

Metrické prostory 1 – Hranaté kuličky

Milý příteli,

právě čteš první řádky nového seriálu PraSátka, v němž se Ti již brzy otevře svět pravítek, úhloměrů, plánovačů spojů MHD a všemožných dalších měřicích nástrojů! Ovšem, budeme se o měření bavit hlavně matematicky, takže se nemusíš bát, že bychom Tě hned poslali ven určovat astrolábem deklinaci Jitřenky. V tomto prvním dílu seriálu se zamyslíme nad tím, co že to takové měření vlastně je (neboť měřit se dá leccos), a zavedeme matematicky přesně takzvanou *metriku*. Pomocí ní vyjasníme, co to znamená být „uvnitř“, „vně“ nebo „na hranici“ něčeho. No a ke konci tohoto dílu dojdeme až někam za horizont do nekonečna ...

S tématem tohoto seriálu se ve středoškolských hodinách matematiky spíš nepotkáš, o to víc doufáme, že by se Ti exkurze do hezké a trochu jiné matematiky mohla líbit.

Letos Tě metrickým labyrintem provedou Vítek Hanika a Matěj Gajdoš, na jejichž mailové schránky vít.hanika@gmail.com a gajdos.matej@yahoo.com se neváhej obrátit, máš-li jakoukoliv otázku nebo podnět k diskuzi. Veselé měření!

Jak číst seriál

V seriálu rozlišujeme mezi *příklady*, *cvičeními* a *úlohami*. *Příklady* jsou řešené přímo v textu a snaží se Tě seznámit s tím, jak se v seriálu typicky argumentuje.

Sám (sama) si to pak můžeš vyzkoušet ve *cvičeních*, která typicky ukazují některé vlastnosti, které nám přijdou důležité, ale přitom rozumně jednoduché. Řešením cvičení si dobře ověříš, že rozumíš, co jednotlivé definice znamenají. Na druhou stranu jich je relativně hodně a občas nejsou moc kreativní, takže ani nepředpokládáme, že bys je řešil(a) všechny.

Nakonec tu je několik málo *úloh*, které mají víc olympiádní nádech, ale přitom volně souvisí s tímto seriálem.

Cvičení a úlohy najdeš v průběhu textu, ale také v samostatné kapitole na konci seriálu. Za tou se pak ještě dají najít nápovědy a řešení k některým úlohám a cvičením.

Nakonec místy můžeš narazit na text v rámečku. Jedná se hlavně o dodatečná, pro nás zajímavá povídání, která ale pro čtení a pochopení seriálu nejsou tak důležitá, takže se je neboj úplně přeskakovat nebo se k nim vracet až později.

Měříme

V životě se setkáváme se všemožnými vzdálenostmi, ale co to vlastně taková vzdálenost je? Zkusme se teď nad tím na několika příkladech zamyslet a zjistíme, že měřit se dá leccos a od vzdálenosti vlastně očekáváme jen několik málo intuitivních vlastností, jako že třeba nebudou záporné. Těmito vlastnostmi se dostaneme k pojmu *metriky*, se kterým se budeme kamarádit zbytek seriálu. Za chvíli si metriku zdefinujeme, ale podívejme se nejdříve na několik Tobě známých i třeba méně

známých příkladů, v nichž měření vzdáleností a metrika někde v pozadí figuruje.

Začneme nejpřirozeněji, geometricky. Mějme rovinu a v ní body $X = (x_1, x_2)$ a $Y = (y_1, y_2)$. Pak můžeme hovořit o *vzdálenosti* těchto bodů – například ji můžeme fyzicky změřit pravítkem se stupnicí nebo analyticky spočítat pomocí Pythagorovy věty jako

$$|XY| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

I bez pravítka a souřadného systému můžeme uvažovat o vzdálenostech – pro body S, X, Y můžeme posuzovat, zda je S blíž k X než k Y nebo jestli jsou obě vzdálenosti stejné. Můžeme definovat *kružnici* jako množinu těch bodů roviny, které mají k S stejnou vzdálenost $r > 0$:

$$k_r(S) = \{Z \mid |SZ| = r\},$$

případně *kruh* jako ty body, které jsou od S vzdáleny nejvýše r :

$$B_r(S) = \{Z \mid |SZ| \leq r\}.$$

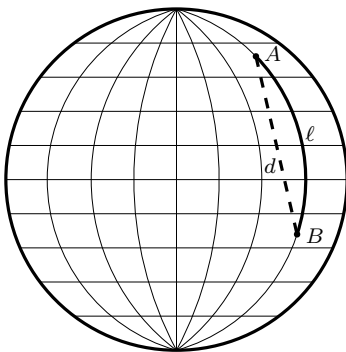
Podobně ke dvěma různým bodům X, Y můžeme hledat množinu takových bodů, které jsou k X i k Y stejně daleko:

$$o_{XY} = \{Z \mid |ZX| = |ZY|\}.$$

To je, jak jistě víš, přesně *osa úsečky* XY .

Dost podobně můžeme se vzdálenostmi pracovat v prostoru. Pythagorova věta bude mít pod odmocninou součet tří členů, množina $k_r(S)$ bude *kulovou plochou* (*sférou*) se středem S a poloměrem r , z kruhu $B_r(S)$ se stane koule a množina o_{XY} bude rovina procházející středem XY kolmá k úsečce XY .

V obou případech jsme vzdálenosti geometrických bodů „měřili pomocí úseček“ jakožto nejkratších spojnic těchto bodů. Co když se ale nemůžeme pohybovat po takových úsečkách? Například úsečka spojující Prahu a Tokyo bude procházet vnitřkem Země (odpovídá délce d na obrázku); je to sice validní způsob měření jejich vzdálenosti, ale v některých případech ne zrovna užitečný. Lepším způsobem by mohlo být najít nejkratší křivku spojující tato dvě města, která ale navíc *celá leží na zemském povrchu*, něco jako délka ℓ na obrázku. Nemusí být hned jasné, jak by taková křivka měla vypadat a jestli vůbec existuje, nicméně pokud ano, pak by bylo přirozené měřit vzdálenosti na Zemi takto.¹



¹Na sféře jsou takové nejkratší křivky pěkné a vychované – pokud máme na sféře se středem S body A a B , pak stačí zkonstruovat kružnici se středem S procházející body A a B . Nejkratší křivka spojující A a B a ležící na dané sféře je pak kratší z oblouků AB na této kružnici.

Místo „vzdáleností“ jsme v předchozích příkladech mohli také psát „blízkost“ nebo (s trochou představivosti) „odlišnost“. „Odlišnost“ je dobré slovíčko, protože se dá použít pro všemožné objekty, kdežto „vzdálenost“ zní přeci jen hlavně geometricky.

Tak například můžeme „měřit“ odlišnost slov, řekněme pětípísmenných, podle počtu písmen, ve kterých se liší. Třeba PRASE a SÉRIE se shodují jen v pátém písmeni, takže bychom mohli říct, že tato slova mají „vzdálenost“ 4. Naopak SÉPIE má od SÉRIE vzdálenost 1. Ani tentokrát nám nic nebrání definovat „kruh“ se středem VÍTEK o poloměru 1 jako množinu těch pětípísmenných slov, které se od slova VÍTEK liší na nejvýše jedné pozici. V té by pak například ležela slova VÍTEJ, SÍTEK a QÍTEK, ale už ne třeba JOLČA nebo MIŠKO.

Možná Ti připadá pohlížení na slova (obecněji textové zprávy) jako na nějaké středy kruhů příliš abstraktní nebo krkolomé. Tento pohled se však velmi hodí například pro kódování. Představ si, že pošláš zprávu nějakým nespolehlivým kanálem (tedy kanálem, ve kterém se zprávy vlivem šumu můžou pozměnit). Pošleš textovou zprávu, ta projde nějakou maličkou změnou (řekněme, že se náhodně změní až 3 znaky, tedy text bude ležet v kruhu o poloměru 3 se středem v původní zprávě), a příjemce ji poté musí umět správně „dekódovat“, tedy zjistit, jak vypadala zpráva před změnou. To ale znamená pouze určit, ve kterém kruhu o poloměru tři tato pozměněná zpráva leží, původní zpráva je pak prostě středem tohoto kruhu. Odesílatel a příjemce si tedy předem dohodnou množinu zpráv, které se budou posílat, a to tak, aby, pokud si kolem každé z nich uděláme kruh s poloměrem 3, se tyto kruhy „nepřekrývaly“. Kdyby totiž nějaká zpráva ležela ve dvou kruzích naráz, tak by nebylo jasné, který střed zvolit jako původní zprávu. Potom ať je zpráva pozměněna jakkoliv, bude z ní poznat, ve kterém kruhu leží, a tedy jak vypadala původní zpráva. Zajímavým problémem je tedy vyskládat do prostoru všech textových řetězců délky n co nejvíce takovýchto kruhů tak, aby se nepřekrývaly. Tím se v tomto textu zabývat nebudeme, jen řekneme, že na tomto principu fungují například QR kódy.²

Všechny tyto příklady spojuje snaha kvantifikovat „vzdálenosti“ a „odlišnosti“ nějakých objektů, které ale přitom můžou být dost různorodé. Přesně k tomu nám poslouží abstraktní koncept metriky, který matematicky vyjadřuje, co od „odlišnosti objektů“ přirozeně očekáváme, ať už jsou dané objekty jakékoliv. Síla této abstrakce je v tom, že nám umožňuje pro negometrické objekty (jako třeba slova) definovat geometrické pojmy (jako třeba kruh se středem ve slově) a kreslit si obrázky.

Abstraktní metrika

A teď už matematika.

Definice. Necht M je množina. *Metrikou* na M rozumíme zobrazení ρ , které každé uspořádané dvojici bodů (x, y) z M přiřadí nezáporné reálné číslo $\rho(x, y)$, a které navíc splňuje následující podmínky (axiomy):

- (1) Pro $x, y \in M$ nastane $\rho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$.
- (2) Pro každá $x, y \in M$ platí $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
- (3) Pro každá $x, y, z \in M$ platí $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Dvojici (M, ρ) pak nazýváme *metrickým prostorem*. O prvcích M typicky mluvíme jako o *bodech* daného metrického prostoru.

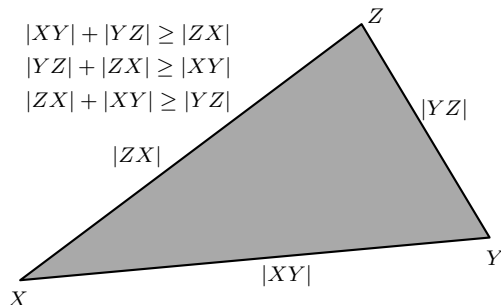
Podívejme se na to, co jednotlivé vlastnosti říkají. Především vzdálenost libovolných dvou bodů je nezáporná. Axiom (1) pak říká, že různé body jsou od sebe vždy nějak nenulově daleko, kdežto vzdálenost libovolného bodu od „sebe sama“ je vždy nula.

Axiom (2) se nazývá *symetrie* metriky. Říká, že nezáleží na pořadí, v jakém dané dva body měříme. Vzdálenosti měřené pravitkem takovou vlastnost jistě splňují. Někdy ale v životě dává smysl uvažovat i nesymetrické „měření vzdáleností“ – například místo kilometrů na PraSečím

²Pokud tě to zaujalo, více se o kódech můžeš dozvědět zde: https://cs.wikipedia.org/wiki/Samoopravný_kód

výletě můžeš měřit dobu, za kterou výlet ujdeš; přitom ale docela záleží, jestli trasa vede z údolí na vrchol kopce, nebo naopak.³

Axiom (3) popisuje takzvanou *trojúhelníkovou nerovnost*. Intuitivně říká, že přímá vzdálenost mezi dvěma body x, z by neměla být větší než vzdálenost vzatá „oklikou“ přes nějaký třetí bod y . S jednou verzí trojúhelníkové nerovnosti ses již nejspíš během svého studia setkal(a): Pokud XYZ je trojúhelník v rovině, pak musí součet každých dvou délek stran být větší nebo roven délce poslední strany, tedy např. musí $|XY| + |YZ| \geq |ZX|$. Proto ne každá trojice čísel-délek určuje trojúhelník – například trojúhelník o stranách $|XY| = 2$, $|YZ| = 7$, $|ZX| = 1$ neexistuje, neboť $|ZX| + |XY| < |YZ|$, což odporuje trojúhelníkové nerovnosti (dostat se z Y do Z je kratší oklikou přes bod X než příomou úsečkou YZ).



Příklady metrik

Možná jsi teď nešťastný (nešťastná) z abstraktní definice metriky. Ale nezoufej, přesně proto se teď podíváme na spoustu konkrétních příkladů metrických prostorů. Je užitečné alespoň některé z nich mít v paměti a po ruce při řešení cvičení a úloh, neboť někdy to, co se může zdát intuitivně jako pravdivé v jednom metrickém prostoru, vůbec nemusí v jiném platit.

Vraťme se nejdříve na začátek seriálu k našemu asi nepřirozenějšímu chápání vzdáleností bodů v rovině. Body v rovině budeme většinou chápat „souřadnicově“, tj. bod roviny X bude mít nějaké dvě souřadnice, $X = (x_1, x_2)$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Typicky pak to, že bod náleží rovině, píšeme jako $X \in \mathbb{R}^2$, což znamená, že je to vlastně uspořádaná dvojice reálných čísel. Obdobně to, že X je bod prostoru, bychom zapsali jako $X \in \mathbb{R}^3$, protože takový bod má tři souřadnice.

Definice. Necht X, Y jsou body v rovině. Pak *eukleidovskou vzdálenost* bodů X, Y definujeme jako

$$\rho_2(X, Y) = |XY|.$$

Tedy pokud mají body X, Y souřadnice

$$X = (x_1, x_2), \quad Y = (y_1, y_2),$$

pak podle Pythagorovy věty

$$\rho_2(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Příklad. Dokaž, že $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ je metrickým prostorem.

³Zobrazení ρ nesplňující axiom symetrie proto také mají jméno a má smysl je studovat, nicméně v seriálu se budeme věnovat hlavně standardním metrikám.

Řešení. Předně musíme zkontrolovat, že oborem hodnot ρ_2 jsou nezáporná čísla. Odmocnina nezáporného čísla ale je vždy nezáporná, takže to platí. Dále ověříme zbylé axiomy:

- (1) Pro bod X jistě platí $\rho_2(X, X) = 0$. Pokud naopak $\rho_2(X, Y) = 0$ pro nějaké body

$$X = (x_1, x_2), \quad Y = (y_1, y_2),$$

pak z definice této metriky musí platit

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = 0,$$

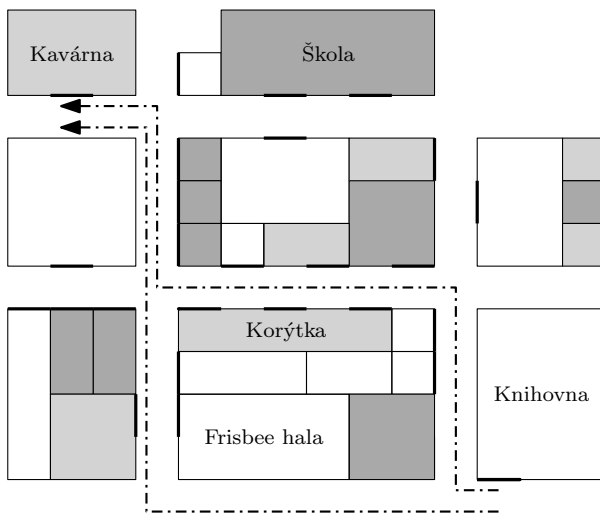
z čehož plyne $x_1 = y_1$ a $x_2 = y_2$ (každý ze sčítaných čtverců je nezáporný, takže aby se sečetly na nulu, musí oba čtverce být nulové). To ale znamená $X = Y$.

- (2) Symetrie plyne z toho, že pro reálná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $(x - y)^2 = (y - x)^2$.
 (3) Pro platnost trojúhelníkové nerovnosti v tomto případě opravdu můžeme důvěřovat geometrickému náhledu, neboť jde vážně o délky stran trojúhelníku. Nicméně lze nerovnost ověřit i čistě algebraickým výpočtem.

V rovině nějakou dobu ještě zůstaneme, protože eukleidovská vzdálenost není jedinou metrikou, která na rovině existuje. Dokonce v některých případech může být přirozenější měřit vzdálenosti jinak.

Pohádka. Před sto lety obyvatelé PraSestánu založili nové město PraSdubice. Protože při územním plánování nebyli moc kreativní, nakoncipovali mapu města tak, že všechny ulice míří buď ze severu na jih, nebo z východu na západ, takže každé dvě ulice jsou buď rovnoběžné, nebo na sebe kolmé.

Jedna čtvrt PraSdubice je schématicky znázorněna na obrázku. Jak měřit v tomto městě vzdálenosti? Eukleidovská vzdálenost v tomto případě udává vzdálenost „vzdušnou čarou“. Pro praktický přesun po městě je ale potřeba respektovat existenci zdí a chodit jen po „vodorovných“, respektive „vertikálních“ ulicích. A délky těchto prošlých částí ulic přesně budeme měřit a nasčítávat.



Cvičení 1. Rozmysli si, že v obrázku pro přesun z knihovny do kavárny nezáleží z hlediska celkové nachozené vzdálenosti na konkrétní zvolené cestě, dokud se při přesunu pohybuješ vždy jen doleva/nahoru. Dále si rozmysli, že toto platí pro jakékoliv dva body.

Pokud ses zamyslel(a) nad předchozím cvičením, pak by Ti měla připadat následující definice přirozená – prostě za konkrétní trasu zvolíš takovou, která nejdřív jde jen co nejvíc doleva (nebo doprava), a pak zbytek cesty jde nahorů (nebo dolů).

Definice. Mějme v rovině dva body X, Y o souřadnicích

$$X = (x_1, x_2), \quad Y = (y_1, y_2).$$

Pak *manhattanskou* (nebo také *newyorskou/taxikářskou*) *vzdáleností* X a Y rozumíme

$$\rho_1(X, Y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|.$$

Manhattanská metrika se tak jmenuje proto, že ulice v Manhattanu podobně jako v Prašdubicích typicky tvoří pravouhlou mřížku, a můžeme se tam tedy pohybovat jen horizontálně a vertikálně. Body pak opravdu budou vzdáleny podle předpisu manhattanské metriky.

Možná Tě mate, že jsme první příklad metriky (eukleidovskou) označili jako ρ_2 a druhý příklad metriky (manhattanskou) označili jako ρ_1 . Důvod je ten, že obecněji pro libovolné $p \geq 1$ lze na $\mathbb{R}^2$ zavést takzvanou ℓ_p -metriku jako

$$\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{|y_1 - x_1|^p + |y_2 - x_2|^p}.$$

Pro $p = 1$ dostaneme manhattanskou metriku ρ_1 , pro $p = 2$ dostaneme eukleidovskou metriku ρ_2 .

Pohádka. *3D tiskárna má dva nezávislé motůrky, přičemž první umí pohybovat hlavicí (při pohledu zeshora na tiskovou desku) doleva a doprava a druhý nahoru a dolů. Oba motůrky mají stejnou maximální rychlost. Chtěli bychom nějak přirozeně měřit dobu trvání přesunu hlavičky z jednoho bodu do bodu druhého.*

Klíčové je, že oba motůrky můžou běžet současně. Kdyby mohl vždy běžet jen jeden, bylo by přirozené měřit dobu přesunu manhattanskou metrikou ρ_1 – pro přesun z bodu $X = (0, 0)$ do bodu $Y = (4, 4)$ by nejdřív první motůrek přesunul hlavicí do $(4, 0)$, a pak druhý motůrek odtud do $(4, 4)$, takže „vzdálenost“ by byla 8 (nebo by se střídaly jinak – víme, že je to jedno, dokud oba posouvají hlavicí správným směrem). Pokud ale oba motůrky poběží současně, zvládnou se z X do Y dostat rychleji a „vzdálenost“ bude 4. Co kdybychom se z $X = (0, 0)$ chtěli přesunout do $Z = (4, 2)$? V eukleidovské i manhattanské metrice je Z zřejmě k X blíž než byl bod Y k X . V naší nové metrice tomu tak ale není – sice jsou teď X a Z „blíž ve druhé souřadnici“, ale první motůrek se pořád potřebuje dostat z 0 do 4, takže celková „vzdálenost“ bude 4 a půlku času druhý motůrek nebude pracovat.

Vlastně se chceme dívat na ten motůrek, který musí vykonat více práce, tj. na složku bodů $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$, ve které se body nejvíce liší.

Definice. Mějme v rovině dva body X, Y o souřadnicích

$$X = (x_1, x_2), \quad Y = (y_1, y_2).$$

Pak *maximovou vzdáleností* X a Y rozumíme

$$\rho_\infty(X, Y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}.$$

Asi si dokážeš představit, že předešlé metriky nemusí být definované jen v rovině, ale můžeme je zavést třeba i v prostoru nebo obecně na množině $\mathbb{R}^n$ všech uspořádaných n -tic $(x_1, \dots, x_n)$ reálných čísel. Speciálně na reálné přímce nám všechny tři metriky z předchozích příkladů ρ_1, ρ_2 a ρ_∞ (tedy

manhattanská, eukleidovská a maximová) splynou do absolutní hodnoty $\rho(x, y) = |x - y|$. To samo o sobě ukazuje, že se jedná o metriku (je to jako měřit v $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ body tvaru $(x, 0)$, tj. jen ty na x -ové ose), ale dokažme si to i bez využití metrik v rovině:

Příklad. Pro x, y reálná definujme $\rho(x, y) = |x - y|$. Dokaž, že $(\mathbb{R}, \rho)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Absolutní hodnota je vždy nezáporná. Navíc je nulová pouze v nule, takže z $\rho(x, y) = 0$ plyne $x - y = 0$, tj. $x = y$. Symetrie ρ také zřejmě platí, neboť $|x - y| = |-(y - x)| = |y - x|$ (absolutní hodnota například čísel -5 a 5 je stejná). I s trojúhelníkovou nerovností si snadno poradíme. Buďte x, y a z tři reálná čísla. Chceme dokázat

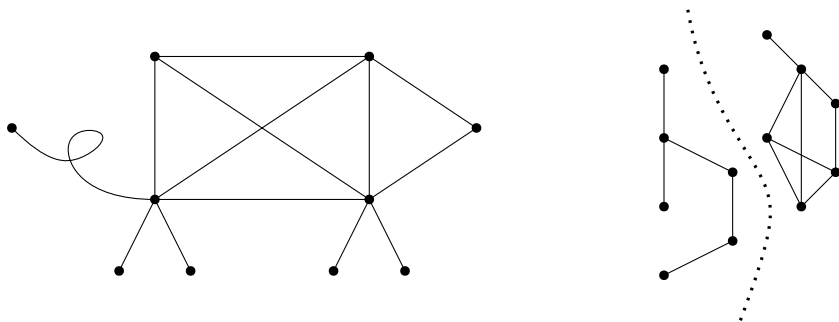
$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Pokud označíme $a = x - y$, $b = y - z$, pak vlastně dokazujeme $|a + b| \leq |a| + |b|$. Přitom pro každé reálné číslo α platí $\alpha \leq |\alpha|$ i $-\alpha \leq |\alpha|$ – tak například v první nerovnosti buď α je nezáporné, a pak $\alpha = |\alpha|$, nebo je α záporné, a pak $\alpha < 0 \leq |\alpha|$.

To ale znamená, že $a \leq |a|$ a $b \leq |b|$, v součtu $a + b \leq |a| + |b|$. Obdobně z nerovností $-a \leq |a|$ a $-b \leq |b|$ plyne $-(a + b) \leq |a| + |b|$. No a protože $|a + b|$ je buď rovno $a + b$, nebo $-(a + b)$ a obě hodnoty jsou nejvýše $|a| + |b|$, platí již $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Možná Tě už měření geometrických vzdáleností bodů v rovině a na přímce začíná unavovat. Podívejme se na jiné přirozené objekty, na kterých měřit vzdálenost. Jedná se o *neorientované grafy*, ovšem nemyslíme grafy funkcí. O grafech si toho můžeš spoustu zajímavého přečíst v PraSečích knihovničce nebo třeba v seriálu 34. ročníku⁴. Grafům se v tomto seriálu víc věnovat nebudeme, ber následujících pár odstavců jako takovou odbočku k zajímavé metrice, která neměří body v rovině.

Pokud jsi se s grafem ještě nepotkal(a), můžeš si ho představovat velmi obrázkově jako nějaké puntíky (nazývané *vrcholy*) pospojované čarami (neboli *hranami*). Mezi dvěma vrcholy může vést nanejvýš jedna hrana. Hrana též nemůže tvořit smyčku, tj. spojovat jeden a ten samý vrchol. Dva příklady grafů vidíš na obrázku.



O grafu řekneme, že je *souvislý*, pokud se dá z libovolného vrcholu dostat do libovolného jiného vrcholu přesunem po hranách. Tedy první graf na obrázku souvislý je, zatímco druhý není, jak naznačuje tečkovaná křivka oddělující dvě nepojené části grafu. Tyto „přesuny po hranách“ lze formálněji chápat jako takzvané *sledy* – sled mezi vrcholy u a v je konečná posloupnost vrcholů $(u = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v = v_n)$ splňující, že každé dva sousední vrcholy, tj. v_i a v_{i+1} pro $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, jsou spojené hranou. Tedy souvislé grafy jsou právě ty, ve kterých mezi každými dvěma vrcholy existuje nějaký sled.

⁴<https://prase.cz/archive/34/uvod1s.pdf>

No a na souvislých grafech lze velmi přirozeně zavést metriku: Dvěma různým vrcholům grafu u, v přiřadíme jako $\rho_{\text{graf}}(u, v)$ délku nějakého nejkratšího sledu, který je spojuje (délku ve smyslu počtu hran, tj. sled (v_1, v_2, v_3) má délku 2). Pokud $u = v$, definujeme $\rho_{\text{graf}}(u, v) = 0$.

Příklad. Nechť je dán souvislý graf. Dokaž, že ρ_{graf} tvoří metriku na jeho vrcholech.

Řešení. Zřejmě je pro každé dva vrcholy u, v číslo $\rho_{\text{graf}}(u, v)$ nezáporné. Pokud $u = v$, pak přímo z definice $\rho_{\text{graf}}(u, v) = 0$. Naopak pro $u \neq v$ musí každý sled spojující tyto dva vrcholy obsahovat alespoň jednu hranu, takže $\rho_{\text{graf}}(u, v) \geq 1$, a tedy $\rho_{\text{graf}}(u, v) \neq 0$.

Symetrie zřejmě taky platí – kdykoliv z u do v vede nějaký sled, pak (v podstatě) ten stejný sled vede z v do u (liší se jen pořadí, v jakém se přesouváme mezi vrcholy), takže toto platí i pro nejkratší sled.

Zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost. Nechť u, v a w jsou tři vrcholy grafu. Řekněme, že jsou vzájemně různé (pokud se některé dva vrcholy shodují, pak trojúhelníková nerovnost platí okamžitě). Myšlenka je velmi jednoduchá: Pokud se umíme v $n = \rho_{\text{graf}}(u, v)$ přesunech dostat z u do v a v $m = \rho_{\text{graf}}(v, w)$ přesunech dostat z v do w , pak na to, abychom se dostali z u do w , určitě stačí $n + m$ přesunů, potenciálně i méně (jít přes v nemusí být nejrychlejší), takže

$$\rho_{\text{graf}}(u, w) \leq n + m = \rho_{\text{graf}}(u, v) + \rho_{\text{graf}}(v, w).$$

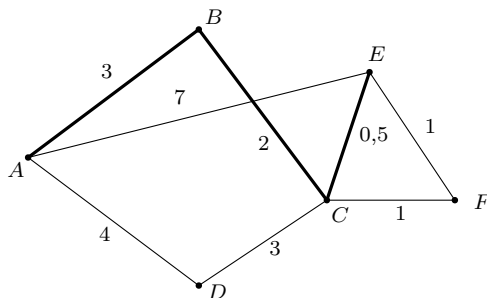
To už je vlastně důkaz, ale zapišme si to i v řeči sledů:

Buď $(u, u_1, \dots, u_{n-1}, v)$ nějaký nejkratší sled spojující u a v a $(v, v_1, \dots, v_{m-1}, w)$ nějaký nejkratší sled spojující v a w . Tedy první sled má délku $\rho_{\text{graf}}(u, v)$ a druhý má zase délku $\rho_{\text{graf}}(v, w)$. Pak $(u, u_1, \dots, u_{n-1}, v, v_1, \dots, v_{m-1}, w)$ je sled spojující u a w o délce $\rho_{\text{graf}}(u, v) + \rho_{\text{graf}}(v, w)$. Nejkratší sled spojující u a w může být potenciálně ještě kratší, ale určitě nebude delší než $\rho_{\text{graf}}(u, v) + \rho_{\text{graf}}(v, w)$, když má být nejkratší. Tedy $\rho_{\text{graf}}(u, w) \leq \rho_{\text{graf}}(u, v) + \rho_{\text{graf}}(v, w)$.

Grafovou vzdáleností lze například zjednodušeně modelovat, kteří lidé by se mohli znát na sociálních sítích. Každý uživatel je jeden vrchol grafu a mezi dvěma uživateli vede hrana právě tehdy, když se mají přidat na síti jako přátelé. Pokud se uživatel α na síti nepřáteli s uživatelem β , je mezi nimi vzdálenost alespoň 2. Uživatel α nemusí mít s β vážné vůbec nic společného, ale také mohou oba dva mít společného přítele σ – v prvním případě bude vzdálenost vrcholů α a β spíš velká, ve druhém případě je jejich vzdálenost 2, a tedy se v principu možná znají (oba mají ve svém okolí σ), jen se nepřáteli na této sociální síti. V tomto druhém případě tak může sociální síť vyhodnotit, že uživateli α doporučí přátelství s β .

Grafová metrika se dá ještě trochu zobecnit. Doteď jsme vlastně uvažovali, že všechny hrany mají „délku“ 1. V praxi ale často potřebujeme, aby některé sousední vrcholy byly velmi blízko k sobě a některé naopak velmi daleko od sebe. Můžeme si tedy říct, že každé hraně přiřadíme její délku (nějaké kladné číslo). Délka sledu bude poté prostě součet délek jednotlivých hran, přes které sled prochází. Metrika bude stále dvěma vrcholům přiřazovat délku nejkratšího sledu, který začíná v jednom a končí v druhém. Všimni si, že původní grafová metrika je vlastně jen speciálním případem této nové metriky, pokud řekneme, že všechny hrany mají délku 1.

Pohádka. Jako dobrý příklad hran s délkami může sloužit železniční síť. Mezi některými městy v PraSestánu vedou železniční tratě. Každá trať má svoji délku a doba přesunu po jedné trati je přesně její délka. Jak dlouho pak trvá přesun mezi dvěma libovolnými městy? Pokud si představíme, že města jsou vrcholy grafu a hrany jsou jednotlivé železniční tratě, nejkratší trasa mezi městy PraSdubice a PraSín bude přesně délka nejkratšího sledu mezi vrcholy, které odpovídají PraSdubicím a PraSínu.



Například na obrázku je vzdálenost vrcholů A a E rovna $3 + 2 + 0,5 = 5,5$ a nejkratší sled vede přes B a C místo „přímé trasy“ z A rovnou do E , protože ta má větší délku 7.

Na závěr uvedeme, že grafovou metriku můžeme mít i na grafech s nekonečným počtem vrcholů a hran, přičemž stále uvažujeme jen konečné sledy. Nebudeme je přímo zkoumat, ale mají zajímavé vlastnosti.

Velmi speciálním případem grafové vzdálenosti je takzvaná *diskrétní metrika* – na množině M vznikne tak, že M chápeme jako graf, ve kterém jsou úplně všechny vrcholy pospojované hranami (takovým grafům říkáme *úplné*). Pokud si představujeme, že je graf ohodnocený, všechny hrany budou mít délku 1.

Definice. Nechť M je neprázdná množina. Pak na ní definujeme *diskrétní metriku* tak, že dvěma prvkům $x, y \in M$ přiřadíme číslo $\rho_{\text{disk}}(x, y) = 1$, pokud $x \neq y$, nebo $\rho_{\text{disk}}(x, y) = 0$, pokud $x = y$.

Diskrétní metrika je taková podivná, vlastně umí jen rozlišovat, jestli jsou dva body stejné nebo různé. Hodí se ve chvílích, kdy si chce člověk ověřit, jestli nějaké tvrzení o metrických prostorech platí nebo neplatí – některá tvrzeníčka vypadají třeba v rovině s eukleidovskou metrikou jako zřejmě pravdivá, ale pro obecnou metriku to tak nemusí být, a diskrétní metrika je dobrá metrika „dost odlišná od té eukleidovské“, na které toto testovat.

Cvičení 2. (metrika džunglové řeky) Pro dva body v rovině $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ definujeme

$$\rho(x, y) = |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2|,$$

pokud $x_1 \neq y_1$, a nebo $\rho(x, y) = |y_2 - x_2|$, pokud $x_1 = y_1$. Dokaž, že ρ tvoří metriku na $\mathbb{R}^2$ (pohádkově si lze představovat, že ve směru první souřadnice teče řeka, a že nejrychlejší přesun mezi dvěma body x, y je nejdřív sejít po kolmici k řece, pak se přesunout po řece, a pak zase dojít po kolmici od řeky do cíle).

Cvičení 3. Pro dva nede degenerované trojúhelníky ABC a XYZ definujme jejich *plošnou odlišnost* jako součet jejich obsahů minus dvojnásobek obsahu obrazce určeného jejich průnikem. Dokaž, že plošná odlišnost tvoří metriku na množině všech nede degenerovaných trojúhelníků v rovině.

Úloha 1. Pro dvě 2025-ciferná čísla $a = \overline{a_1 \dots a_{2025}}$ a $b = \overline{b_1 \dots b_{2025}}$ (psaná v desítkové soustavě) definujme vzdálenost jako $\frac{1}{10^k}$, kde k je nejmenší číslo z $1, \dots, 2025$ takové, že se a a b na k -té cifře liší (případně jako 0, pokud jsou obě čísla stejná). Mějme 1001 takových čísel. Dokaž, že mezi nimi existují dvě vzájemně různá čísla taková, že jejich vzdálenost je nejvýše 0,001. (Jako bonusové cvičení si můžeš rozmyslet, že tato vzdálenost je opravdu metrika).

Cvičení 4. Buďte ρ a σ dvě metriky na množině M . Řekneme, že ρ je *skoro stejná* jako σ , pokud existují takové konstanty $c, C > 0$, že pro libovolné dva body $x, y \in M$ platí

$$c \cdot \sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq C \cdot \sigma(x, y).$$

(1) Dokaž, že pokud ρ je skoro stejná jako σ , pak i σ je skoro stejná jako ρ .

- (2) Nechť τ je třetí metrika na M . Dokaž, že pokud ρ je skoro stejná jako σ a σ je skoro stejná jako τ , pak je ρ skoro stejná jako τ .
- (3) Dokaž, že eukleidovská vzdálenost je skoro stejná jako manhattanská i maximová vzdálenost.

Úloha 2. Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou různá reálná čísla. Dokaž, že existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ takové, že pro každé reálné y je

$$\sum_{i=1}^n |x_i - x_k| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y|.$$

Mějme metrický prostor (M, ρ) . Pak pomocí ρ umíme měřit vzdálenosti jednotlivých dvojic bodů $x, y \in M$ jako $\rho(x, y)$. Co když ale máme více bodů, řekněme konečné množiny $A, B \subseteq M$, a chtěli bychom měřit, jak se tyto množiny odlišují? Jednou možností je použít *Hausdorffovu metriku*.

Nejdřív zavedme číslo

$$d_A(B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \rho(a, b).$$

To si lze představit tak, že pro každý bod $a \in A$ najdeme k němu co nejbližší bod $b \in B$. Tímto způsobem pro každé $a \in A$ dostaneme číslo udávající vzdálenost k nejbližšímu $b \in B$. Pak $d_A(B)$ je největší z těchto vzdáleností, tj. „jak daleko to je z A někam do B v nejhorším případě“. Obdobně definujeme

$$d_B(A) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} \rho(a, b).$$

Problém s těmito čísly je, že se nemusí rovnat, tj. obecně je rozdíl mezi $d_A(B)$ a $d_B(A)$. Příkladem může být $\mathbb{N}$ s metrikou definovanou jako $\rho(n, m) = |n - m|$, kde pokud vezmeme množiny $A = \{1\}$ a $B = \{2, 3\}$, bude platit $d_A(B) = \max\{1\} = 1$ a $d_B(A) = \max\{1, 2\} = 2$. Metrika ale musí být symetrická. Řešením je vzít za metriku to větší z těchto čísel, což je už Hausdorffova metrika, definovaná jako

$$\rho_H(A, B) = \max\{d_A(B), d_B(A)\}.$$

Tato poněkud strašlivá kombinace tří maxim a minim už opravdu tvoří metriku na konečných podmnožinách metrického prostoru.

Jako úplně největší špiček poznamenejme, že jsme uvažovali A a B konečné proto, aby tato minima a maxima vůbec existovala – nekonečná podmnožina reálných čísel nemusí mít minimum ani maximum. Nicméně pokud znáš suprema a infima (zobecnění maxima a minima, která vždy pro omezenou podmnožinu $\mathbb{R}$ existují), pak věz, že nahrazením maxim a minim supremy a infimy umožňuje definovat Hausdorffovu metriku i na nekonečných podmnožinách M . Tedy například lze v rovině pomocí Hausdorffovy metriky měřit manhattansky vzdálenost mezi dvěma kruhy.

Intermezzo: Rychlokurz množin a množin množin

V další kapitole začneme intenzivněji pracovat s množinami. Věříme, že jsi se s množinami již určitě setkal(a), ale alespoň tu zavedeme některé značení. Tuhle kapitolu klidně zatím přeskoč, a kdyby se Ti nějaká práce s množinami později v seriálu nezdála, můžeš se sem vrátit.

Množina je nějaký soubor prvků. Tyto prvky mohou být ledacos – čísla, body v rovině, skořicovní šneci. Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ obsahuje některá čísla, přímka v rovině jakožto množina obsahuje

své body, množina Matějových oblíbených jídel obsahuje skořicové šneky. Množiny typicky značíme velkými písmeny. To, že nějaký prvek p *náleží množině* (nebo *leží v množině*) A , značíme $p \in A$. V množině „nezáleží na pořadí“ ani žádný prvek nemůže množině náležet „vícekrát“. *Prázdnou množinu*, tedy množinu bez prvků, značíme $\emptyset$.

Pokud máme dvě množiny A a B , můžeme pomocí nich tvořit nové množiny. Tak třeba *průnik* A a B je množina $A \cap B$ složená z prvků, co leží v A i v B . *Sjednocením* A a B rozumíme množinu $A \cup B$ obsahující ty prvky, které leží alespoň v jedné z množin A , B . *Rozdíl* A a B je pak množina $A \setminus B$ obsahující takové prvky náležící A , které nenáleží B . Symbolicky:

$$A \cap B = \{p \mid p \in A \wedge p \in B\}, \quad A \cup B = \{p \mid p \in A \vee p \in B\}, \quad A \setminus B = \{p \mid p \in A \wedge p \notin B\}.$$

Všimni si použitého zápisu – obě množiny popisujeme jako ty body p , které splňují nějakou podmínku, kterou uvádíme za svislítko.

Pokud B obsahuje všechny prvky A (a potenciálně nějaké další), říkáme, že A je *podmnožinou* B , což značíme jako $A \subseteq B$. Často budeme v situaci, kdy máme nejdříve zadanou nějakou základní množinu M (například bodů v celé rovině) a pracujeme čistě s podmnožinami A této množiny, $A \subseteq M$. Užitečnou operací pak pro nás bude *doplňek* (nebo také *komplement*) A , značený jako A^c a definovaný jako $A^c = M \setminus A$ – tedy jako ty body základního prostoru M , které v A neleží. Nedává smysl ale mluvit o doplňku, pokud nevíme, jaká je naše základní množina M .

Zatím jsme předpokládali, že máme dvě množiny a s nimi operujeme. To nám ale obvykle nebude stačit. Pokud chceme pracovat s nějakým obecným souborem množin ... Soubor množin, to zní zase jako nějaká množina! A opravdu, občas budeme v seriálu pracovat s množinami, jejich prvky jsou další množiny, takzvanými *systémy množin*. To může znít na první přečtení strašidelně, a taky přiznáváme, že chvilku trvá, než si na systémy množin člověk zvykne. Pokud se Ti systémy množin zatím nelíbí, věz, že je v tomto díle seriálu po této kapitole skoro nepotkáš, v dalších dílech seriálu se jim ale spíše nevyhneme.

Typicky se systémy množin označují velkými kaligrafickými písmeny, například $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}$. Dělá se to čistě pro přehlednost, aby bylo jasné, která písmenka značí základní prvky, která množiny a která systémy množin, například může platit $a \in A \in \mathcal{A}$. Systémem množin může být například výběr několika přímek v rovině nebo množina obsahující některé základní číselné obory: $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$.

Pro neprázdný systém množin $\mathcal{A}$ definujeme *průnik všech množin z $\mathcal{A}$* jako

$$\bigcap \mathcal{A} = \{p \mid \forall A \in \mathcal{A} : p \in A\},$$

tj. jako ty body, které leží v každé množině obsažené v $\mathcal{A}$. Podobně přirozeně zobecňujeme *sjednocení všech množin z $\mathcal{A}$* na množinu obsahující ty body, které leží v alespoň jedné množině z $\mathcal{A}$:

$$\bigcup \mathcal{A} = \{p \mid \exists A \in \mathcal{A} : p \in A\}.$$

Systémy množin také můžeme zapisovat o něco konkrétněji, pokud si nějak „označíme“ nebo „opísmenkujeme“ množiny v ní obsažené. Například pro konečný systém $\mathcal{A}$ obsahující pět množin je přirozené si tyto množiny očíslovat a psát $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Pak také průnik a sjednocení tohoto systému zapisujeme jako

$$\bigcap_{i=1}^5 A_i = \bigcap \mathcal{A}, \quad \bigcup_{i=1}^5 A_i = \bigcup \mathcal{A}.$$

V obecném případě ale může být $\mathcal{A}$ „moc velká“ (ať to znamená cokoliv) a přirozená čísla nám nemusí stačit. Přesto můžeme uvažovat nějakou obecnou množinu I , jejíž prvky nám slouží čistě jako ono „opísmenkování“ množin v $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Pak opět průnik a sjednocení můžeme psát o něco konkrétněji jako

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap \mathcal{A}, \quad \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup \mathcal{A}.$$

Třeba v minulém případě $\mathcal{A}$ o pěti množinách bylo $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Příklad „většího“ systému množin může být třeba tento: Pro reálné číslo x můžeme definovat dvouprvkovou množinu $A_x = \{x, x + 2\}$. Pak můžeme například vytvořit systém $\{A_x \mid x \in (0, 1)\}$, tedy vlastně indexovaný intervalem $I = (0, 1)$. Sjednocení takového systému pak lze psát dvěma způsoby jako

$$\bigcup_{x \in (0, 1)} A_x = \bigcup \{A_x \mid x \in (0, 1)\},$$

záleží jen na tom, který nám přijde hezčí. Výsledkem tohoto sjednocení bude $(0, 1) \cup (2, 3)$.

Příklad. Nechť $\mathcal{A}$ je libovolný neprázdný systém množin. Dokaž, že průnik $\mathcal{A}$ je podmnožinou každé množiny A náležící $\mathcal{A}$, tj. že $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A$.

Řešení. Potřebujeme ukázat, že každý prvek náležící $\bigcap \mathcal{A}$ též náleží A . Nechť tedy $a \in \bigcap \mathcal{A}$ je libovolný prvek. Z definice průniku systému množin to znamená, že a je obsažen v každé množině ležící v $\mathcal{A}$. Speciálně tedy a náleží A , neboť $A \in \mathcal{A}$. Odtud plyne $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A$.

Příklad to je velmi krátký a jednoduchý, jen je potřeba mít přehled o tom, které symboly značí prvky, které množiny a které systémy množin (například že ačkoliv $\mathcal{A}$ je systém množin, jeho průnik $\bigcap \mathcal{A}$ je již množina prvků).

Cvičení 5. Dokaž, že:

- (1) Pro množiny A, B, C platí $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (2) Pro množiny $A, B \subseteq M$ je $A \setminus B = A \cap B^c$, kde doplněk bereme vzhledem k M .
- (3) Pro množiny $A \subseteq B \subseteq M$ je $B^c \subseteq A^c$.
- (4) Pro množiny $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$ je $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_n$.
- (5) Pro množiny $A, B \subseteq M$ je $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- (6) Obecněji, pro neprázdnou množinu I a systém $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ podmnožin množiny M platí *de Morganovo pravidlo*

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

Otevíráme a zavíráme

Ve chvíli, kdy máme metriku, nic nám nebrání zobecňovat objekty, které se opírají o pojem vzdálenosti v nám známé geometrii. My takové zobecnění provedeme hlavně pro kruhy/koule.

Definice. Nechť (M, ρ) je metrický prostor, $a \in M$ a r je kladné reálné číslo. *Otevřenou koulí se středem a a poloměrem r* rozumíme množinu

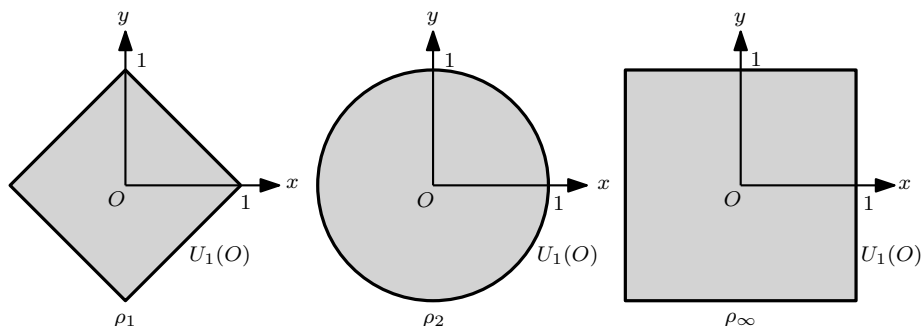
$$U_r(a) = \{x \in M \mid \rho(a, x) < r\}.$$

Obdobně definujeme *uzavřenou kouli* jako

$$B_r(a) = \{x \in M \mid \rho(a, x) \leq r\}.$$

S koulemi jsme se setkali už ze začátku seriálu. Uzavřená koule s poloměrem r okolo nějakého bodu $a \in \mathbb{R}^2$ byl prostě kruh o poloměru r se středem a . Pokud vezmeme místo toho otevřenou kouli o stejném středu a poloměru, bude vypadat úplně stejně, jen nebude obsahovat body na kružnici $k_r(a)$.

Takovéto obecné koule můžou pro různé metriky vypadat všelijak – na obrázku je pár takových příkladů v rovině a my Tě prosíme, aby sis rozmyslel(a), proč jsou zrovna takové a jaké tvary by měly v prostoru.



Otevřené koule pro nás budou mít veliký význam – jedná se sice o jedny z nejjednodušších množin, které lze pomocí metriky definovat, ale přitom se pomocí nich dají matematicky přesně formulovat na první pohled trochu nejasné věty, jako že „úsečka nemá vnitřek,“ „bod leží na hranici čtverce“ nebo „přímka není omezená“.

Začneme vnitřkem množiny, například intervalu $(0, 1)$ se standardní metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$. Ten obsahuje body, o kterých bychom řekli, že leží „uvnitř“ tohoto intervalu – například $\frac{1}{2}$, ale i třeba $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{1000}$, ... Náš interval má dva krajní body 0 a 1 a všechna předchozí čísla mají od obou těchto krajů kladnou vzdálenost. Speciálním bodem je ale 1, která sice v $(0, 1)$ leží, ale ke kraji 1 má vzdálenost 0, a také bychom spíš neřekli, že leží *uvnitř* tohoto intervalu.

Intuice s „nenulovou vzdáleností od kraje“ má něco do sebe, ale už v $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ se nám situace komplikuje – pro bod uvnitř čtverce je nekonečno „krajních bodů“, od kterých měřit vzdálenost. A jak navíc u komplikovanějších množin rozhodovat o tom, které body jsou „krajní“ a které ne?

Přesto se dá vnitřek množiny v libovolném metrickém prostoru zavést elegantně a intuitivně prostě tím, že o žádných „krajích“ mluvit nebudeme (to ale neznamená, že by to byla úplně scestná myšlenka, jak uvidíme časem).

Definice. Necht (M, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq M$ a $a \in A$. Řekneme, že a je *vnitřním bodem* A , pokud existuje takový poloměr $r > 0$, že $U_r(a) \subseteq A$. *Vnitřek* A definujeme jako množinu všech vnitřních bodů A a značíme ho $\text{Int } A$. Řekneme, že množina A je *otevřená*, pokud všechny její body jsou vnitřní, tj. pokud $A = \text{Int } A$.

Zkráceně řečeno tedy bod x leží uvnitř množiny A , pokud v ní neleží jen on sám, ale i nějaká celá koule se středem v x , tj. mohli bychom říct „nejen x leží v A , ale i všechny *dostatečně blízké* body okolo x leží v A .“

Příklad. (celý prostor je otevřený) Mějme metrický prostor (M, ρ) . Dokaž, že M je otevřená množina.

Řešení. Vezměme si libovolný bod $x \in M$, dokážeme, že je vnitřní. Pak kulička $U_r(x)$ je určitě podmnožinou M , protože je složena pouze z prvků M . Tedy každý bod M je vnitřní.

Příklad. Dokaž, že v libovolném metrickém prostoru je otevřená koule otevřenou množinou.

Řešení. Mějme metrický prostor (M, ρ) , bod $a \in M$, poloměr $r > 0$ a otevřenou kouli

$$U_r(a) = \{x \in M \mid \rho(x, a) < r\}.$$

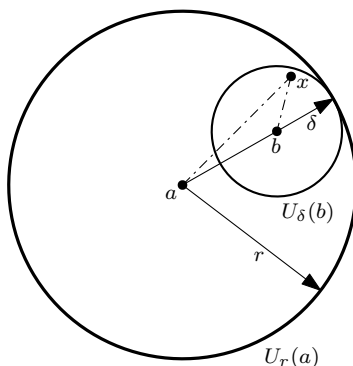
Chceme ukázat, že každý bod v této kouli je vnitřní. Buď tedy $b \in U_r(a)$ nějaký bod v této kouli. Ten z definice otevřené koule splňuje $\rho(b, a) < r$, takže pro $\delta = r - \rho(b, a)$ platí $\delta > 0$, a tedy δ může sloužit jako validní poloměr. Ukážeme, že $U_\delta(b) \subseteq U_r(a)$, což bude znamenat, že b je opravdu vnitřním bodem $U_r(a)$.

Buď tedy $x \in U_\delta(b)$ libovolný bod v nové kuličce. Pak

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, b) + \rho(b, a) < \delta + \rho(b, a) = (r - \rho(b, a)) + \rho(b, a) = r,$$

kde jsme nejdříve použili trojúhelníkovou nerovnost, pak $x \in U_\delta(b)$, a nakonec naši volbu poloměru δ . Ukázali jsme, že x je od a vzdálen méně než r , a tedy $x \in U_r(a)$. Protože toto platí pro libovolný bod $x \in U_\delta(b)$, musí již $U_\delta(b) \subseteq U_r(a)$.

Poznamenejme, že volba δ přímo odpovídá tomu, jak bychom poloměr menší kuličky volili „obrázkově“ v rovině se standardní eukleidovskou metrikou. Obrázky s kuličkami v metrických prostorech překvapivě často fungují a je dobré si je při řešení úloh a dokazování tvrzení kreslit.



Cvičení 6. Rozmysli si, že úsečka v rovině se standardní eukleidovskou metrikou nemá žádné vnitřní body.

Příklad. (sjednocení otevřených) Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $\mathcal{G}$ je libovolný systém otevřených množin v tomto prostoru. Dokaž, že pak i $\bigcup \mathcal{G}$ je otevřená množina.

Řešení. Buď $a \in \bigcup \mathcal{G}$ libovolný bod – o něm potřebujeme ukázat, že je vnitřním bodem $\bigcup \mathcal{G}$, tj. že i s celou kuličkou leží v $\bigcup \mathcal{G}$. Bod a leží ve sjednocení $\mathcal{G}$, což znamená, že existuje nějaká množina $G \in \mathcal{G}$ obsahující a . Ale $\mathcal{G}$ je systém otevřených množin, takže G je otevřená, a tedy existuje poloměr $r > 0$ takový, že $U_r(a) \subseteq G$. Protože ale $G \subseteq \bigcup \mathcal{G}$ (něco podobného jsme dokazovali pro průnik v úvodní kapitole o množinách), musí $U_r(a)$ celá ležet i v $\bigcup \mathcal{G}$. Tedy a je vnitřním bodem $\bigcup \mathcal{G}$.

Otevřenost se tedy zachovává na sjednocování. S průniky je to o trochu komplikovanější.

Cvičení 7. Nechť (M, ρ) je metrický prostor.

- (1) Mějme v M konečně mnoho otevřených množin $G_1, \dots, G_n$. Dokaž, že pak i jejich průnik $\bigcap_{i=1}^n G_i$ je otevřená množina.
- (2) Najdi nějaký nekonečný systém otevřených množin $\mathcal{G}$ takový, že jejich průnik $\bigcap \mathcal{G}$ již otevřený není.

Stejně jako může nastat, že bod i s celou kuličkou leží uvnitř množiny, tak může nastat i případ, kdy bod x i nějaká celá koule $U_r(x)$ leží vně A , tj. $U_r(x) \cap A = \emptyset$ – to vlastně odpovídá tomu, že $U_r(x) \subseteq A^c$, tj. x je vnitřním bodem doplňku A (ale spíš řekneme, že x leží vně A).

To ale nevycerpává všechny možnosti, které mohou nastat. Ještě se může stát, že jakkoliv malý poloměr $r > 0$ zvolíme, stále bude kulička $U_r(x)$ jen z části protínat A a jen z části protínat A^c , ale nebude podmnožinou ani jedné z těchto množin. Intuitivně, „libovolně blízko k x lze nalézt jak bod z A , tak bod z A^c .“ A o takových bodech přemýšlíme jako o bodech hranice (nebo „okraje“) A :

Definice. Nechť (M, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq M$ a $a \in M$. Řekneme, že a je *hraničním bodem* A , pokud pro libovolný poloměr $r > 0$ platí, že $U_r(a)$ protíná jak A , tak A^c . Symbolicky:

$$\forall r > 0 : (A \cap U_r(a) \neq \emptyset \wedge A^c \cap U_r(a) \neq \emptyset).$$

Hranicí množiny A pak rozumíme množinu všech hraničních bodů A a značíme ji ∂A .

Cvičení 8. (diskrétní koule nemají hranici) Nechť M je neprázná množina a ρ_{disk} je diskrétní metrika na M . Nechť dále a je libovolný bod v M a $r > 0$. Dokaž, že hranicí otevřené koule $U_r(a)$ je prázdná množina.

Cvičení 9. (rozklad prostoru) Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Dokaž, že každý bod M leží buď uvnitř, vně, a nebo na hranici A , a vždy nastane právě jedna z těchto možností. Jinak řečeno, dokaž, že

$$\text{Int } A \cup \text{Int}(A^c) \cup \partial A = M$$

a že $\text{Int } A$, $\text{Int}(A^c)$ a ∂A jsou disjunktí.

Hraniční body množiny A nemusí nutně ležet v této množině – část hranice A může ležet v A^c . Dokonce může nastat $\partial A \subseteq A^c$, tj. A neobsahuje žádný svůj hraniční bod. Takovou vlastnost mají právě otevřené množiny, jak například ihned plyne z následujícího rozkladu na vnitřek a část hranice:

Cvičení 10. Nechť A je libovolná množina v metrickém prostoru. Dokaž, že pak lze A psát jako

$$A = (\text{Int } A) \cup (A \cap \partial A).$$

Naopak množiny, které obsahují celou svou hranici, jsou speciální a budou pro nás v budoucnu důležité, tak si je rovnou pojmenujme.

Definice. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Řekneme, že A je *uzavřená*, pokud obsahuje svoji hranici, tj. $\partial A \subseteq A$. *Uzávěrem* A rozumíme množinu

$$\bar{A} = A \cup \partial A.$$

Uzávěr tedy do původní množiny A přidá body její hranice. Je to snaha tuto množinu A uzavřít. To je správný pohled na věc, ale je potřeba být trochu opatrnější – aby $\bar{A}$ byla uzavřená množina, musí obsahovat *svou* hranici $\partial(\bar{A})$, a ne původní hranici ∂A . Naštěstí lze ukázat, že hranice se po použití uzávěru nezmění, takže $\bar{A}$ opravdu přidává do A body tak, aby výsledek byl uzavřený.

Cvičení 11. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Dokaž, že $\bar{A}$ je uzavřená množina.

Uzávěr A by šlo též definovat trochu strašidelněji jako průnik všech uzavřených nadmnožin A (mezi nimiž je vždy alespoň metrický prostor M samotný, neboť je sám v sobě uzavřený). V tomto smyslu je uzávěr dokonce *nejmenší uzavřená nadmnožina* A . Uzavřená proto, že průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina, jak se časem můžeš přesvědčit v pozdějším cvičení. „Nejmenší“ znamená, že jakákoliv jiná uzavřená nadmnožina A v sobě musí $\bar{A}$ obsahovat. Tedy uzávěr lze psát jako

$$\bar{A} = \bigcap \{F \mid A \subseteq F \wedge F \text{ je uzavřená v } M\}.$$

Můžeš si to zkusit dokázat, ale je to trochu pracnější.

Cvičení 12. (dualita otevřených a uzavřených množin) Dokaž, že množina F v metrickém prostoru je uzavřená právě tehdy, když F^c je otevřená.

Cvičení 13. Necht (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Dokaž, že $(\bar{A})^c = \text{Int}(A^c)$.

Cvičení 14. Dokaž, že každou otevřenou množinu v metrickém prostoru lze zapsat jako sjednocení nějakého systému otevřených koulí. Tedy symbolicky, dokaž, že pro každou G otevřenou v metrickém prostoru (M, ρ) existuje nějaká množina I , body $a_\alpha \in M$ a poloměry $r(\alpha) > 0$ (pro $\alpha \in I$) takové, že

$$G = \bigcup_{\alpha \in I} U_{r(\alpha)}(a_\alpha).$$

Konvergence

Když si člověk na kalkulačce nechá spočítat π , kalkulačka mu ukáže jen nějaký konečný počet číslic desetinného zápisu, tedy aproximuje pí pomocí nějakého blízkého racionálního čísla. Kvalita této aproximace je obvykle omezena jen velikostí displeje. Kdybychom chtěli dalších 10 cifer, bylo by možné je spočítat. A kdybychom chtěli ještě dalších 10, opět je lze spočítat pomocí stejného algoritmu, co používá kalkulačka. Protože je π iracionální číslo, nikdy nedostaneme přesný výsledek. Můžeme ale získat *libovolně dobrou* aproximaci. A o té nekonečné posloupnosti stále se zlepšujících se aproximací se pak říká, že se blíží k π , neboli že tato posloupnost k π *konverguje*. Co přesně se tím ale míní?

Definice. Necht $(x_n)_{n=1}^\infty = (x_1, x_2, \dots)$ je nekonečná posloupnost bodů v metrickém prostoru (M, ρ) a $x \in M$. Řekneme, že bod x je *limitou* posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ (nebo také že tato posloupnost *konverguje* k x), pokud

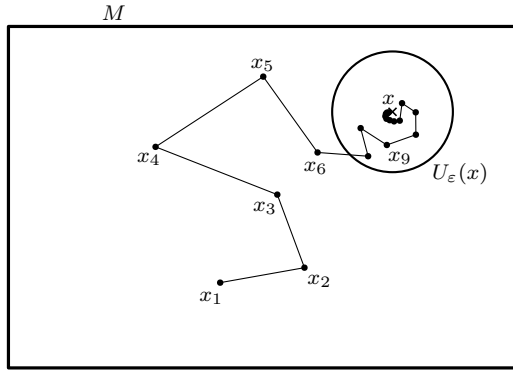
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \rho(x, x_n) < \varepsilon.$$

To je hodně písmenek a kvantifikátorů, ale my se jimi statečně proboujeme. Kladné číslo ε lze chápat jako „toleranci“ nebo „požadovanou kvalitu aproximace“. Například kdybychom chtěli spočítat hodnotu π přesně na tři desetinná místa, mohli bychom zvolit toleranci $\varepsilon = 0,0001$; pak se každé číslo vzdálené od π nejvýše o 0,0001 bude na prvních třech desetinných místech s π shodovat. Definice limity posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty = (x_1, x_2, \dots)$ pak říká, že pro danou toleranci ε jsou od určitého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ dál už *všechny hodnoty* x_n blíž k limitě x než je zadaná tolerance ε . Navíc tohle musí platit pro *každou* předem danou toleranci ε (nicméně pro různá ε se mohou n_0 lišit).

Poznámka. Zkusíme definici limity ještě přeformulovat trochu jinak, třeba Ti některý z těchto jiných pohledů bude dávat větší smysl.

Podmínku $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ lze také psát jako $x_n \in U_\varepsilon(x)$, takže vlastně požadujeme, aby od určitého indexu n_0 dál všechny body x_n ležely uvnitř kuličky se středem x a poloměrem $\varepsilon > 0$, a aby takové n_0 šlo najít pro každý poloměr ε . Tj. pro libovolně malou kuličku se středem x musí od nějakého indexu n_0 již všechny body x_n být uvnitř této kuličky, což intuitivně odpovídá tomu, že se body hodně přiblíží k x a už se nevzdálí.

Všimni si rovněž, že pokud od nějakého indexu n_0 dál jsou už všechna x_n od x vzdálena méně než ε , znamená to také, že jediné body, které jsou od x vzdálené *o víc* než ε , mohou být $x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}$ (a ani ty nemusí), ale určitě ne už žádné další. To znamená, že *jen konečně bodů* x_n může být od x dál než o ε .



První odstavec této kapitoly nám tedy neformálními slovy říká, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ nám kalkulačka umí dát posloupnost aproximací $(a_n)_{n=1}^\infty$, $a_n \in \mathbb{Q}$, která konverguje k π , neboli má limitu π . Pokud ses již s limitami setkal někdy dříve, pravděpodobně šlo o limity reálných posloupností. To je jen speciální případ limit v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ se standardní metrikou.

Pokud máš po ruce kalkulačku, můžeš si zkusit spočítat prvních pár členů posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ tak, že zvolíš x_1 třeba 1, 2 nebo 0,2025 a budeš počítat nové členy jako

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Členy posloupnosti se po chvíli už budou jen málo měnit a budou se blížit jistému podezřele vypadajícímu číslu.

Příklad. Nechť v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \rho)$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ máme danu posloupnost $(\frac{1}{n})_{n=1}^\infty$. Dokaž, že tato posloupnost má limitu 0.

Řešení. Postupujeme podle definice. Potřebujeme ukázat, že pro jakoukoliv toleranci $\varepsilon > 0$ jsme schopni najít index n_0 takový, že všechny hodnoty $\frac{1}{n}$ jsou pro $n \geq n_0$ od nuly vzdálené o méně než ε , tj. že $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. Předně poznamenejme, že výraz na levé straně můžeme zjednodušit a ověřovat $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je nějaké libovolné, ale dané číslo. Chceme, aby platilo $\frac{1}{n} < \varepsilon$ pro všechna dostatečně velká n . Ekvivalentně upravením nerovnosti chceme $\frac{1}{\varepsilon} < n$ pro dostatečně velká n . To je ale snadné – ať je ε jakékoliv, určitě umíme najít přirozené číslo n_0 takové, že bude větší než $\frac{1}{\varepsilon}$. Pak pro každé $n \geq n_0$ bude platit $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, a tedy také $\varepsilon > \frac{1}{n}$.

Tedy pro naše ε jsme opravdu vhodné n_0 našli. A protože toto „naše“ ε bylo libovolné, platí, že pro každé ε jsme takové n_0 schopni najít („pokud dostaneme kladné ε , tak zvolíme nějaké n_0 větší jak $\frac{1}{\varepsilon}$, a bude to fungovat; třeba n_0 spočteme zaokrouhlením $\frac{1}{\varepsilon}$ nahoru“). Tedy opravdu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Cvičení 15. Nechť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost bodů v metrickém prostoru (M, ρ) , $x \in M$ a platí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\rho(x_n, x) \leq \frac{1}{n}$. Dokaž, že pak již musí být x limitou $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Cvičení 16. Dokaž, že v $\mathbb{R}$ se standardní metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Cvičení 17. Jak vypadají konvergentní posloupnosti v prostoru s diskrétní metrikou?

Příklad. (jednoznačnost limity) Necht (M, ρ) je metrický prostor a $(x_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost bodů v M . Dokaž, že tato posloupnost nemůže mít dvě různé limity.

Řešení. Myšlenka je taková, že posloupnost se časem shlukuje jen v malé kuličce kolem své limity. Pokud by jedna posloupnost měla dvě různé limity, tak by se měla zároveň shlukovat ve dvou malých kuličkách o různých středech. To samozřejmě nebude možné, pokud tyto kuličky budou dost malé, aby se vůbec neprotínaly. A to umíme zajistit volbou dostatečně malého poloměru. Udělejme to formálně:

Pro spor předpokládejme, že $(x_n)_{n=1}^\infty$ má dvě limity $x \neq y$. Protože se tyto limity nerovnají, musí mít nějakou kladnou vzdálenost $\rho(x, y) > 0$. Zvolme si $\varepsilon = \frac{\rho(x, y)}{3} > 0$. To je kladné číslo, takže ho můžeme chápat jako ε v definici limity. Tudíž lze najít $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že všechna x_n pro $n \geq n_1$ jsou od x vzdálené méně než ε . Stejně tak lze ale najít $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že všechna x_n pro $n \geq n_2$ jsou od y vzdálené méně než ε , protože i y je limitou $(x_n)_{n=1}^\infty$. Máme tedy

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon, \quad n \geq n_1, \quad \text{a} \quad \rho(x_n, y) < \varepsilon, \quad n \geq n_2.$$

Jedno z čísel n_1 a n_2 bude větší, označme si ho jako n_0 . Pak pro $n \geq n_0$ platí obě předešlé nerovnosti současně. Teď už stačí použít trojúhelníkovou nerovnost, abychom došli ke sporu: Pro $n \geq n_0$ totiž platí

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}\rho(x, y),$$

tedy $\rho(x, y) < \frac{2}{3}\rho(x, y)$, což ale pro kladné číslo $\rho(x, y)$ nemůže nastat. Došli jsme ke sporu, takže $(x_n)_{n=1}^\infty$ nemůže mít dvě různé limity.

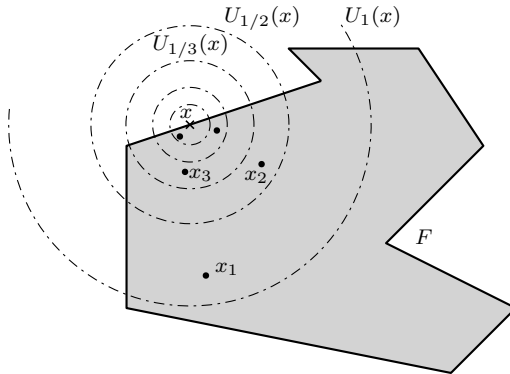
Uzavřené množiny jsme definovaly tak, že obsahují svoji hranici. Lze je ale také popsat jako ty množiny, ze kterých „nejde vykonvergovat“ – pokud nějaká konvergentní posloupnost bodů leží v uzavřené množině, pak tam leží i limita této posloupnosti.

Příklad. Necht (M, ρ) je metrický prostor a $F \subseteq M$ je neprázdná množina. Dokaž, že F je uzavřená právě tehdy, když pro každou konvergentní posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ bodů z F platí, že i $\lim x_n$ leží v F .

Řešení. „ $\implies$ “ Necht je F uzavřená a necht je $(x_n)_{n=1}^\infty$ libovolná posloupnost bodů v F , která konverguje k $x = \lim x_n \in M$. Pak x nemůže ležet „vně“ F , tj. v $\text{Int}(F^c)$ – kdyby totiž x byl vnitřním bodem F^c , pak by šlo najít kuličku $U_\varepsilon(x) \subseteq F^c$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Zároveň z definice limity by ale šlo najít n_0 takové, že pro indexy $n \geq n_0$ by platilo $\rho(x, x_n) < \varepsilon$, tj. $x_n \in U_\varepsilon(x)$. Speciálně by $x_{n_0} \in U_\varepsilon(x) \subseteq F^c$, což je ale spor s tím, že x_{n_0} leží v F .

Tedy x neleží v $\text{Int}(F^c)$. Ze cvičení 9 proto plyne, že x leží buď uvnitř F (tj. v $\text{Int}(F)$), nebo na hranici F (tj. v ∂F). To jsou ale obojí podmnožiny F (pro hranici to platí z uzavřenosti F), takže $x \in F$.

„ $\impliedby$ “ Necht všechny limity konvergentních posloupností bodů z F leží v F . Pro uzavřenost F chceme dokázat, že $\partial F \subseteq F$. Necht tedy x je nějaký bod hranice ∂F . Z definice hranice plyne, že pro každý poloměr $\varepsilon > 0$ koule $U_\varepsilon(x)$ má neprázdný průnik s F i s F^c . To speciálně znamená, že pro každé n přirozené lze najít bod $x_n \in U_{1/n}(x) \cap F$ (volíme $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$), viz obrázek. Tím jsme zkonstruovali posloupnost bodů $(x_n)_{n=1}^\infty$, které všechny leží v F , a navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Odtud ale ze cvičení 15 plyne, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ konverguje k x . Spolu s naším předpokladem ze zadání tak musí x ležet v F jakožto limita bodů z F . Tedy každý hraniční bod leží v F .



Cvičení 18. Necht (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$ je jeho neprázdná podmnožina. Dokaž, že uzávěr A lze popsat jako

$$\bar{A} = \{\lim x_n \mid (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ je posloupnost bodů z } A\}$$

Cvičení 19. Dokaž, že průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina

- (1) pomocí cvičení 12, de Morganova pravidla (poslední části cvičení 5 z kapitoly o množinách) a toho, že sjednocení otevřených množin je otevřená množina;
- (2) pomocí charakterizace, že z uzavřené množiny nelze vykonvergovat.

A co dál?

Děkujeme, že jsi nás doprovázel(a) až sem na konec prvního dílu seriálu. V příštím díle se dozvíš, co to jsou spojité funkce a proč je uzavřený interval lepší než ten otevřený. Tak na viděnou!

Pár cvičení na závěr

Cvičení 20. Nalezni nějaký metrický prostor, ve kterém má každá kružnice jen konečně mnoho bodů, ale každá koule nekonečno.

Cvičení 21. Nalezni nějaký metrický prostor, kde existuje kružnice, která je podmnožinou jiné kružnice o větším poloměru.

Cvičení 22. Všimni si, že v metrickém prostoru na slovech (byl uveden na začátku seriálu) je trojúhelník (VITEK, MATEJ, POTOK) rovnoramenný. Rozmysli si, jak vypadají všechny rovnostranné trojúhelníky na slovech délky 6, kde pro jednoduchost uvažujeme jen slova obsahující pouze písmena A a B .

Úloha 3. Mějme na kružnici $2n$ různých bodů, ty spárujme, každý pár spojme úsečkou a posčítejme délky těchto úseček. Uvažujme takové párování, které dává tento součet délek nejmenší ze všech možných párování. Dokaž, že v tomto párování se žádné dvě úsečky uvnitř kruhu neprotínají.

Cvičení 23. Rozmysli si, že pokud bychom v rovině v definici eukleidovské metriky

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

zapomněli odmocninu, pak bychom nedostali metriku.

Cvičení 24. Najdi metrický prostor, kde existují dvě kružnice, které se protínají právě ve třech bodech.

Úloha 4. Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Dokaž, že pak i σ tvoří metriku na M , kde

$$\sigma(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \quad x, y \in M.$$

Cvičení 25. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a mějme v něm posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$ a nechť pro každé přirozené n platí $\rho(x_n, y_n) = \sin\left(\frac{\pi n}{2025}\right)$. Dokaž, že pak alespoň jedna z těchto dvou posloupností nemá limitu.

Úloha 5. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Definujme *chameleona* jako posloupnost $3n$ písmenek, mezi kterými je přesně n písmenek „a“, n písmenek „b“ a n „c“. Definujme výměnu jako vyměnění dvou sousedních písmenek (výměna tedy dělá z chameleonů chameleony). Dokaž, že pro každého chameleona existuje jiný chameleon, který se nedá z původního chameleona získat pomocí méně než $\frac{3n}{2}$ výměn.

(IMO shortlist 2017)

Cvičení 26. Dokaž, že v metrickém prostoru (M, ρ) pro $A, B \subseteq M$ platí:

- (1) Pokud $A \subseteq B$, pak i $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.
- (2) $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$.
- (3) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Zároveň ukaž, že v bodě (1) z $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ neplyne $A \subseteq B$ a že v bodě (2) se nemusí výsledné množiny rovnat.

Cvičení 27. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$ jsou dvě posloupnosti bodů v M mající limity $x = \lim x_n$ a $y = \lim y_n$. Dokaž, že pak posloupnost vzdáleností $(\rho(x_n, y_n))_{n=1}^\infty$ má limitu (v $\mathbb{R}$ vzhledem k metrice $\sigma(x, y) = |x - y|$).

Návody k úlohám

1. Uvažuj množinky $A_{x,y}$ takových čísel, že jejich první cifra je x a druhá je y . Jaká je vzdálenost dvou čísel ze stejné množiny $A_{x,y}$?
2. Čísla seřaď a zvol to prostřední. Ukaž, že pro sudé n tvaru $n = 2\ell$ fungují obě prostřední hodnoty x_ℓ i $x_{\ell+1}$.
3. Uvažuj dvě protínající se úsečky a najdi jiné párování, které součet délek těchto dvou úseček zmenší.
5. Zkus najít nějaká dvě slova, která jsou od sebe faakt daleko. Jak daleko od nich může být náš chameleon?

Řešení cvičení

1. Mělo by to být vidět z toho, že musíme ujít nějakou vzdálenost horizontálně a nějakou vertikálně, a je jedno, v jakém pořadí je ujdeme. Trochu formálněji se dá říct, že vertikální složky kavárny a knihovny se liší o nějaké y , horizontální složky se liší o nějaké x . No a postačující podmínka je, že se všechny svislé úseky počítají na y a horizontální na x (ve vertikálním směru je potřeba ujít přesně y a v horizontálním přesně x a každá orientace úseku přispívá jen do jedné z těchto dvou složek). Délka cesty je však součet délek úseků, tedy $x + y$, což není závislé na zvolené cestě.

2. Pokud se body x, y shodují, pak speciálně $x_1 = y_1$, takže měříme vzorečkem $\rho(x, y) = |y_2 - x_2|$, který se rovná nule, neboť $x_2 = y_2$. Pokud naopak $\rho(x, y) = 0$ pro nějaké body x, y , pak buď tyto body mají shodnou první souřadnici (takže jsme měřili vzorečkem $|y_2 - x_2|$, který je nulový, takže i $x_2 = y_2$), nebo jsme měřili vzorečkem $|x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2|$. V tomto druhém případě sčítáme tři nezáporná čísla a vychází nám nula, takže jednotlivé sčítance musí být nulové, tj. $x_2 = y_2 = 0$ a $x_1 = y_1$. V obou případech dostáváme $x = y$.

Oba zadané vzorečky metriky zřejmě splňují podmínku symetrie. Zbývá proto dokázat trojúhelníkovou nerovnost.

Mějme tři body x, y, z . Pokud všechny tři body mají shodnou první souřadnici, pak podmínka

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

je vlastně trojúhelníková nerovnost pro absolutní hodnotu

$$|z_2 - x_2| \leq |y_2 - x_2| + |z_2 - y_2|,$$

o které víme, že platí.

Pokud $x_1 = y_1 \neq z_1$, pak

$$\rho(x, z) = |x_2| + |z_1 - x_1| + |z_2| \leq |x_2 - y_2| + |y_2| + |z_1 - y_1| + |z_2| = \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

kde jsme zase využili trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu. Podobně se postupuje v případech $x_1 \neq y_1 = z_1$ a $x_1 \neq z_1 = y_1$.

Nakonec pokud mají všechny body různou první souřadnici, pak

$$\rho(x, z) = |x_2| + |z_1 - x_1| + |z_2| \leq |x_2| + |z_1 - y_1| + |y_1 - x_1| + |z_2|,$$

a pokud pravou stranu ještě navýšíme o $2|y_2|$, dostaneme opět trojúhelníkovou nerovnost pro ρ .

3. Uvědomíme si, že plošná odlišnost je vlastně obsah té části trojúhelníků, ve které se neprotínají. Vzdálenost trojúhelníku od sebe sama je pak zřejmě nula, a naopak odlišné trojúhelníky mají odlišnost kladnou. Vzoreček je symetricky zadaný, takže plošná odlišnost je symetrická. Pro ověření trojúhelníkové nerovnosti označme S_A, S_B, S_C postupně obsahy trojúhelníků A, B, C a ještě označme $S_{A \cap B}, S_{B \cap C}, S_{C \cap A}$ a $S_{A \cap B \cap C}$ obsahy postupně průniku A a B , průniku B a C , průniku C a A a nakonec průniku všech tří trojúhelníků A, B, C . Plošná odlišnost A od C je $S_A + S_C - 2S_{A \cap C}$, zatímco součet plošné odlišnosti A od B a odlišnosti B od C je

$$(S_A + S_B - 2S_{A \cap B}) + (S_B + S_C - 2S_{B \cap C}) = S_A + S_C + 2(S_B - S_{A \cap B} - S_{B \cap C}).$$

Ukážeme, že pokud od tohoto součtu odlišností A od B a B od C odečteme plošnou odlišnost A od C , dostaneme nezáporné číslo. Tím bude trojúhelníková nerovnost dokázána. Tento rozdíl, který označíme jako d , je

$$d = S_A + S_C + 2(S_B - S_{A \cap B} - S_{B \cap C}) - (S_A + S_C - 2S_{A \cap C}) = 2(S_{A \cap C} + S_B - S_{A \cap B} - S_{B \cap C}).$$

Z obrázku (v němž P je průnik všech tří trojúhelníků) si můžeme rozmyslet, že

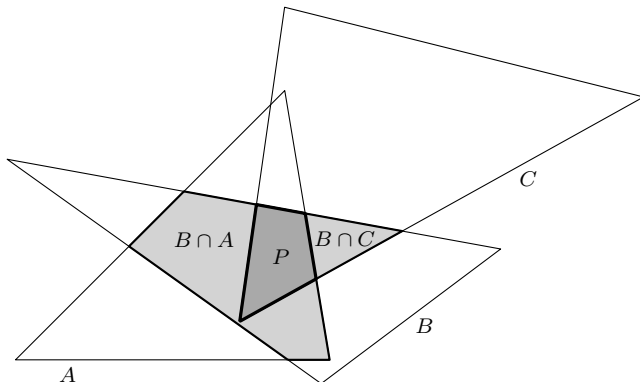
$$S_{B \cap A} + S_{B \cap C} - S_{A \cap B \cap C} \leq S_B,$$

protože levá strana je přesně obsah té části trojúhelníku B , která se protíná s A nebo s C (odčítat $S_{A \cap B \cap C}$ musíme, aby se tato část obsahu nezapočítala dvakrát).

Díky této nerovnosti máme

$$\frac{d}{2} = S_{A \cap C} + S_B - S_{A \cap B} - S_{B \cap C} \geq S_{A \cap C} - S_{A \cap B \cap C}.$$

Ale průnik A s C jistě obsahuje průnik všech tří trojúhelníků, takže má také větší obsah a platí $S_{A \cap C} \geq S_{A \cap B \cap C}$. Odtud již $\frac{d}{2} \geq 0$, takže i $d \geq 0$ a trojúhelníková nerovnost platí.



4. (1) Předpokládejme, že ρ je skoro stejná jako σ . Pak přenásobením převrácenými hodnotami c-ček dostáváme $\frac{1}{C}\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \frac{1}{c}\rho(x, y)$, což znamená, že i σ je skoro stejná jako ρ .

(2) Pokud je ρ menší než konstanta krát σ , které je zase menší než jiná konstanta krát τ , pak je ρ menší než součin těchto konstant. Na druhou stranu to funguje obdobně.

(3) Euklidovská vzdálenost je vždy větší nebo rovna maximové vzdálenosti, protože popisuje délku úsečky a ta je delší než libovolná její podsložka. Zároveň je menší nebo stejná jako $\sqrt{2}$ -násobek maximové metriky. Dá se to i spočítat explicitně, ale můžeme si to rozmyslet tak, že pokud prodloužíme kratší složku tak, aby nyní byly obě stejné dlouhé, maximová vzdálenost se zachová a euklidovská vzdálenost se zvětší na $\sqrt{2}x^2$, což je $\sqrt{2}x$, tedy se budou rovnat. A manhattanská vzdálenost je zjevně větší než maximová, protože součet je větší než maximum, a zároveň menší než dvojnásobek maximové, protože součet dvou čísel je menší než když sečteme to největší z nich samo se sebou. Ukázali jsme tak, že manhattanská vzdálenost je skoro stejná jako maximová, která je skoro stejná jako euklidovská vzdálenost, tedy všechny jsou skoro stejné.

6. Vezměme si nějaký bod na úsečce a ukážeme, že není vnitřní. Kdyby byl bod vnitřní, existovala by otevřená koule se středem v jeho středu, která by byla celá obsažena v úsečce. Již nyní ale vidíme, že tomu tak zjevně není. Nechtě tato koule má poloměr r . Pak na kolmici na naší úsečce procházející vybraným bodem určité existuje nějaký bod ve vzdálenosti $\frac{1}{2}r$ od našeho bodu, který ale nenáleží naší úsečce. To je spor s tím, že je celá tato otevřená koule obsažena v úsečce.

7. Nechtě x je nějaký bod z konečného průniku. Chceme najít kuličku se středem v x , která celá leží v průniku. Protože je průnik prvkem všech G_i a protože jsou všechny otevřené, pro každou z nich najdeme poloměr r_i , že kulička $U_{r_i}(x)$ je obsažena v G_i . Pokud si nyní vezmeme $r = \min_i r_i$, kulička $U_r(x)$ se vejde do všech ostatních kuliček, a tedy je obsažena v každé G_i , tedy i v průniku. Průnik je tedy otevřený.

V případě nekonečného průniku se nám nemusí v předchozím důkazu podařit najít kladné minimum nekonečna poloměrů. Příkladem je nekonečný systém postupně se zmenšujících otevřených intervalů

$$\mathcal{G} = \left\{ \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

v $\mathbb{R}$ se standardní metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$. Jednotlivé prvky $\mathcal{G}$ jsou otevřené množiny, ale průnik tohoto systému je $\bigcap \mathcal{G} = \{0\}$, což není otevřená množina.

10. Zřejmě je pravá strana podmnožinou levé strany, takže stačí ukázat, že to platí i naopak. Buď x nějaký bod z A . Tento bod samozřejmě také leží v celém prostoru M , pro který máme ze cvičení 9 rozklad

$$M = \text{Int } A \cup \text{Int}(A^c) \cup \partial A.$$

Protože ale x leží v A , určitě nemůže ležet v $\text{Int}(A^c) \subseteq A^c$. Tedy buď x leží ve vnitřku A (a pak jsme hotovi), nebo už musí ležet na hranici A . Ale zároveň předpokládáme $x \in A$, takže pak $x \in A \cap \partial A$, takže i v tomto případě x leží v množině na pravé straně dokazované rovnosti.

11. Uzavřené množiny obsahují svoji hranici. Chceme tedy dokázat, že $\bar{A}$ obsahuje svoji hranici. Ukážeme, že každý bod na hranici $\bar{A}$ je i na hranici původní množiny A . Pak totiž bude z definice ležet v $\bar{A}$. Nechť tedy nějaký takový bod x leží na hranici $\bar{A}$. Mějme nějakou kouli $U_r(x)$ pro nějaké $r > 0$. Chceme dokázat, že jak A , tak doplněk A , mají neprázdný průnik s touto koulí. Pro doplněk A to máme hned, protože to je nadmnožina doplňku $\bar{A}$, a pro něj víme, že x leží na jeho hranici. Nyní z definice uzávěru buď x leží v $\bar{A}$, nebo na hranici $\bar{A}$. V obou případech máme, že v koulí se středem x o polovičním poloměru $q = \frac{r}{2}$ leží nějaký bod $x_2 \in \bar{A}$. A protože x_2 leží v $\bar{A}$, máme opět z definice uzávěru, že buď leží v A , nebo na hranici A . V prvním případě jsme vyhráli hned (našli jsme bod z A blízky x , tedy x leží na hranici A a je tedy součástí $\bar{A}$), v opačném z definice hranice existuje nějaký bod $x_3 \in A$, že $x_3 \in U_q(x_2)$. A jaká je vzdálenost x_3 od x ? Z trojúhelníkové nerovnosti je to nejvýše $q + q = r$. To jsme chtěli dokázat. Lze si to představit tak, že hranice není od A nijak vzdálena, a tedy jejím přidáním žádná nová hranice nevznikne.

12. Uzavřená množina obsahuje celou svoji hranici, otevřená množina neobsahuje nic ze svoji hranice. Avšak ze symetrie definice hranice jsou hranice F a F^c stejné. Protože množina a její doplněk dávají dohromady celý prostor, je odtud vidět dualita těchto dvou typů množin.

13. Pokud $x \in (\bar{A})^c$, pak x neleží v $\bar{A}$, takže neleží ani v A , ani v ∂A . Z rozkladu ze cvičení 9

$$M = \text{Int } A \cup \text{Int}(A^c) \cup \partial A$$

musí x ležet vně A , tj. v $\text{Int}(A^c)$. Pokud naopak $x \in \text{Int}(A^c)$, pak z toho samého rozkladu (v němž mají všechny tři množiny po dvou prázdný průnik, tj. každý bod M leží v právě jedné z těchto množin) už nemůže x ležet ani v $\text{Int } A$, ani v ∂A . V tom případě ale ani x neleží v uzávěru A , tj. $x \in (\bar{A})^c$.

14. Uvažujme úplně všechny otevřené koule, které jsou podmnožinami G , a tyto si nějak opíšeme – budeme je nazývat $U_{r(\alpha)}(a_\alpha)$ – tedy vždy pro každé $\alpha \in I$ je $U_{r(\alpha)}(a_\alpha) \subseteq G$, a zároveň jsme žádnou takovou otevřenou koulí nevynechali. Potřebujeme ukázat, že sjednocení těchto koulí nám dá opravdu G .

Předně protože každá z těchto koulí je podmnožinou G , musí i jejich sjednocení být podmnožinou G – pokud máme $x \in \bigcup U_{r(\alpha)}(a_\alpha)$, pak x leží v nějaké konkrétní kuličce $U_{r(\beta)}(a_\beta)$, ta je ale podmnožinou G , a tedy $x \in G$. Nyní naopak ukážeme, že $G \subseteq \bigcup U_{r(\alpha)}(a_\alpha)$. Nechť je $x \in G$ libovolné. Protože G je otevřená, lze najít poloměr $r > 0$ takový, že $U_r(x) \subseteq G$. Tato kulička ale musí být někde mezi našimi kuličkami $U_{r(\alpha)}(a_\alpha)$, protože jsme žádnou nevynechali! Tedy $x \in U_r(x) \subseteq \bigcup U_{r(\alpha)}(a_\alpha)$, z čehož plyne, že G je podmnožinou sjednocení těchto kuliček.

15. Nechť je $\varepsilon > 0$ libovolné. Z řešeného příkladu víme, že lze najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ již platí $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Tedy také pro každý index $n \geq n_0$ je

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Z definice limity to znamená, že $\lim x_n = x$.

16. Můžeme postupovat z definice, nebo využít cvičení 15 a toho, že pro každé přirozené n platí

$$\rho\left(\frac{1}{2^n}, 0\right) = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

17. Musí být od určitého indexu již konstantní, tj. posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ má v takovém prostoru limitu x právě tehdy, když od nějakého indexu n_0 již pro všechny $n \geq n_0$ je $x_n = x$. To plyne z toho, že pokud zvolíme $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pak je kulička se středem v x a poloměrem ε v diskrétní metrice

dost malinkatá: $U_\varepsilon(x) = \{x\}$. Aby tedy od nějakého indexu již vždy x_n ležela v této kuličce, musí od tohoto indexu se již všechny x_n rovnat x .

18. Řešení je dost podobné minulému příkladu. Pokud máme bod x z $\bar{A}$, pak buď leží uvnitř A a k takovému se dá dokonvergovat pomocí konstantní posloupnosti $(x, x, x, \dots)$, nebo x leží na hranici A , a pak se k němu dá dokonvergovat body z A úplně stejně jako v posledním odstavci předchozího příkladu volením $x_n \in U_{1/n}(x) \cap A$. Naopak, pokud x je limitou nějaké posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ bodů z A , pak stejně jako v minulém příkladě nemůže ležet v $\text{Int}(A^c)$, takže leží buď v A , nebo v ∂A , ale v obou případech tedy leží v $\bar{A} = A \cup \partial A$.

20. Funguje například $\mathbb{R}$ se standardní metrikou.

21. Sestroj ho! Metrika na grafu může dobře posloužit. Kreativité se meze nekladou. Uměl bys zařadit, aby tyto kružnice měly nekonečno bodů?

23. Označme takovou „pозměněnou eukleidovskou metrikou“ jako $f(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$. Pak například pro body $x = (0, 0)$, $y = (1, 1)$ a $z = (2, 2)$ neplatí trojúhelníková nerovnost, neboť $f(x, z) = 8 > 2 + 2 = f(x, y) + f(y, z)$.

24. Třeba metrika na grafech.

27. Dokážeme, že $\lim \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$. Nejdříve si dokážeme pomocnou nerovnost

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n).$$

Z trojúhelníkové nerovnosti máme postupně

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y),$$

takže $\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n) \leq \rho(x, x_n) + \rho(y_n, y)$. Obdobným použitím trojúhelníkové nerovnosti na $\rho(x_n, y_n)$ můžeme ukázat $\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n)$. Dohromady tyto dvě nerovnosti dávají

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n).$$

Tím už máme vlastně vyhráno, neboť pravá strana konverguje k nule. Ukažme si to z definice: Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Protože $\lim x_n = x$, nalezneme index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že pro $n \geq n_1$ je $\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ (proč hledáme n_1 k polovině ε místo k ε se ukáže za chvíli). Obdobně nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$, aby pro $n \geq n_2$ bylo $\rho(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nyní zvolme za n_0 to větší z čísel n_1, n_2 . Pak pro každé $n \geq n_0$ budou platit oba odhady současně, a tedy v kombinaci s pomocnou nerovností máme

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ke každému $\varepsilon > 0$ jsme tedy schopni nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$, aby pro všechna $n \geq n_0$ bylo $|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| < \varepsilon$, takže $\lim \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$.