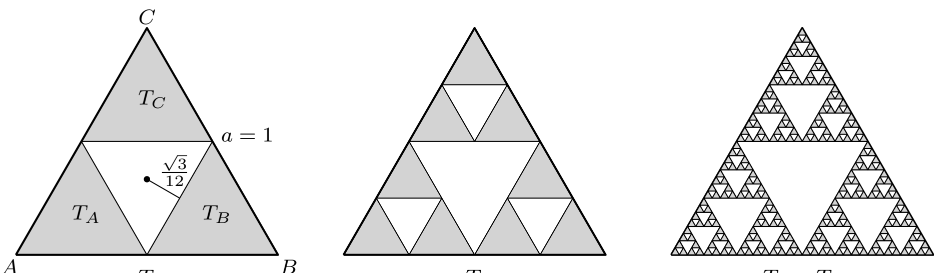
Zobrazení f tak rovnostrannému trojúhelníku přiřazuje sjednocení tří rovnostranných trojúhelníků T_A, T_B, T_C. Na ně lze f opět aplikovat, tj. rozložit každý z trojúhelníků T_A, T_B, T_C na tři menší rovnostranné trojúhelníky. Popišme tento proces posloupností: T_1 bude první rovnostranný trojúhelník, řekněme o straně délky 1, $T_2 = f(T_1)$, T_3 pak vznikne aplikací f na tři trojúhelníky v T_2, T_4 zase vznikne aplikací f na devět trojúhelníčků v T_3 a tak dále. Na obrázku je pár těchto množin znázorněno.

Hausdorffova vzdálenost T_1 od T_2 se dá spočítat jednoduše z obrázku Pythagorovou větou, je to $\frac{\sqrt{3}}{12}$. Ve skutečnosti je to vzdálenost T_1 od libovolného T_n, $n > 1$. Vzdálenost T_2 od T_3 je $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}$ a ve skutečnosti je to vzdálenost T_2 od libovolného T_n, $n > 2$. Obecně platí, že pro $n > m$ je vzdálenost T_n od T_m rovna

$$\rho_{\mathrm{H}}(T_n, T_m) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

To znamená, že posloupnost obrazců $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská! A protože prostor, ve kterém pracujeme, je úplný, má tato posloupnost limitu T.

Tato množina T je takzvaný *Sierpińského trojúhelník*. Je to příklad *fraktálu*, o kterých jsi možná někdy něco slyšel(a), a jako takový vypadá zajímavě (byť ho v plném detailu nemůžeme nakreslit) a má některé netradiční vlastnosti. Například jednotlivé T_n jsou rozumné geometrické obrazce s kladným obsahem $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, ovšem tato posloupnost obsahů konverguje k nule, takže v tomto smyslu má T „nulový obsah“. Spousta fraktálů nebo jiných exotických objektů se dá sestrojit tak, že se vytvoří posloupnost rozumných objektů, o které se pak ukáže, že musí konvergovat k něčemu zajímavému.



T_2 $\qquad$ T_3 $\qquad$ $T_6 \approx T$

Do třetice všeho dobrého

Děkujeme, že jsi s námi došel (došla) až sem, na konec druhého dílu seriálu. Kompaktnost jsme zatím moc nevyužili, ale to se příště změní. Uvidíme, jak se spojité funkce s kompaktností kamarádí a že z toho plynou třeba i geometrická tvrzeníčka, která o funkcích vlastně vůbec nehovoří. Také zjistíme, že pro spojité funkce na kompaktu lze zavést metrika, a tedy si je lze představovat jako body v (už docela velkém) metrickém prostoru, což je docela odlišný pohled na funkce, než jaký jsi možná měl(a) doposud. Celkově se budeme snažit využít celé mašinerie, kterou jsme vybudovali, na získání hezkých náhledů. Těšíme se, až se zase uvidíme ve třetím díle!

Návody k úlohám

1. Očísluj si vrcholy jako $v_1, \dots, v_n$ a předepiš si hodnotu na prvním vrcholu. Jaké jsou možné hodnoty na vrcholu v_2? A na v_3? Až dojdeš k v_n, nezapomeň, že ten je zase napojen na první vrchol v_1.

2. Zkus v příkladu 25 zvolit jiné x_0.

Řešení cvičení

1. Rozmysli si, že cauchyovské posloupnosti jsou právě ty, které jsou od nějakého bodu konstantní. Ty pak zjevně mají za limitu ten bod, který se v nich vyskytuje nekonečněkrát.

2. Nechť F je úplná a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v F konvergující k $x \in M$. Pak tato posloupnost je cauchyovská podle cvičení 3, takže z úplnosti F musí v F konvergovat. Z jednoznačnosti limity tato limita v F musí být rovna x, takže $x \in F$.

Pokud je F naopak uzavřená a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost bodů v F, pak z úplnosti M (neboť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ speciálně leží v M) musí mít tato posloupnost v M limitu x. Ale F je uzavřená, takže $x \in F$, což dokazuje, že cauchyovská posloupnost bodů v F má automaticky limitu v F. Tedy F je úplná.

3. Stačí vzít vždy $\delta = \frac{1}{2}$.

5. Nechť $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ jsou libovolné. Položme $\delta = \varepsilon/c > 0$. Pak pro $y \in U_\delta(x)$ platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq c \cdot \rho(x, y) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

což dokazuje spojitost f.

6. Nechť je f spojitá a G je otevřená podmnožina Y. Pokud je $f^{-1}(G)$ prázdná, je jistě otevřená a jsme hotovi. Jinak nechť je $x \in f^{-1}(G)$, tj. platí $f(x) \in G$. Z otevřenosti G nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon\big(f(x)\big) \subseteq G$. Protože f je spojitá, lze najít $\delta > 0$ takové, že $f\big(U_\delta(x)\big) \subseteq U_\varepsilon\big(f(x)\big) \subseteq G$. To ale znamená, že všechny body z kuličky $U_\delta(x)$ se zobrazí do G, tj. $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(G)$. Tedy x je vnitřním bodem $f^{-1}(G)$, a to je tak otevřená množina v X.

Nechť naopak vzory otevřených množin v Y jsou otevřené v X. Nechť $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ jsou libovolné. Kulička $U_\varepsilon\big(f(x)\big)$ je jistě otevřená v Y, takže musí její vzor

$$f^{-1}\Big(U_\varepsilon\big(f(x)\big)\Big)$$

být podle předpokladu otevřený v X. Tento vzor navíc obsahuje x, takže z otevřenosti obsahuje i nějakou celou kuličku $U_\delta(x)$. To ale znamená, že

$$f\big(U_\delta(x)\big) \subseteq U_\varepsilon\big(f(x)\big).$$

Tedy f je spojitá.

7. Ze cvičení 6 víme, že f je spojitá právě tehdy, když vzoruje otevřené množiny v Y na otevřené množiny v X. Z prvního dílu seriálu víme, že F je v Y uzavřená právě tehdy, když F^c je v Y otevřená. Pro vzory zase platí $\left(f^{-1}(F)\right)^c = f^{-1}(F^c)$. Tedy pokud je F uzavřená v Y, pak je F^c otevřená v Y, načež $f^{-1}(F^c) = \left(f^{-1}(F)\right)^c$ je otevřená v X, a tedy $f^{-1}(F)$ je v X uzavřená. Pokud naopak f vzoruje uzavřené na uzavřené, pak se analogicky dokáže, že vzoruje i otevřené na otevřené.

8. Dle předchozích cvičení nám stačí ověřit, že $h^{-1}(U)$ je otevřená v X pro každou U otevřenou v Z. Víme, že $g^{-1}(U)$ je otevřená v Y. Pak ale ze spojitosti f musí i $f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right) = h^{-1}(U)$ být otevřená v X.

10. Chceme použít Banachovu větu pro $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ na intervalu $(0, \infty)$, ze kterého bereme hodnotu x_0. Tento interval ale není uzavřený, a navíc pro hodnoty x blízko nuly je funkce f citlivá na malé změny x (kvůli členu a/x) a nevyjde kontraktivní. Musíme tak postupovat opatrněji.

Podívejme se na kontraktivitu f:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= \frac{1}{2}\left|x + \frac{a}{x} - y - \frac{a}{y}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x^2y + ay - y^2x - ax|}{|xy|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|xy(x-y) - a(x-y))|}{|xy|} = \\ &= \frac{1}{2}|x-y| \cdot \frac{|xy-a|}{|xy|}.\end{aligned}$$

Činitel $\frac{|xy-a|}{|xy|}$ může být obecně velký pro x, y blízko nuly. Pokud ale $xy \geq a > 0$, půjde se zbavit absolutních hodnot a dostaneme

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|x-y| \cdot \frac{xy-a}{xy} \leq \frac{1}{2}|x-y|,$$

takže za takové podmínky bude f kontrakcí.

Zkusme se tak nejdřív omezit na interval $\langle\sqrt{a}, \infty)$, který je úplný a na němž je f kontrakcí. Potřebujeme ještě ale, aby f zobrazovala tento interval do sebe, tj. aby pro každé $x \geq \sqrt{a}$ bylo i $f(x) \geq \sqrt{a}$. K odhadu použijeme AG[13] nerovnost:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{a}{x}} = \sqrt{a}.$$

Tento odhad nám zajišťuje, že f zobrazuje $\langle\sqrt{a}, \infty)$ do sebe, ale říká ještě víc – platí totiž pro každé kladné x, takže f dokonce zobrazuje $(0, \infty)$ do $\langle\sqrt{a}, \infty)$.

To znamená, že pokud máme libovolné $x_0 > 0$, klidně neležící v $\langle\sqrt{a}, \infty)$, tak po jedné iteraci $x_1 = f(x_0)$ již v tomto intervalu ležet bude. Další iterace $x_{n+1} = f(x_n)$ už z něj neutečou, protože f zobrazuje tento interval do sebe. Navíc je na něm f kontrakcí a interval je úplný. Podle Banachovy věty tak i v této komplikovanější situaci, kdy $x_0 \notin \langle\sqrt{a}, \infty)$, bude posloupnost konvergovat k jedinému pevnému bodu f na intervalu $\langle\sqrt{a}, \infty\rangle$.

Snadno se ověří, že $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$. Tato hodnota zřejmě leží v našem intervalu, takže to musí být ten pevný bod, ke kterému $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje.

11. Vezmeme třeba polynom $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$. Ten se nuluje právě v bodech a_i. Pokud nyní zadefinujeme $f(x) = P(x) + x$, pak $f(a) = a \iff P(a) + a = a$, což nastane právě tehdy, když a je kořenem P, tedy právě pro hodnoty a_i.

12. Ano – zvol jeden bod $a \in M$ a definuj funkci na M konstantně jako $f(x) = a$.

[13] Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem říká, že pro $u_1, \ldots, u_n$ kladná reálná čísla vždy platí $\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \geq \sqrt[n]{u_1 \cdot \ldots \cdot u_n}$. Zde ji používáme pro $n = 2$ a v této podobě se snadno dokáže ze zřejmě platné nerovnosti $(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geq 0$.

14. Nechť je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost v K. Protože je tato posloupnost nekonečná a $K = \{a_1, \dots, a_\ell\}$ pouze konečná, musí existovat bod $a_j \in K$, který se v posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ vyskytuje nekonečněkrát, řekněme, že postupně na pozicích n_1, n_2, n_3, ... Pak ale podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zřejmě konverguje k a_j, neboť je konstantní.

15. Ze cvičení 14 víme, že konečná K je kompaktní. Pokud je naopak K nekonečná, můžeme zkonstruovat posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ takovou, že žádné dva její prvky nejsou stejné. Pak mají všechny její body vzdálenost 1, takže ať zvolíme podposloupnost jakkoliv, nikdy nebude cauchyovská, a tedy ani konvergentní. Odtud plyne, že K nemůže být kompaktní.

16. Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů z K. Protože je M kompaktní, existuje vybraná konvergentní podposloupnost. No a nyní si vzpomeneme na charakterizaci uzavřených množin z prvního dílu seriálu (tvrzení, že množina je uzavřená právě tehdy, pokud je uzavřená na limity). Pokud je K uzavřená, pak tato limita leží v K a máme tedy podposloupnost konvergentní v K. Naopak pokud není uzavřená, pak si můžeme za $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zvolit posloupnost bodů z K, které konvergují k bodu mimo K. Všechny podposloupnosti budou také konvergovat k tomu stejnému bodu mimo K a z jednoznačnosti limit nebudou mít limitu v K.

17. Pro $\langle 0, 1)$ se nám nemusí podařit najít limitu cauchyovské podposloupnosti $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, protože tento interval není úplný. Pro $\langle 0, \infty)$ je zase problém v tom, že délka všech dílčích půlených intervalů je stále nekonečno, takže výběrem $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ nemusíme dostat cauchyovskou podposloupnost.

Pro množinu $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$ můžeme nejdřív vybrat jeden z intervalů $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 2, 3\rangle$, v němž leží nekonečno bodů naší posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, a na tento interval a těchto nekonečno bodů použít Bolzanovu–Weierstrassovu větu.

18. Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů v K. Protože množin $K_1, \dots, K_m$ je konečný počet, musí existovat K_j, $j \in \{1, \dots, m\}$ taková, že v K_j leží nekonečno bodů naší posloupnosti. Označme jako $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ ty body ležící v K_j. Protože K_j je kompaktní, můžeme vybrat podposloupnost $(y_{k_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$ konvergující k $y \in K_j \subseteq K$. To je ale zároveň zase podposloupnost posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (konkrétně nějaký výběr z podposloupnosti $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$), takže jsme ukázali, že K je kompaktní.

Sjednocení nekonečna kompaktů už kompaktní být nemusí – například sjednocení uzavřených intervalů $\langle -n, n\rangle$ dává nekompaktní $\mathbb{R}$, nebo v nekonečném diskrétním prostoru $\{x_1, x_2, \dots\}$ jsou jednoprvkové množiny x_n kompaktní, ale jejich nekonečné sjednocení ne.

19. Nalezneme $a \in M$ a $r > 0$ takové, že $A \subseteq U_r(a)$. Pro $x \in \bar{A}$ buď x leží v A, načež $\rho(x, a) < r < r + 1$, nebo $x \in \partial A$, načež lze najít $y \in A$ vzdálené od x nejvýše 1. Pak ale

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < 1 + r.$$

Tedy každý bod hranice A je vzdálen od a nejvýše o $r + 1$, takže $A \subseteq U_{r+1}(a)$.

20. Definujme na $\mathbb{R}^3$ funkci $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$. Pak lze množinu K (která je elipsoidem) psát jako

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Protože $\{0\}$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$ a f je spojitá funkce (je to součet několika funkcí typu $g(x) = x^2$, jejichž spojitost jsme přímo ukazovali), musí být K uzavřená podle cvičení 6.

Nyní ukážeme omezenost K. Pro bod $(x, y, z) \in K$ můžeme odhadovat jeho vzdálenost od počátku jako

$$\rho_2\big((x, y, z), (0, 0, 0)\big)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1,$$

takže $K \subseteq U_1\big((0, 0, 0)\big)$.

Protože K je uzavřená a omezená podmnožina $\mathbb{R}^3$, je již dle Heineovy–Borelovy věty kompaktní.

21. Množina A (která je dvojkužel) obsahuje celou přímku $\{(t, t, t\sqrt{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$, takže není omezená – jakkoliv velký poloměr $r > 0$ zvolíme, stejně budou v A ležet body $(-r, -r, -r\sqrt{2})$ a $(r, r, r\sqrt{2})$, které jsou od sebe vzdálené více jak $2r$, takže A nebude uzavřená v žádné kuličce o poloměru r (s libovolným středem). Protože A není omezená, nemůže být ani kompaktní.