

# Metrické prostory 1 – Hranaté kuličky

Milý příteli,

právě čteš první řádky nového seriálu PraSátka, v němž se Ti již brzy otevře svět pravítek, úhloměrů, plánovačů spojů MHD a všemožných dalších měřicích nástrojů! Ovšem, budeme se o měření bavit hlavně matematicky, takže se nemusíš bát, že bychom Tě hned poslali ven určovat astrolábem deklinaci Jitřenky. V tomto prvním dílu seriálu se zamyslíme nad tím, co že to takové měření vlastně je (neboť měřit se dá leccos), a zavedeme matematicky přesně takzvanou *metriku*. Pomocí ní vyjasníme, co to znamená být „uvnitř“, „vně“ nebo „na hranici“ něčeho. No a ke konci tohoto dílu dojdeme až někam za horizont do nekonečna ...

S tématem tohoto seriálu se ve středoškolských hodinách matematiky spíš nepotkáš, o to víc doufáme, že by se Ti exkurze do hezké a trochu jiné matematiky mohla líbit.

Letos Tě metrickým labyrintem provedou Vítek Hanika a Matěj Gajdoš, na jejichž mailové schránky [vít.hanika@gmail.com](mailto:vít.hanika@gmail.com) a [gajdos.matej@yahoo.com](mailto:gajdos.matej@yahoo.com) se neváhej obrátit, máš-li jakoukoliv otázku nebo podnět k diskuzi. Veselé měření!

## Jak číst seriál

V seriálu rozlišujeme mezi *příklady*, *cvičeními* a *úlohami*. *Příklady* jsou řešené přímo v textu a snaží se Tě seznámit s tím, jak se v seriálu typicky argumentuje.

Sám (sama) si to pak můžeš vyzkoušet ve *cvičeních*, která typicky ukazují některé vlastnosti, které nám přijdou důležité, ale přitom rozumně jednoduché. Řešením cvičení si dobře ověříš, že rozumíš, co jednotlivé definice znamenají. Na druhou stranu jich je relativně hodně a občas nejsou moc kreativní, takže ani nepředpokládáme, že bys je řešil(a) všechny.

Nakonec tu je několik málo *úloh*, které mají víc olympiádní nádech, ale přitom volně souvisí s tímto seriálem.

Cvičení a úlohy najdeš v průběhu textu, ale také v samostatné kapitole na konci seriálu. Za tou se pak ještě dají najít nápovědy a řešení k některým úlohám a cvičením.

Nakonec místy můžeš narazit na text v rámečku. Jedná se hlavně o dodatečná, pro nás zajímavá povídání, která ale pro čtení a pochopení seriálu nejsou tak důležitá, takže se je neboj úplně přeskakovat nebo se k nim vracet až později.

## Měříme

V životě se setkáváme se všemožnými vzdálenostmi, ale co to vlastně taková vzdálenost je? Zkusme se teď nad tím na několika příkladech zamyslet a zjistíme, že měřit se dá leccos a od vzdálenosti vlastně očekáváme jen několik málo intuitivních vlastností, jako že třeba nebudou záporné. Těmito vlastnostmi se dostaneme k pojmu *metriky*, se kterým se budeme kamarádit zbytek seriálu. Za chvíli si metriku zdefinujeme, ale podívejme se nejdříve na několik Tobě známých i třeba méně

známých příkladů, v nichž měření vzdáleností a metrika někde v pozadí figuruje.

Začneme nejpřirozeněji, geometricky. Mějme rovinu a v ní body  $X = (x_1, x_2)$  a  $Y = (y_1, y_2)$ . Pak můžeme hovořit o *vzdálenosti* těchto bodů – například ji můžeme fyzicky změřit pravítkem se stupnicí nebo analyticky spočítat pomocí Pythagorovy věty jako

$$|XY| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

I bez pravítka a souřadného systému můžeme uvažovat o vzdálenostech – pro body  $S, X, Y$  můžeme posuzovat, zda je  $S$  blíž k  $X$  než k  $Y$  nebo jestli jsou obě vzdálenosti stejné. Můžeme definovat *kružnici* jako množinu těch bodů roviny, které mají k  $S$  stejnou vzdálenost  $r > 0$ :

$$k_r(S) = \{Z \mid |SZ| = r\},$$

případně *kruh* jako ty body, které jsou od  $S$  vzdáleny nejvýše  $r$ :

$$B_r(S) = \{Z \mid |SZ| \leq r\}.$$

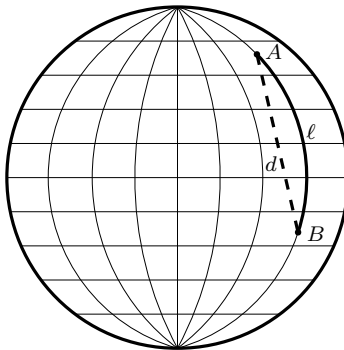
Podobně ke dvěma různým bodům  $X, Y$  můžeme hledat množinu takových bodů, které jsou k  $X$  i k  $Y$  stejně daleko:

$$o_{XY} = \{Z \mid |ZX| = |ZY|\}.$$

To je, jak jistě víš, přesně *osa úsečky*  $XY$ .

Dost podobně můžeme se vzdálenostmi pracovat v prostoru. Pythagorova věta bude mít pod odmocninou součet tří členů, množina  $k_r(S)$  bude *kulovou plochou* (*sférou*) se středem  $S$  a poloměrem  $r$ , z kruhu  $B_r(S)$  se stane koule a množina  $o_{XY}$  bude rovina procházející středem  $XY$  kolmá k úsečce  $XY$ .

V obou případech jsme vzdálenosti geometrických bodů „měřili pomocí úseček“ jakožto nejkratších spojnic těchto bodů. Co když se ale nemůžeme pohybovat po takových úsečkách? Například úsečka spojující Prahu a Tokyo bude procházet vnitřkem Země (odpovídá délce  $d$  na obrázku); je to sice validní způsob měření jejich vzdálenosti, ale v některých případech ne zrovna užitečný. Lepším způsobem by mohlo být najít nejkratší křivku spojující tato dvě města, která ale navíc *celá leží na zemském povrchu*, něco jako délka  $\ell$  na obrázku. Nemusí být hned jasné, jak by taková křivka měla vypadat a jestli vůbec existuje, nicméně pokud ano, pak by bylo přirozené měřit vzdálenosti na Zemi takto.<sup>1</sup>



<sup>1</sup>Na sféře jsou takové nejkratší křivky pěkné a vychované – pokud máme na sféře se středem  $S$  body  $A$  a  $B$ , pak stačí zkonstruovat kružnici se středem  $S$  procházející body  $A$  a  $B$ . Nejkratší křivka spojující  $A$  a  $B$  a ležící na dané sféře je pak kratší z oblouků  $AB$  na této kružnici.

Místo „vzdáleností“ jsme v předchozích příkladech mohli také psát „blízkost“ nebo (s trochou představivosti) „odlišnost“. „Odlišnost“ je dobré slovíčko, protože se dá použít pro všemožné objekty, kdežto „vzdálenost“ zní přeci jen hlavně geometricky.

Tak například můžeme „měřit“ odlišnost slov, řekněme pětípísmenných, podle počtu písmen, ve kterých se liší. Třeba PRASE a SÉRIE se shodují jen v pátém písmeni, takže bychom mohli říct, že tato slova mají „vzdálenost“ 4. Naopak SÉPIE má od SÉRIE vzdálenost 1. Ani tentokrát nám nic nebrání definovat „kruh“ se středem VÍTEK o poloměru 1 jako množinu těch pětípísmenných slov, které se od slova VÍTEK liší na nejvýše jedné pozici. V té by pak například ležela slova VÍTEJ, SÍTEK a QÍTEK, ale už ne třeba JOLČA nebo MIŠKO.

Možná Ti připadá pohlížení na slova (obecněji textové zprávy) jako na nějaké středy kruhů příliš abstraktní nebo krkolomé. Tento pohled se však velmi hodí například pro kódování. Představ si, že pošláš zprávu nějakým nespolehlivým kanálem (tedy kanálem, ve kterém se zprávy vlivem šumu můžou pozměnit). Pošleš textovou zprávu, ta projde nějakou maličkou změnou (řekněme, že se náhodně změní až 3 znaky, tedy text bude ležet v kruhu o poloměru 3 se středem v původní zprávě), a příjemce ji poté musí umět správně „dekódovat“, tedy zjistit, jak vypadala zpráva před změnou. To ale znamená pouze určit, ve kterém kruhu o poloměru tři tato pozměněná zpráva leží, původní zpráva je pak prostě středem tohoto kruhu. Odesílatel a příjemce si tedy předem dohodnou množinu zpráv, které se budou posílat, a to tak, aby, pokud si kolem každé z nich uděláme kruh s poloměrem 3, se tyto kruhy „nepřekrývaly“. Kdyby totiž nějaká zpráva ležela ve dvou kruzích naráz, tak by nebylo jasné, který střed zvolit jako původní zprávu. Potom ať je zpráva pozměněna jakkoliv, bude z ní poznat, ve kterém kruhu leží, a tedy jak vypadala původní zpráva. Zajímavým problémem je tedy vyskládat do prostoru všech textových řetězců délky  $n$  co nejvíce takovýchto kruhů tak, aby se nepřekrývaly. Tím se v tomto textu zabývat nebudeme, jen řekneme, že na tomto principu fungují například QR kódy.<sup>2</sup>

Všechny tyto příklady spojuje snaha kvantifikovat „vzdálenosti“ a „odlišnosti“ nějakých objektů, které ale přitom můžou být dost různorodé. Přesně k tomu nám poslouží abstraktní koncept metriky, který matematicky vyjadřuje, co od „odlišnosti objektů“ přirozeně očekáváme, ať už jsou dané objekty jakékoliv. Síla této abstrakce je v tom, že nám umožňuje pro negometrické objekty (jako třeba slova) definovat geometrické pojmy (jako třeba kruh se středem ve slově) a kreslit si obrázky.

## Abstraktní metrika

A teď už matematika.

**Definice.** Nechť  $M$  je množina. *Metrikou* na  $M$  rozumíme zobrazení  $\rho$ , které každé uspořádané dvojici bodů  $(x, y)$  z  $M$  přiřadí nezáporné reálné číslo  $\rho(x, y)$ , a které navíc splňuje následující podmínky (axiomy):

- (1) Pro  $x, y \in M$  nastane  $\rho(x, y) = 0$  právě tehdy, když  $x = y$ .
- (2) Pro každá  $x, y \in M$  platí  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ .
- (3) Pro každá  $x, y, z \in M$  platí  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Dvojici  $(M, \rho)$  pak nazýváme *metrickým prostorem*. O prvcích  $M$  typicky mluvíme jako o *bodech* daného metrického prostoru.

Podívejme se na to, co jednotlivé vlastnosti říkají. Především vzdálenost libovolných dvou bodů je nezáporná. Axiom (1) pak říká, že různé body jsou od sebe vždy nějak nenulově daleko, kdežto vzdálenost libovolného bodu od „sebe sama“ je vždy nula.

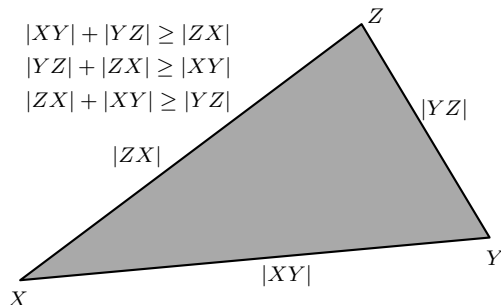
Axiom (2) se nazývá *symetrie* metriky. Říká, že nezáleží na pořadí, v jakém dané dva body měříme. Vzdálenosti měřené pravitkem takovou vlastnost jistě splňují. Někdy ale v životě dává smysl uvažovat i nesymetrické „měření vzdáleností“ – například místo kilometrů na PraSečím

---

<sup>2</sup>Pokud tě to zaujalo, více se o kódech můžeš dozvědět zde: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Samoopravný\\_kód](https://cs.wikipedia.org/wiki/Samoopravný_kód)

výletě můžeš měřit dobu, za kterou výlet ujdeš; přitom ale docela záleží, jestli trasa vede z údolí na vrchol kopce, nebo naopak.<sup>3</sup>

Axiom (3) popisuje takzvanou *trojúhelníkovou nerovnost*. Intuitivně říká, že přímá vzdálenost mezi dvěma body  $x, z$  by neměla být větší než vzdálenost vzata „oklikou“ přes nějaký třetí bod  $y$ . S jednou verzí trojúhelníkové nerovnosti ses již nejspíš během svého studia setkal(a): Pokud  $XYZ$  je trojúhelník v rovině, pak musí součet každých dvou délek stran být větší nebo roven délce poslední strany, tedy např. musí  $|XY| + |YZ| \geq |ZX|$ . Proto ne každá trojice čísel-délek určuje trojúhelník – například trojúhelník o stranách  $|XY| = 2$ ,  $|YZ| = 7$ ,  $|ZX| = 1$  neexistuje, neboť  $|ZX| + |XY| < |YZ|$ , což odporuje trojúhelníkové nerovnosti (dostat se z  $Y$  do  $Z$  je kratší oklikou přes bod  $X$  než příomou úsečkou  $YZ$ ).



## Příklady metrik

Možná jsi teď nešťastný (nešťastná) z abstraktní definice metriky. Ale nezoufej, přesně proto se teď podíváme na spoustu konkrétních příkladů metrických prostorů. Je užitečné alespoň některé z nich mít v paměti a po ruce při řešení cvičení a úloh, neboť někdy to, co se může zdát intuitivně jako pravdivé v jednom metrickém prostoru, vůbec nemusí v jiném platit.

Vraťme se nejdříve na začátek seriálu k našemu asi nepřirozenějšímu chápání vzdáleností bodů v rovině. Body v rovině budeme většinou chápat „souřadnicově“, tj. bod roviny  $X$  bude mít nějaké dvě souřadnice,  $X = (x_1, x_2)$ , kde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Typicky pak to, že bod náleží rovině, píšeme jako  $X \in \mathbb{R}^2$ , což znamená, že je to vlastně uspořádaná dvojice reálných čísel. Obdobně to, že  $X$  je bod prostoru, bychom zapsali jako  $X \in \mathbb{R}^3$ , protože takový bod má tři souřadnice.

**Definice.** Necht  $X, Y$  jsou body v rovině. Pak *eukleidovskou vzdálenost* bodů  $X, Y$  definujeme jako

$$\rho_2(X, Y) = |XY|.$$

Tedy pokud mají body  $X, Y$  souřadnice

$$X = (x_1, x_2), \quad Y = (y_1, y_2),$$

pak podle Pythagorovy věty

$$\rho_2(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

**Příklad.** Dokaž, že  $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$  je metrickým prostorem.

<sup>3</sup>Zobrazení  $\rho$  nesplňující axiom symetrie proto také mají jméno a má smysl je studovat, nicméně v seriálu se budeme věnovat hlavně standardním metrikám.

*Řešení.* Předně musíme zkontrolovat, že oborem hodnot  $\rho_2$  jsou nezáporná čísla. Odmocnina nezáporného čísla ale je vždy nezáporná, takže to platí. Dále ověříme zbylé axiomy:

- (1) Pro bod  $X$  jistě platí  $\rho_2(X, X) = 0$ . Pokud naopak  $\rho_2(X, Y) = 0$  pro nějaké body

$$X = (x_1, x_2), \quad Y = (y_1, y_2),$$

pak z definice této metriky musí platit

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = 0,$$

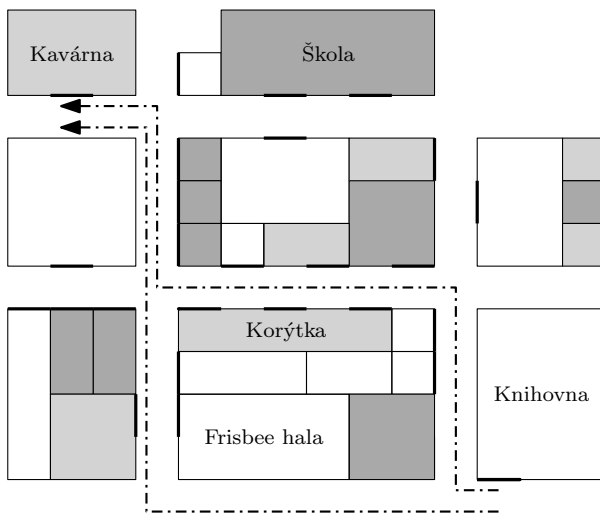
z čehož plyne  $x_1 = y_1$  a  $x_2 = y_2$  (každý ze sčítaných čtverců je nezáporný, takže aby se sečetly na nulu, musí oba čtverce být nulové). To ale znamená  $X = Y$ .

- (2) Symetrie plyne z toho, že pro reálná  $x, y \in \mathbb{R}$  platí  $(x - y)^2 = (y - x)^2$ .  
 (3) Pro platnost trojúhelníkové nerovnosti v tomto případě opravdu můžeme důvěřovat geometrickému náhledu, neboť jde vážně o délky stran trojúhelníku. Nicméně lze nerovnost ověřit i čistě algebraickým výpočtem.

V rovině nějakou dobu ještě zůstaneme, protože eukleidovská vzdálenost není jedinou metrikou, která na rovině existuje. Dokonce v některých případech může být přirozenější měřit vzdálenosti jinak.

**Pohádka.** Před sto lety obyvatelé PraSestánu založili nové město PraSdubice. Protože při územním plánování nebyli moc kreativní, nakoncipovali mapu města tak, že všechny ulice míří buď ze severu na jih, nebo z východu na západ, takže každé dvě ulice jsou buď rovnoběžné, nebo na sebe kolmé.

Jedna čtvrt PraSdubice je schématicky znázorněna na obrázku. Jak měřit v tomto městě vzdálenosti? Eukleidovská vzdálenost v tomto případě udává vzdálenost „vzdušnou čarou“. Pro praktický přesun po městě je ale potřeba respektovat existenci zdí a chodit jen po „vodorovných“, respektive „vertikálních“ ulicích. A délky těchto prošlých částí ulic přesně budeme měřit a nasčítávat.



**Cvičení 1.** Rozmysli si, že v obrázku pro přesun z knihovny do kavárny nezáleží z hlediska celkové nachozené vzdálenosti na konkrétní zvolené cestě, dokud se při přesunu pohybuješ vždy jen doleva/nahoru. Dále si rozmysli, že toto platí pro jakékoliv dva body.

Pokud ses zamyslel(a) nad předchozím cvičením, pak by Ti měla připadat následující definice přirozená – prostě za konkrétní trasu zvolíš takovou, která nejdřív jde jen co nejvíc doleva (nebo doprava), a pak zbytek cesty jde nahorů (nebo dolů).

**Definice.** Mějme v rovině dva body  $X, Y$  o souřadnicích

$$X = (x_1, x_2), \quad Y = (y_1, y_2).$$

Pak *manhattanskou* (nebo také *newyorskou/taxikářskou*) *vzdáleností*  $X$  a  $Y$  rozumíme

$$\rho_1(X, Y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|.$$

Manhattanská metrika se tak jmenuje proto, že ulice v Manhattanu podobně jako v Prašdubicích typicky tvoří pravouhlou mřížku, a můžeme se tam tedy pohybovat jen horizontálně a vertikálně. Body pak opravdu budou vzdáleny podle předpisu manhattanské metriky.

Možná Tě mate, že jsme první příklad metriky (eukleidovskou) označili jako  $\rho_2$  a druhý příklad metriky (manhattanskou) označili jako  $\rho_1$ . Důvod je ten, že obecněji pro libovolné  $p \geq 1$  lze na  $\mathbb{R}^2$  zavést takzvanou  $\ell_p$ -metriku jako

$$\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{|y_1 - x_1|^p + |y_2 - x_2|^p}.$$

Pro  $p = 1$  dostaneme manhattanskou metriku  $\rho_1$ , pro  $p = 2$  dostaneme eukleidovskou metriku  $\rho_2$ .

**Pohádka.** 3D tiskárna má dva nezávislé motůrky, přičemž první umí pohybovat hlavicí (při pohledu zeshora na tiskovou desku) doleva a doprava a druhý nahoru a dolů. Oba motůrky mají stejnou maximální rychlost. Chtěli bychom nějak přirozeně měřit dobu trvání přesunu hlavičky z jednoho bodu do bodu druhého.

Klíčové je, že oba motůrky můžou běžet současně. Kdyby mohl vždy běžet jen jeden, bylo by přirozené měřit dobu přesunu manhattanskou metrikou  $\rho_1$  – pro přesun z bodu  $X = (0, 0)$  do bodu  $Y = (4, 4)$  by nejdřív první motůrek přesunul hlavicí do  $(4, 0)$ , a pak druhý motůrek odtud do  $(4, 4)$ , takže „vzdálenost“ by byla 8 (nebo by se střídaly jinak – víme, že je to jedno, dokud oba posouvají hlavicí správným směrem). Pokud ale oba motůrky poběží současně, zvládnou se z  $X$  do  $Y$  dostat rychleji a „vzdálenost“ bude 4. Co kdybychom se z  $X = (0, 0)$  chtěli přesunout do  $Z = (4, 2)$ ? V eukleidovské i manhattanské metrice je  $Z$  zřejmě k  $X$  blíže než byl bod  $Y$  k  $X$ . V naší nové metrice tomu tak ale není – sice jsou teď  $X$  a  $Z$  „blíže ve druhé souřadnici“, ale první motůrek se pořád potřebuje dostat z 0 do 4, takže celková „vzdálenost“ bude 4 a půlku času druhý motůrek nebude pracovat.

Vlastně se chceme dívat na ten motůrek, který musí vykonat více práce, tj. na složku bodů  $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ , ve které se body nejvíce liší.

**Definice.** Mějme v rovině dva body  $X, Y$  o souřadnicích

$$X = (x_1, x_2), \quad Y = (y_1, y_2).$$

Pak *maximovou vzdáleností*  $X$  a  $Y$  rozumíme

$$\rho_\infty(X, Y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}.$$

Asi si dokážeš představit, že předešlé metriky nemusí být definované jen v rovině, ale můžeme je zavést třeba i v prostoru nebo obecně na množině  $\mathbb{R}^n$  všech uspořádaných  $n$ -tic  $(x_1, \dots, x_n)$  reálných čísel. Speciálně na reálné přímce nám všechny tři metriky z předchozích příkladů  $\rho_1, \rho_2$  a  $\rho_\infty$  (tedy

manhattanská, eukleidovská a maximová) splynou do absolutní hodnoty  $\rho(x, y) = |x - y|$ . To samo o sobě ukazuje, že se jedná o metriku (je to jako měřit v  $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$  body tvaru  $(x, 0)$ , tj. jen ty na  $x$ -ové ose), ale dokažme si to i bez využití metrik v rovině:

**Příklad.** Pro  $x, y$  reálná definujme  $\rho(x, y) = |x - y|$ . Dokaž, že  $(\mathbb{R}, \rho)$  tvoří metrický prostor.

*Řešení.* Absolutní hodnota je vždy nezáporná. Navíc je nulová pouze v nule, takže z  $\rho(x, y) = 0$  plyne  $x - y = 0$ , tj.  $x = y$ . Symetrie  $\rho$  také zřejmě platí, neboť  $|x - y| = |-(y - x)| = |y - x|$  (absolutní hodnota například čísel  $-5$  a  $5$  je stejná). I s trojúhelníkovou nerovností si snadno poradíme. Buďte  $x, y$  a  $z$  tři reálná čísla. Chceme dokázat

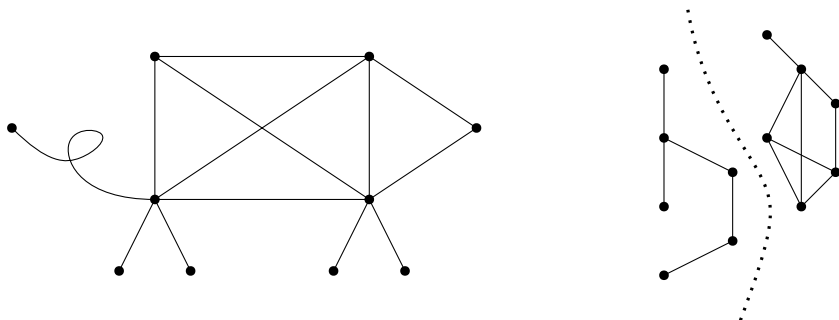
$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Pokud označíme  $a = x - y$ ,  $b = y - z$ , pak vlastně dokazujeme  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . Přitom pro každé reálné číslo  $\alpha$  platí  $\alpha \leq |\alpha|$  i  $-\alpha \leq |\alpha|$  – tak například v první nerovnosti buď  $\alpha$  je nezáporné, a pak  $\alpha = |\alpha|$ , nebo je  $\alpha$  záporné, a pak  $\alpha < 0 \leq |\alpha|$ .

To ale znamená, že  $a \leq |a|$  a  $b \leq |b|$ , v součtu  $a + b \leq |a| + |b|$ . Obdobně z nerovností  $-a \leq |a|$  a  $-b \leq |b|$  plyne  $-(a + b) \leq |a| + |b|$ . No a protože  $|a + b|$  je buď rovno  $a + b$ , nebo  $-(a + b)$  a obě hodnoty jsou nejvýše  $|a| + |b|$ , platí již  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

Možná Tě už měření geometrických vzdáleností bodů v rovině a na přímce začíná unavovat. Podívejme se na jiné přirozené objekty, na kterých měřit vzdálenost. Jedná se o *neorientované grafy*, ovšem nemyslíme grafy funkcí. O grafech si toho můžeš spoustu zajímavého přečíst v PraSečí knihovničce nebo třeba v seriálu 34. ročníku<sup>4</sup>. Grafům se v tomto seriálu víc věnovat nebudeme, ber následujících pár odstavců jako takovou odbočku k zajímavé metrice, která neměří body v rovině.

Pokud jsi se s grafem ještě nepotkal(a), můžeš si ho představovat velmi obrázkově jako nějaké puntíky (nazývané *vrcholy*) pospojované čarami (neboli *hranami*). Mezi dvěma vrcholy může vést nanejvýš jedna hrana. Hrana též nemůže tvořit smyčku, tj. spojovat jeden a ten samý vrchol. Dva příklady grafů vidíš na obrázku.



O grafu řekneme, že je *souvislý*, pokud se dá z libovolného vrcholu dostat do libovolného jiného vrcholu přesunem po hranách. Tedy první graf na obrázku souvislý je, zatímco druhý není, jak naznačuje tečkovaná křivka oddělující dvě nepojené části grafu. Tyto „přesuny po hranách“ lze formálněji chápat jako takzvané *sledy* – sled mezi vrcholy  $u$  a  $v$  je konečná posloupnost vrcholů  $(u = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v = v_n)$  splňující, že každé dva sousední vrcholy, tj.  $v_i$  a  $v_{i+1}$  pro  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , jsou spojené hranou. Tedy souvislé grafy jsou právě ty, ve kterých mezi každými dvěma vrcholy existuje nějaký sled.

<sup>4</sup><https://prase.cz/archive/34/uvod1s.pdf>

No a na souvislých grafech lze velmi přirozeně zavést metriku: Dvěma různým vrcholům grafu  $u, v$  přiřadíme jako  $\rho_{\text{graf}}(u, v)$  délku nějakého nejkratšího sledu, který je spojuje (délku ve smyslu počtu hran, tj. sled  $(v_1, v_2, v_3)$  má délku 2). Pokud  $u = v$ , definujeme  $\rho_{\text{graf}}(u, v) = 0$ .

**Příklad.** Nechť je dán souvislý graf. Dokaž, že  $\rho_{\text{graf}}$  tvoří metriku na jeho vrcholech.

*Řešení.* Zřejmě je pro každé dva vrcholy  $u, v$  číslo  $\rho_{\text{graf}}(u, v)$  nezáporné. Pokud  $u = v$ , pak přímo z definice  $\rho_{\text{graf}}(u, v) = 0$ . Naopak pro  $u \neq v$  musí každý sled spojující tyto dva vrcholy obsahovat alespoň jednu hranu, takže  $\rho_{\text{graf}}(u, v) \geq 1$ , a tedy  $\rho_{\text{graf}}(u, v) \neq 0$ .

Symetrie zřejmě taky platí – kdykoliv z  $u$  do  $v$  vede nějaký sled, pak (v podstatě) ten stejný sled vede z  $v$  do  $u$  (liší se jen pořadí, v jakém se přesouváme mezi vrcholy), takže toto platí i pro nejkratší sled.

Zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost. Nechť  $u, v$  a  $w$  jsou tři vrcholy grafu. Řekněme, že jsou vzájemně různé (pokud se některé dva vrcholy shodují, pak trojúhelníková nerovnost platí okamžitě). Myšlenka je velmi jednoduchá: Pokud se umíme v  $n = \rho_{\text{graf}}(u, v)$  přesunech dostat z  $u$  do  $v$  a v  $m = \rho_{\text{graf}}(v, w)$  přesunech dostat z  $v$  do  $w$ , pak na to, abychom se dostali z  $u$  do  $w$ , určitě stačí  $n + m$  přesunů, potenciálně i méně (jít přes  $v$  nemusí být nejrychlejší), takže

$$\rho_{\text{graf}}(u, w) \leq n + m = \rho_{\text{graf}}(u, v) + \rho_{\text{graf}}(v, w).$$

To už je vlastně důkaz, ale zapišme si to i v řeči sledů:

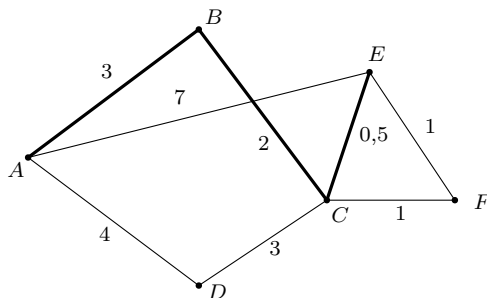
Buď  $(u, u_1, \dots, u_{n-1}, v)$  nějaký nejkratší sled spojující  $u$  a  $v$  a  $(v, v_1, \dots, v_{m-1}, w)$  nějaký nejkratší sled spojující  $v$  a  $w$ . Tedy první sled má délku  $\rho_{\text{graf}}(u, v)$  a druhý má zase délku  $\rho_{\text{graf}}(v, w)$ . Pak  $(u, u_1, \dots, u_{n-1}, v, v_1, \dots, v_{m-1}, w)$  je sled spojující  $u$  a  $w$  o délce  $\rho_{\text{graf}}(u, v) + \rho_{\text{graf}}(v, w)$ . Nejkratší sled spojující  $u$  a  $w$  může být potenciálně ještě kratší, ale určitě nebude delší než  $\rho_{\text{graf}}(u, v) + \rho_{\text{graf}}(v, w)$ , když má být nejkratší. Tedy  $\rho_{\text{graf}}(u, w) \leq \rho_{\text{graf}}(u, v) + \rho_{\text{graf}}(v, w)$ .

Grafovou vzdáleností lze například zjednodušeně modelovat, kteří lidé by se mohli znát na sociálních sítích. Každý uživatel je jeden vrchol grafu a mezi dvěma uživateli vede hrana právě tehdy, když se mají přidat na síti jako přátelé. Pokud se uživatel  $\alpha$  na síti nepřáteli s uživatelem  $\beta$ , je mezi nimi vzdálenost alespoň 2. Uživatel  $\alpha$  nemusí mít s  $\beta$  vážné vůbec nic společného, ale také mohou oba dva mít společného přítele  $\sigma$  – v prvním případě bude vzdálenost vrcholů  $\alpha$  a  $\beta$  spíš velká, ve druhém případě je jejich vzdálenost 2, a tedy se v principu možná znají (oba mají ve svém okolí  $\sigma$ ), jen se nepřáteli na této sociální síti. V tomto druhém případě tak může sociální síť vyhodnotit, že uživateli  $\alpha$  doporučí přátelství s  $\beta$ .

Grafová metrika se dá ještě trochu zobecnit. Doteď jsme vlastně uvažovali, že všechny hrany mají „délku“ 1. V praxi ale často potřebujeme, aby některé sousední vrcholy byly velmi blízko k sobě a některé naopak velmi daleko od sebe. Můžeme si tedy říct, že každé hraně přiřadíme její délku (nějaké kladné číslo). Délka sledu bude poté prostě součet délek jednotlivých hran, přes které sled prochází. Metrika bude stále dvěma vrcholům přiřazovat délku nejkratšího sledu, který začíná v jednom a končí v druhém. Všimni si, že původní grafová metrika je vlastně jen speciálním případem této nové metriky, pokud řekneme, že všechny hrany mají délku 1.

**Pohádka.** Jako dobrý příklad hran s délkami může sloužit železniční síť. Mezi některými městy v PraSestánu vedou železniční tratě. Každá trať má svoji délku a doba přesunu po jedné trati je přesně její délka. Jak dlouho pak trvá přesun mezi dvěma libovolnými městy? Pokud si představíme, že města jsou vrcholy grafu a hrany jsou jednotlivé železniční tratě, nejkratší trasa mezi městy PraSdubice a PraSín bude přesně délka nejkratšího sledu mezi vrcholy, které odpovídají PraSdubicím a PraSínu.





Například na obrázku je vzdálenost vrcholů  $A$  a  $E$  rovna  $3 + 2 + 0,5 = 5,5$  a nejkratší sled vede přes  $B$  a  $C$  místo „přímé trasy“ z  $A$  rovnou do  $E$ , protože ta má větší délku 7.

Na závěr uvedeme, že grafovou metriku můžeme mít i na grafech s nekonečným počtem vrcholů a hran, přičemž stále uvažujeme jen konečné sledy. Nebudeme je přímo zkoumat, ale mají zajímavé vlastnosti.

Velmi speciálním případem grafové vzdálenosti je takzvaná *diskrétní metrika* – na množině  $M$  vznikne tak, že  $M$  chápeme jako graf, ve kterém jsou úplně všechny vrcholy pospojované hranami (takovým grafům říkáme *úplné*). Pokud si představujeme, že je graf ohodnocený, všechny hrany budou mít délku 1.

**Definice.** Nechť  $M$  je neprázdná množina. Pak na ní definujeme *diskrétní metriku* tak, že dvěma prvkům  $x, y \in M$  přiřadíme číslo  $\rho_{\text{disk}}(x, y) = 1$ , pokud  $x \neq y$ , nebo  $\rho_{\text{disk}}(x, y) = 0$ , pokud  $x = y$ .

Diskrétní metrika je taková podivná, vlastně umí jen rozlišovat, jestli jsou dva body stejné nebo různé. Hodí se ve chvílích, kdy si chce člověk ověřit, jestli nějaké tvrzení o metrických prostorech platí nebo neplatí – některá tvrzeníčka vypadají třeba v rovině s eukleidovskou metrikou jako zřejmě pravdivá, ale pro obecnou metriku to tak nemusí být, a diskrétní metrika je dobrá metrika „dost odlišná od té eukleidovské“, na které toto testovat.

**Cvičení 2.** (metrika džunglové řeky) Pro dva body v rovině  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  definujeme

$$\rho(x, y) = |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2|,$$

pokud  $x_1 \neq y_1$ , a nebo  $\rho(x, y) = |y_2 - x_2|$ , pokud  $x_1 = y_1$ . Dokaž, že  $\rho$  tvoří metriku na  $\mathbb{R}^2$  (pohádkově si lze představovat, že ve směru první souřadnice teče řeka, a že nejrychlejší přesun mezi dvěma body  $x, y$  je nejdřív sejít po kolmici k řece, pak se přesunout po řece, a pak zase dojít po kolmici od řeky do cíle).

**Cvičení 3.** Pro dva nede degenerované trojúhelníky  $ABC$  a  $XYZ$  definujeme jejich *plošnou odlišnost* jako součet jejich obsahů minus dvojnásobek obsahu obrazce určeného jejich průnikem. Dokaž, že plošná odlišnost tvoří metriku na množině všech nede degenerovaných trojúhelníků v rovině.

**Úloha 1.** Pro dvě 2025-ciferná čísla  $a = \overline{a_1 \dots a_{2025}}$  a  $b = \overline{b_1 \dots b_{2025}}$  (psaná v desítkové soustavě) definujeme vzdálenost jako  $\frac{1}{10^k}$ , kde  $k$  je nejmenší číslo z  $1, \dots, 2025$  takové, že se  $a$  a  $b$  na  $k$ -té cifře liší (případně jako 0, pokud jsou obě čísla stejná). Mějme 1001 takových čísel. Dokaž, že mezi nimi existují dvě vzájemně různá čísla taková, že jejich vzdálenost je nejvýše 0,001. (Jako bonusové cvičení si můžeš rozmyslet, že tato vzdálenost je opravdu metrika).

**Cvičení 4.** Buďte  $\rho$  a  $\sigma$  dvě metriky na množině  $M$ . Řekneme, že  $\rho$  je *skoro stejná* jako  $\sigma$ , pokud existují takové konstanty  $c, C > 0$ , že pro libovolné dva body  $x, y \in M$  platí

$$c \cdot \sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq C \cdot \sigma(x, y).$$

(1) Dokaž, že pokud  $\rho$  je skoro stejná jako  $\sigma$ , pak i  $\sigma$  je skoro stejná jako  $\rho$ .

- (2) Necht  $\tau$  je třetí metrika na  $M$ . Dokaž, že pokud  $\rho$  je skoro stejná jako  $\sigma$  a  $\sigma$  je skoro stejná jako  $\tau$ , pak je  $\rho$  skoro stejná jako  $\tau$ .
- (3) Dokaž, že eukleidovská vzdálenost je skoro stejná jako manhattanská i maximová vzdálenost.

**Úloha 2.** Necht  $x_1, \dots, x_n$  jsou různá reálná čísla. Dokaž, že existuje  $k \in \{1, \dots, n\}$  takové, že pro každé reálné  $y$  je

$$\sum_{i=1}^n |x_i - x_k| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y|.$$

Mějme metrický prostor  $(M, \rho)$ . Pak pomocí  $\rho$  umíme měřit vzdálenosti jednotlivých dvojic bodů  $x, y \in M$  jako  $\rho(x, y)$ . Co když ale máme více bodů, řekněme konečné množiny  $A, B \subseteq M$ , a chtěli bychom měřit, jak se tyto množiny odlišují? Jednou možností je použít *Hausdorffovu metriku*.

Nejdřív zavedme číslo

$$d_A(B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \rho(a, b).$$

To si lze představit tak, že pro každý bod  $a \in A$  najdeme k němu co nejbližší bod  $b \in B$ . Tímto způsobem pro každé  $a \in A$  dostaneme číslo udávající vzdálenost k nejbližšímu  $b \in B$ . Pak  $d_A(B)$  je největší z těchto vzdáleností, tj. „jak daleko to je z  $A$  někam do  $B$  v nejhorším případě“. Obdobně definujeme

$$d_B(A) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} \rho(a, b).$$

Problém s těmito čísly je, že se nemusí rovnat, tj. obecně je rozdíl mezi  $d_A(B)$  a  $d_B(A)$ . Příkladem může být  $\mathbb{N}$  s metrikou definovanou jako  $\rho(n, m) = |n - m|$ , kde pokud vezmeme množiny  $A = \{1\}$  a  $B = \{2, 3\}$ , bude platit  $d_A(B) = \max\{1\} = 1$  a  $d_B(A) = \max\{1, 2\} = 2$ . Metrika ale musí být symetrická. Řešením je vzít za metriku to větší z těchto čísel, což je už Hausdorffova metrika, definovaná jako

$$\rho_H(A, B) = \max\{d_A(B), d_B(A)\}.$$

Tato poněkud strašlivá kombinace tří maxim a minim už opravdu tvoří metriku na konečných podmnožinách metrického prostoru.

Jako úplně největší špiček poznamenejme, že jsme uvažovali  $A$  a  $B$  konečné proto, aby tato minima a maxima vůbec existovala – nekonečná podmnožina reálných čísel nemusí mít minimum ani maximum. Nicméně pokud znáš suprema a infima (zobecnění maxima a minima, která vždy pro omezenou podmnožinu  $\mathbb{R}$  existují), pak věz, že nahrazením maxim a minim supremy a infimy umožňuje definovat Hausdorffovu metriku i na nekonečných podmnožinách  $M$ . Tedy například lze v rovině pomocí Hausdorffovy metriky měřit manhattansky vzdálenost mezi dvěma kruhy.

## Intermezzo: Rychlokurz množin a množin množin

V další kapitole začneme intenzivněji pracovat s množinami. Věříme, že jsi se s množinami již určitě setkal(a), ale alespoň tu zavedeme některé značení. Tuhle kapitolu klidně zatím přeskoč, a kdyby se Ti nějaká práce s množinami později v seriálu nezdála, můžeš se sem vrátit.

*Množina* je nějaký soubor prvků. Tyto prvky mohou být ledacos – čísla, body v rovině, skořicovní šneci. Množina přirozených čísel  $\mathbb{N}$  obsahuje některá čísla, přímka v rovině jakožto množina obsahuje

své body, množina Matějových oblíbených jídel obsahuje skořicové šneky. Množiny typicky značíme velkými písmeny. To, že nějaký prvek  $p$  *náleží množině* (nebo *leží v množině*)  $A$ , značíme  $p \in A$ . V množině „nezáleží na pořadí“ ani žádný prvek nemůže množině náležet „vícekrát“. *Prázdnou množinu*, tedy množinu bez prvků, značíme  $\emptyset$ .

Pokud máme dvě množiny  $A$  a  $B$ , můžeme pomocí nich tvořit nové množiny. Tak třeba *průnik*  $A$  a  $B$  je množina  $A \cap B$  složená z prvků, co leží v  $A$  i v  $B$ . *Sjednocením*  $A$  a  $B$  rozumíme množinu  $A \cup B$  obsahující ty prvky, které leží alespoň v jedné z množin  $A$ ,  $B$ . *Rozdíl*  $A$  a  $B$  je pak množina  $A \setminus B$  obsahující takové prvky náležící  $A$ , které nenáleží  $B$ . Symbolicky:

$$A \cap B = \{p \mid p \in A \wedge p \in B\}, \quad A \cup B = \{p \mid p \in A \vee p \in B\}, \quad A \setminus B = \{p \mid p \in A \wedge p \notin B\}.$$

Všimni si použitého zápisu – obě množiny popisujeme jako ty body  $p$ , které splňují nějakou podmínku, kterou uvádíme za svislítko.

Pokud  $B$  obsahuje všechny prvky  $A$  (a potenciálně nějaké další), říkáme, že  $A$  je *podmnožinou*  $B$ , což značíme jako  $A \subseteq B$ . Často budeme v situaci, kdy máme nejdříve zadanou nějakou základní množinu  $M$  (například bodů v celé rovině) a pracujeme čistě s podmnožinami  $A$  této množiny,  $A \subseteq M$ . Užitečnou operací pak pro nás bude *doplňek* (nebo také *komplement*)  $A$ , značený jako  $A^c$  a definovaný jako  $A^c = M \setminus A$  – tedy jako ty body základního prostoru  $M$ , které v  $A$  neleží. Nedává smysl ale mluvit o doplňku, pokud nevíme, jaká je naše základní množina  $M$ .

Zatím jsme předpokládali, že máme dvě množiny a s nimi operujeme. To nám ale obvykle nebude stačit. Pokud chceme pracovat s nějakým obecným souborem množin ... Soubor množin, to zní zase jako nějaká množina! A opravdu, občas budeme v seriálu pracovat s množinami, jejich prvky jsou další množiny, takzvanými *systémy množin*. To může znít na první přečtení strašidelně, a taky přiznáváme, že chvilku trvá, než si na systémy množin člověk zvykne. Pokud se Ti systémy množin zatím nelíbí, věz, že je v tomto díle seriálu po této kapitole skoro nepotkáš, v dalších dílech seriálu se jim ale spíše nevyhneme.

Typicky se systémy množin označují velkými kaligrafickými písmeny, například  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{S}$ . Dělá se to čistě pro přehlednost, aby bylo jasné, která písmenka značí základní prvky, která množiny a která systémy množin, například může platit  $a \in A \in \mathcal{A}$ . Systémem množin může být například výběr několika přímek v rovině nebo množina obsahující některé základní číselné obory:  $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ .

Pro neprázdný systém množin  $\mathcal{A}$  definujeme *průnik všech množin z  $\mathcal{A}$*  jako

$$\bigcap \mathcal{A} = \{p \mid \forall A \in \mathcal{A} : p \in A\},$$

tj. jako ty body, které leží v každé množině obsažené v  $\mathcal{A}$ . Podobně přirozeně zobecňujeme *sjednocení všech množin z  $\mathcal{A}$*  na množinu obsahující ty body, které leží v alespoň jedné množině z  $\mathcal{A}$ :

$$\bigcup \mathcal{A} = \{p \mid \exists A \in \mathcal{A} : p \in A\}.$$

Systémy množin také můžeme zapisovat o něco konkrétněji, pokud si nějak „označíme“ nebo „opísmenkujeme“ množiny v ní obsažené. Například pro konečný systém  $\mathcal{A}$  obsahující pět množin je přirozené si tyto množiny očíslovat a psát  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ . Pak také průnik a sjednocení tohoto systému zapisujeme jako

$$\bigcap_{i=1}^5 A_i = \bigcap \mathcal{A}, \quad \bigcup_{i=1}^5 A_i = \bigcup \mathcal{A}.$$

V obecném případě ale může být  $\mathcal{A}$  „moc velká“ (ať to znamená cokoliv) a přirozená čísla nám nemusí stačit. Přesto můžeme uvažovat nějakou obecnou množinu  $I$ , jejíž prvky nám slouží čistě jako ono „opísmenkování“ množin v  $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . Pak opět průnik a sjednocení můžeme psát o něco konkrétněji jako

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap \mathcal{A}, \quad \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup \mathcal{A}.$$

Třeba v minulém případě  $\mathcal{A}$  o pěti množinách bylo  $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Příklad „většího“ systému množin může být třeba tento: Pro reálné číslo  $x$  můžeme definovat dvouprvkovou množinu  $A_x = \{x, x + 2\}$ . Pak můžeme například vytvořit systém  $\{A_x \mid x \in (0, 1)\}$ , tedy vlastně indexovaný intervalem  $I = (0, 1)$ . Sjednocení takového systému pak lze psát dvěma způsoby jako

$$\bigcup_{x \in (0, 1)} A_x = \bigcup \{A_x \mid x \in (0, 1)\},$$

záleží jen na tom, který nám přijde hezčí. Výsledkem tohoto sjednocení bude  $(0, 1) \cup (2, 3)$ .

**Příklad.** Nechť  $\mathcal{A}$  je libovolný neprázdný systém množin. Dokaž, že průnik  $\mathcal{A}$  je podmnožinou každé množiny  $A$  náležící  $\mathcal{A}$ , tj. že  $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A$ .

*Řešení.* Potřebujeme ukázat, že každý prvek náležící  $\bigcap \mathcal{A}$  též náleží  $A$ . Nechť tedy  $a \in \bigcap \mathcal{A}$  je libovolný prvek. Z definice průniku systému množin to znamená, že  $a$  je obsažen v každé množině ležící v  $\mathcal{A}$ . Speciálně tedy  $a$  náleží  $A$ , neboť  $A \in \mathcal{A}$ . Odtud plyne  $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A$ .

Příklad to je velmi krátký a jednoduchý, jen je potřeba mít přehled o tom, které symboly značí prvky, které množiny a které systémy množin (například že ačkoliv  $\mathcal{A}$  je systém množin, jeho průnik  $\bigcap \mathcal{A}$  je již množina prvků).

**Cvičení 5.** Dokaž, že:

- (1) Pro množiny  $A, B, C$  platí  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
- (2) Pro množiny  $A, B \subseteq M$  je  $A \setminus B = A \cap B^c$ , kde doplněk bereme vzhledem k  $M$ .
- (3) Pro množiny  $A \subseteq B \subseteq M$  je  $B^c \subseteq A^c$ .
- (4) Pro množiny  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$  je  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_n$ .
- (5) Pro množiny  $A, B \subseteq M$  je  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .
- (6) Obecněji, pro neprázdnou množinu  $I$  a systém  $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  podmnožin množiny  $M$  platí *de Morganovo pravidlo*

$$\left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

## Otevíráme a zavíráme

Ve chvíli, kdy máme metriku, nic nám nebrání zobecňovat objekty, které se opírají o pojem vzdálenosti v nám známé geometrii. My takové zobecnění provedeme hlavně pro kruhy/koule.

**Definice.** Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor,  $a \in M$  a  $r$  je kladné reálné číslo. *Otevřenou kouli se středem  $a$  a poloměrem  $r$*  rozumíme množinu

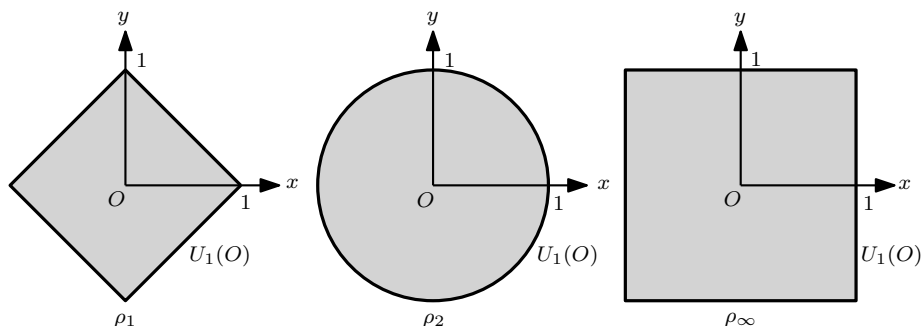
$$U_r(a) = \{x \in M \mid \rho(a, x) < r\}.$$

Obdobně definujeme *uzavřenou kouli* jako

$$B_r(a) = \{x \in M \mid \rho(a, x) \leq r\}.$$

S koulemi jsme se setkali už ze začátku seriálu. Uzavřená koule s poloměrem  $r$  okolo nějakého bodu  $a \in \mathbb{R}^2$  byl prostě kruh o poloměru  $r$  se středem  $a$ . Pokud vezmeme místo toho otevřenou kouli o stejném středu a poloměru, bude vypadat úplně stejně, jen nebude obsahovat body na kružnici  $k_r(a)$ .

Takovéto obecné koule můžou pro různé metriky vypadat všelijak – na obrázku je pár takových příkladů v rovině a my Tě prosíme, aby sis rozmyslel(a), proč jsou zrovna takové a jaké tvary by měly v prostoru.



Otevřené koule pro nás budou mít veliký význam – jedná se sice o jedny z nejjednodušších množin, které lze pomocí metriky definovat, ale přitom se pomocí nich dají matematicky přesně formulovat na první pohled trochu nejasné věty, jako že „úsečka nemá vnitřek,“ „bod leží na hranici čtverce“ nebo „přímka není omezená“.

Začneme vnitřkem množiny, například intervalu  $(0, 1)$  se standardní metrikou  $\rho(x, y) = |x - y|$ . Ten obsahuje body, o kterých bychom řekli, že leží „uvnitř“ tohoto intervalu – například  $\frac{1}{2}$ , ale i třeba  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{7}{8}$ ,  $\frac{1}{1000}$ , ... Náš interval má dva krajní body 0 a 1 a všechna předchozí čísla mají od obou těchto krajů kladnou vzdálenost. Speciálním bodem je ale 1, která sice v  $(0, 1)$  leží, ale ke kraji 1 má vzdálenost 0, a také bychom spíš neřekli, že leží *uvnitř* tohoto intervalu.

Intuice s „nenulovou vzdáleností od kraje“ má něco do sebe, ale už v  $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$  se nám situace komplikuje – pro bod uvnitř čtverce je nekonečno „krajních bodů“, od kterých měřit vzdálenost. A jak navíc u komplikovanějších množin rozhodovat o tom, které body jsou „krajní“ a které ne?

Přesto se dá vnitřek množiny v libovolném metrickém prostoru zavést elegantně a intuitivně prostě tím, že o žádných „krajích“ mluvit nebudeme (to ale neznamená, že by to byla úplně scestná myšlenka, jak uvidíme časem).

**Definice.** Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor,  $A \subseteq M$  a  $a \in A$ . Řekneme, že  $a$  je *vnitřním bodem*  $A$ , pokud existuje takový poloměr  $r > 0$ , že  $U_r(a) \subseteq A$ . *Vnitřek*  $A$  definujeme jako množinu všech vnitřních bodů  $A$  a značíme ho  $\text{Int } A$ . Řekneme, že množina  $A$  je *otevřená*, pokud všechny její body jsou vnitřní, tj. pokud  $A = \text{Int } A$ .

Zkráceně řečeno tedy bod  $x$  leží uvnitř množiny  $A$ , pokud v ní neleží jen on sám, ale i nějaká celá koule se středem v  $x$ , tj. mohli bychom říct „nejen  $x$  leží v  $A$ , ale i všechny *dostatečně blízké* body okolo  $x$  leží v  $A$ .“

**Příklad.** (celý prostor je otevřený) Mějme metrický prostor  $(M, \rho)$ . Dokaž, že  $M$  je otevřená množina.

**Řešení.** Vezměme si libovolný bod  $x \in M$ , dokážeme, že je vnitřní. Pak kulička  $U_r(x)$  je určitě podmnožinou  $M$ , protože je složena pouze z prvků  $M$ . Tedy každý bod  $M$  je vnitřní.

**Příklad.** Dokaž, že v libovolném metrickém prostoru je otevřená koule otevřenou množinou.

**Řešení.** Mějme metrický prostor  $(M, \rho)$ , bod  $a \in M$ , poloměr  $r > 0$  a otevřenou kouli

$$U_r(a) = \{x \in M \mid \rho(x, a) < r\}.$$

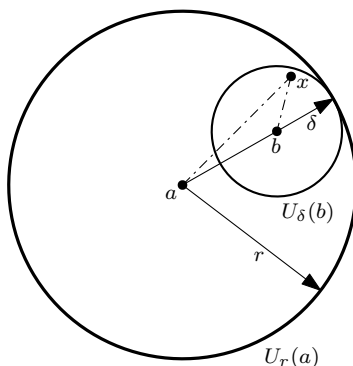
Chceme ukázat, že každý bod v této kouli je vnitřní. Buď tedy  $b \in U_r(a)$  nějaký bod v této kouli. Ten z definice otevřené koule splňuje  $\rho(b, a) < r$ , takže pro  $\delta = r - \rho(b, a)$  platí  $\delta > 0$ , a tedy  $\delta$  může sloužit jako validní poloměr. Ukážeme, že  $U_\delta(b) \subseteq U_r(a)$ , což bude znamenat, že  $b$  je opravdu vnitřním bodem  $U_r(a)$ .

Buď tedy  $x \in U_\delta(b)$  libovolný bod v nové kuličce. Pak

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, b) + \rho(b, a) < \delta + \rho(b, a) = (r - \rho(b, a)) + \rho(b, a) = r,$$

kde jsme nejdříve použili trojúhelníkovou nerovnost, pak  $x \in U_\delta(b)$ , a nakonec naši volbu poloměru  $\delta$ . Ukázali jsme, že  $x$  je od  $a$  vzdálen méně než  $r$ , a tedy  $x \in U_r(a)$ . Protože toto platí pro libovolný bod  $x \in U_\delta(b)$ , musí již  $U_\delta(b) \subseteq U_r(a)$ .

Poznamenejme, že volba  $\delta$  přímo odpovídá tomu, jak bychom poloměr menší kuličky volili „obrázkově“ v rovině se standardní eukleidovskou metrikou. Obrázky s kuličkami v metrických prostorech překvapivě často fungují a je dobré si je při řešení úloh a dokazování tvrzení kreslit.



**Cvičení 6.** Rozmysli si, že úsečka v rovině se standardní eukleidovskou metrikou nemá žádné vnitřní body.

**Příklad.** (sjednocení otevřených) Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $\mathcal{G}$  je libovolný systém otevřených množin v tomto prostoru. Dokaž, že pak i  $\bigcup \mathcal{G}$  je otevřená množina.

*Řešení.* Buď  $a \in \bigcup \mathcal{G}$  libovolný bod – o něm potřebujeme ukázat, že je vnitřním bodem  $\bigcup \mathcal{G}$ , tj. že i s celou kuličkou leží v  $\bigcup \mathcal{G}$ . Bod  $a$  leží ve sjednocení  $\mathcal{G}$ , což znamená, že existuje nějaká množina  $G \in \mathcal{G}$  obsahující  $a$ . Ale  $\mathcal{G}$  je systém otevřených množin, takže  $G$  je otevřená, a tedy existuje poloměr  $r > 0$  takový, že  $U_r(a) \subseteq G$ . Protože ale  $G \subseteq \bigcup \mathcal{G}$  (něco podobného jsme dokazovali pro průnik v úvodní kapitole o množinách), musí  $U_r(a)$  celá ležet i v  $\bigcup \mathcal{G}$ . Tedy  $a$  je vnitřním bodem  $\bigcup \mathcal{G}$ .

Otevřenost se tedy zachovává na sjednocování. S průniky je to o trochu komplikovanější.

**Cvičení 7.** Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor.

- (1) Mějme v  $M$  konečně mnoho otevřených množin  $G_1, \dots, G_n$ . Dokaž, že pak i jejich průnik  $\bigcap_{i=1}^n G_i$  je otevřená množina.
- (2) Najdi nějaký nekonečný systém otevřených množin  $\mathcal{G}$  takový, že jejich průnik  $\bigcap \mathcal{G}$  již otevřený není.

Stejně jako může nastat, že bod i s celou kuličkou leží uvnitř množiny, tak může nastat i případ, kdy bod  $x$  i nějaká celá koule  $U_r(x)$  leží vně  $A$ , tj.  $U_r(x) \cap A = \emptyset$  – to vlastně odpovídá tomu, že  $U_r(x) \subseteq A^c$ , tj.  $x$  je vnitřním bodem doplňku  $A$  (ale spíš řekneme, že  $x$  leží vně  $A$ ).

To ale nevycerpává všechny možnosti, které můžou nastat. Ještě se může stát, že jakkoliv malý poloměr  $r > 0$  zvolíme, stále bude kulička  $U_r(x)$  jen z části protínat  $A$  a jen z části protínat  $A^c$ , ale nebude podmnožinou ani jedné z těchto množin. Intuitivně, „libovolně blízko k  $x$  lze nalézt jak bod z  $A$ , tak bod z  $A^c$ .“ A o takových bodech přemýšlíme jako o bodech hranice (nebo „okraje“)  $A$ :

**Definice.** Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor,  $A \subseteq M$  a  $a \in M$ . Řekneme, že  $a$  je *hraničním bodem*  $A$ , pokud pro libovolný poloměr  $r > 0$  platí, že  $U_r(a)$  protíná jak  $A$ , tak  $A^c$ . Symbolicky:

$$\forall r > 0 : (A \cap U_r(a) \neq \emptyset \wedge A^c \cap U_r(a) \neq \emptyset).$$

Hranicí množiny  $A$  pak rozumíme množinu všech hraničních bodů  $A$  a značíme ji  $\partial A$ .

**Cvičení 8.** (diskrétní koule nemají hranici) Nechť  $M$  je neprázná množina a  $\rho_{\text{disk}}$  je diskrétní metrika na  $M$ . Nechť dále  $a$  je libovolný bod v  $M$  a  $r > 0$ . Dokaž, že hranicí otevřené koule  $U_r(a)$  je prázdná množina.

**Cvičení 9.** (rozklad prostoru) Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$ . Dokaž, že každý bod  $M$  leží buď uvnitř, vně, a nebo na hranici  $A$ , a vždy nastane právě jedna z těchto možností. Jinak řečeno, dokaž, že

$$\text{Int } A \cup \text{Int}(A^c) \cup \partial A = M$$

a že  $\text{Int } A$ ,  $\text{Int}(A^c)$  a  $\partial A$  jsou disjunktí.

Hraniční body množiny  $A$  nemusí nutně ležet v této množině – část hranice  $A$  může ležet v  $A^c$ . Dokonce může nastat  $\partial A \subseteq A^c$ , tj.  $A$  neobsahuje žádný svůj hraniční bod. Takovou vlastnost mají právě otevřené množiny, jak například ihned plyne z následujícího rozkladu na vnitřek a část hranice:

**Cvičení 10.** Nechť  $A$  je libovolná množina v metrickém prostoru. Dokaž, že pak lze  $A$  psát jako

$$A = (\text{Int } A) \cup (A \cap \partial A).$$

Naopak množiny, které obsahují celou svou hranici, jsou speciální a budou pro nás v budoucnu důležité, tak si je rovnou pojmenujme.

**Definice.** Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$ . Řekneme, že  $A$  je *uzavřená*, pokud obsahuje svoji hranici, tj.  $\partial A \subseteq A$ . *Uzávěrem*  $A$  rozumíme množinu

$$\bar{A} = A \cup \partial A.$$

Uzávěr tedy do původní množiny  $A$  přidá body její hranice. Je to snaha tuto množinu  $A$  uzavřít. To je správný pohled na věc, ale je potřeba být trochu opatrnější – aby  $\bar{A}$  byla uzavřená množina, musí obsahovat *svou* hranici  $\partial(\bar{A})$ , a ne původní hranici  $\partial A$ . Naštěstí lze ukázat, že hranice se po použití uzávěru nezmění, takže  $\bar{A}$  opravdu přidává do  $A$  body tak, aby výsledek byl uzavřený.

**Cvičení 11.** Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$ . Dokaž, že  $\bar{A}$  je uzavřená množina.

Uzávěr  $A$  by šlo též definovat trochu strašidelněji jako průnik všech uzavřených nadmnožin  $A$  (mezi nimiž je vždy alespoň metrický prostor  $M$  samotný, neboť je sám v sobě uzavřený). V tomto smyslu je uzávěr dokonce *nejmenší uzavřená nadmnožina*  $A$ . Uzavřená proto, že průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina, jak se časem můžeš přesvědčit v pozdějším cvičení. „Nejmenší“ znamená, že jakákoliv jiná uzavřená nadmnožina  $A$  v sobě musí  $\bar{A}$  obsahovat. Tedy uzávěr lze psát jako

$$\bar{A} = \bigcap \{F \mid A \subseteq F \wedge F \text{ je uzavřená v } M\}.$$

Můžeš si to zkusit dokázat, ale je to trochu pracnější.

**Cvičení 12.** (dualita otevřených a uzavřených množin) Dokaž, že množina  $F$  v metrickém prostoru je uzavřená právě tehdy, když  $F^c$  je otevřená.

**Cvičení 13.** Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$ . Dokaž, že  $(\bar{A})^c = \text{Int}(A^c)$ .

**Cvičení 14.** Dokaž, že každou otevřenou množinu v metrickém prostoru lze zapsat jako sjednocení nějakého systému otevřených koulí. Tedy symbolicky, dokaž, že pro každou  $G$  otevřenou v metrickém prostoru  $(M, \rho)$  existuje nějaká množina  $I$ , body  $a_\alpha \in M$  a poloměry  $r(\alpha) > 0$  (pro  $\alpha \in I$ ) takové, že

$$G = \bigcup_{\alpha \in I} U_{r(\alpha)}(a_\alpha).$$

## Konvergence

Když si člověk na kalkulačce nechá spočítat  $\pi$ , kalkulačka mu ukáže jen nějaký konečný počet číslic desetinného zápisu, tedy aproximuje  $\pi$  pomocí nějakého blízkého racionálního čísla. Kvalita této aproximace je obvykle omezena jen velikostí displeje. Kdybychom chtěli dalších 10 cifer, bylo by možné je spočítat. A kdybychom chtěli ještě dalších 10, opět je lze spočítat pomocí stejného algoritmu, co používá kalkulačka. Protože je  $\pi$  iracionální číslo, nikdy nedostaneme přesný výsledek. Můžeme ale získat *libovolně dobrou* aproximaci. A o té nekonečné posloupnosti stále se zlepšujících se aproximací se pak říká, že se blíží k  $\pi$ , neboli že tato posloupnost k  $\pi$  *konverguje*. Co přesně se tím ale míní?

**Definice.** Necht  $(x_n)_{n=1}^\infty = (x_1, x_2, \dots)$  je nekonečná posloupnost bodů v metrickém prostoru  $(M, \rho)$  a  $x \in M$ . Řekneme, že bod  $x$  je *limitou* posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$  (nebo také že tato posloupnost *konverguje* k  $x$ ), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \rho(x, x_n) < \varepsilon.$$

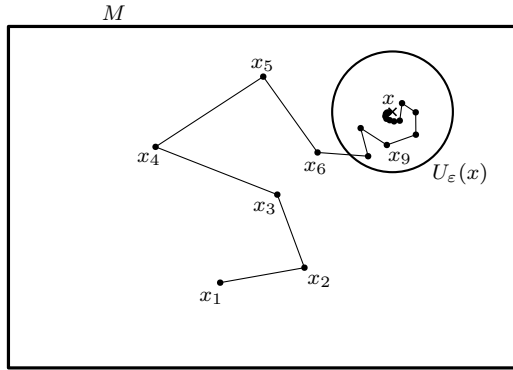
To je hodně písmenek a kvantifikátorů, ale my se jimi statečně proboujeme. Kladné číslo  $\varepsilon$  lze chápat jako „toleranci“ nebo „požadovanou kvalitu aproximace“. Například kdybychom chtěli spočítat hodnotu  $\pi$  přesně na tři desetinná místa, mohli bychom zvolit toleranci  $\varepsilon = 0,0001$ ; pak se každé číslo vzdálené od  $\pi$  nejvýše o 0,0001 bude na prvních třech desetinných místech s  $\pi$  shodovat. Definice limity posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty = (x_1, x_2, \dots)$  pak říká, že pro danou toleranci  $\varepsilon$  jsou od určitého indexu  $n_0 \in \mathbb{N}$  dál už *všechny hodnoty*  $x_n$  blíž k limitě  $x$  než je zadaná tolerance  $\varepsilon$ . Navíc tohle musí platit pro *každou* předem danou toleranci  $\varepsilon$  (nicméně pro různá  $\varepsilon$  se mohou  $n_0$  lišit).

**Poznámka.** Zkusíme definici limity ještě přeformulovat trochu jinak, třeba Ti některý z těchto jiných pohledů bude dávat větší smysl.

Podmínku  $\rho(x, x_n) < \varepsilon$  lze také psát jako  $x_n \in U_\varepsilon(x)$ , takže vlastně požadujeme, aby od určitého indexu  $n_0$  dál všechny body  $x_n$  ležely uvnitř kuličky se středem  $x$  a poloměrem  $\varepsilon > 0$ , a aby takové  $n_0$  šlo najít pro každý poloměr  $\varepsilon$ . Tj. pro libovolně malou kuličku se středem  $x$  musí od nějakého indexu  $n_0$  již všechny body  $x_n$  být uvnitř této kuličky, což intuitivně odpovídá tomu, že se body hodně přiblíží k  $x$  a už se nevzdálí.

Všimni si rovněž, že pokud od nějakého indexu  $n_0$  dál jsou už všechna  $x_n$  od  $x$  vzdálena méně než  $\varepsilon$ , znamená to také, že jediné body, které jsou od  $x$  vzdálené *o víc* než  $\varepsilon$ , mohou být  $x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}$  (a ani ty nemusí), ale určitě ne už žádné další. To znamená, že *jen konečně bodů*  $x_n$  může být od  $x$  dál než o  $\varepsilon$ .





První odstavec této kapitoly nám tedy neformálními slovy říká, že v metrickém prostoru  $\mathbb{R}$  nám kalkulačka umí dát posloupnost aproximací  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $a_n \in \mathbb{Q}$ , která konverguje k  $\pi$ , neboli má limitu  $\pi$ . Pokud ses již s limitami setkal někdy dříve, pravděpodobně šlo o limity reálných posloupností. To je jen speciální případ limit v metrickém prostoru  $\mathbb{R}$  se standardní metrikou.

Pokud máš po ruce kalkulačku, můžeš si zkusit spočítat prvních pár členů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  tak, že zvolíš  $x_1$  třeba 1, 2 nebo 0,2025 a budeš počítat nové členy jako

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Členy posloupnosti se po chvíli už budou jen málo měnit a budou se blížit jistému podezřele vypadajícímu číslu.

**Příklad.** Necht' v metrickém prostoru  $(\mathbb{R}, \rho)$  s metrikou  $\rho(x, y) = |x - y|$  máme danu posloupnost  $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ . Dokaž, že tato posloupnost má limitu 0.

**Řešení.** Postupujeme podle definice. Potřebujeme ukázat, že pro jakoukoliv toleranci  $\varepsilon > 0$  jsme schopni najít index  $n_0$  takový, že všechny hodnoty  $\frac{1}{n}$  jsou pro  $n \geq n_0$  od nuly vzdálené o méně než  $\varepsilon$ , tj. že  $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ . Předně poznamenejme, že výraz na levé straně můžeme zjednodušit a ověřovat  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ .

Necht' tedy  $\varepsilon > 0$  je nějaké libovolné, ale dané číslo. Chceme, aby platilo  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  pro všechna dostatečně velká  $n$ . Ekvivalentně upravením nerovnosti chceme  $\frac{1}{\varepsilon} < n$  pro dostatečně velká  $n$ . To je ale snadné – ať je  $\varepsilon$  jakékoliv, určitě umíme najít přirozené číslo  $n_0$  takové, že bude větší než  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Pak pro každé  $n \geq n_0$  bude platit  $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ , a tedy také  $\varepsilon > \frac{1}{n}$ .

Tedy pro naše  $\varepsilon$  jsme opravdu vhodné  $n_0$  našli. A protože toto „naše“  $\varepsilon$  bylo libovolné, platí, že pro každé  $\varepsilon$  jsme takové  $n_0$  schopni najít („pokud dostaneme kladné  $\varepsilon$ , tak zvolíme nějaké  $n_0$  větší jak  $\frac{1}{\varepsilon}$ , a bude to fungovat; třeba  $n_0$  spočteme zaokrouhlením  $\frac{1}{\varepsilon}$  nahoru“). Tedy opravdu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Cvičení 15.** Necht'  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost bodů v metrickém prostoru  $(M, \rho)$ ,  $x \in M$  a platí, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $\rho(x_n, x) \leq \frac{1}{n}$ . Dokaž, že pak již musí být  $x$  limitou  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ .

**Cvičení 16.** Dokaž, že v  $\mathbb{R}$  se standardní metrikou  $\rho(x, y) = |x - y|$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ .

**Cvičení 17.** Jak vypadají konvergentní posloupnosti v prostoru s diskrétní metrikou?

**Příklad.** (jednoznačnost limity) Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je posloupnost bodů v  $M$ . Dokaž, že tato posloupnost nemůže mít dvě různé limity.

*Řešení.* Myšlenka je taková, že posloupnost se časem shlukuje jen v malé kuličce kolem své limity. Pokud by jedna posloupnost měla dvě různé limity, tak by se měla zároveň shlukovat ve dvou malých kuličkách o různých středech. To samozřejmě nebude možné, pokud tyto kuličky budou dost malé, aby se vůbec neprotínaly. A to umíme zajistit volbou dostatečně malého poloměru. Udělejme to formálně:

Pro spor předpokládejme, že  $(x_n)_{n=1}^\infty$  má dvě limity  $x \neq y$ . Protože se tyto limity nerovnají, musí mít nějakou kladnou vzdálenost  $\rho(x, y) > 0$ . Zvolme si  $\varepsilon = \frac{\rho(x, y)}{3} > 0$ . To je kladné číslo, takže ho můžeme chápat jako  $\varepsilon$  v definici limity. Tudíž lze najít  $n_1 \in \mathbb{N}$  takové, že všechna  $x_n$  pro  $n \geq n_1$  jsou od  $x$  vzdálené méně než  $\varepsilon$ . Stejně tak lze ale najít  $n_2 \in \mathbb{N}$  takové, že všechna  $x_n$  pro  $n \geq n_2$  jsou od  $y$  vzdálené méně než  $\varepsilon$ , protože i  $y$  je limitou  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Máme tedy

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon, \quad n \geq n_1, \quad \text{a} \quad \rho(x_n, y) < \varepsilon, \quad n \geq n_2.$$

Jedno z čísel  $n_1$  a  $n_2$  bude větší, označme si ho jako  $n_0$ . Pak pro  $n \geq n_0$  platí obě předešlé nerovnosti současně. Teď už stačí použít trojúhelníkovou nerovnost, abychom došli ke sporu: Pro  $n \geq n_0$  totiž platí

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}\rho(x, y),$$

tedy  $\rho(x, y) < \frac{2}{3}\rho(x, y)$ , což ale pro kladné číslo  $\rho(x, y)$  nemůže nastat. Došli jsme ke sporu, takže  $(x_n)_{n=1}^\infty$  nemůže mít dvě různé limity.

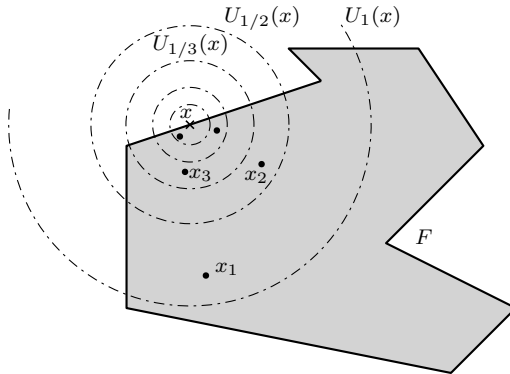
Uzavřené množiny jsme definovaly tak, že obsahují svoji hranici. Lze je ale také popsat jako ty množiny, ze kterých „nejde vykonvergovat“ – pokud nějaká konvergentní posloupnost bodů leží v uzavřené množině, pak tam leží i limita této posloupnosti.

**Příklad.** Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $F \subseteq M$  je neprázdná množina. Dokaž, že  $F$  je uzavřená právě tehdy, když pro každou konvergentní posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  bodů z  $F$  platí, že i  $\lim x_n$  leží v  $F$ .

*Řešení.* „ $\implies$ “ Necht je  $F$  uzavřená a necht je  $(x_n)_{n=1}^\infty$  libovolná posloupnost bodů v  $F$ , která konverguje k  $x = \lim x_n \in M$ . Pak  $x$  nemůže ležet „vně“  $F$ , tj. v  $\text{Int}(F^c)$  – kdyby totiž  $x$  byl vnitřním bodem  $F^c$ , pak by šlo najít kuličku  $U_\varepsilon(x) \subseteq F^c$  pro nějaké  $\varepsilon > 0$ . Zároveň z definice limity by ale šlo najít  $n_0$  takové, že pro indexy  $n \geq n_0$  by platilo  $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ , tj.  $x_n \in U_\varepsilon(x)$ . Speciálně by  $x_{n_0} \in U_\varepsilon(x) \subseteq F^c$ , což je ale spor s tím, že  $x_{n_0}$  leží v  $F$ .

Tedy  $x$  neleží v  $\text{Int}(F^c)$ . Ze cvičení 9 proto plyne, že  $x$  leží buď uvnitř  $F$  (tj. v  $\text{Int}(F)$ ), nebo na hranici  $F$  (tj. v  $\partial F$ ). To jsou ale obojí podmnožiny  $F$  (pro hranici to platí z uzavřenosti  $F$ ), takže  $x \in F$ .

„ $\impliedby$ “ Necht všechny limity konvergentních posloupností bodů z  $F$  leží v  $F$ . Pro uzavřenost  $F$  chceme dokázat, že  $\partial F \subseteq F$ . Necht tedy  $x$  je nějaký bod hranice  $\partial F$ . Z definice hranice plyne, že pro každý poloměr  $\varepsilon > 0$  koule  $U_\varepsilon(x)$  má neprázdný průnik s  $F$  i s  $F^c$ . To speciálně znamená, že pro každé  $n$  přirozené lze najít bod  $x_n \in U_{1/n}(x) \cap F$  (volíme  $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ ), viz obrázek. Tím jsme zkonstruovali posloupnost bodů  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , které všechny leží v  $F$ , a navíc pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$ . Odtud ale ze cvičení 15 plyne, že posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  konverguje k  $x$ . Spolu s naším předpokladem ze zadání tak musí  $x$  ležet v  $F$  jakožto limita bodů z  $F$ . Tedy každý hraniční bod leží v  $F$ .



**Cvičení 18.** Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$  je jeho neprázdná podmnožina. Dokaž, že uzávěr  $A$  lze popsat jako

$$\bar{A} = \{\lim x_n \mid (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ je posloupnost bodů z } A\}$$

**Cvičení 19.** Dokaž, že průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina

- (1) pomocí cvičení 12, de Morganova pravidla (poslední části cvičení 5 z kapitoly o množinách) a toho, že sjednocení otevřených množin je otevřená množina;
- (2) pomocí charakterizace, že z uzavřené množiny nelze vykonvergovat.

## A co dál?

Děkujeme, že jsi nás doprovázel(a) až sem na konec prvního dílu seriálu. V příštím díle se dozvíš, co to jsou spojité funkce a proč je uzavřený interval lepší než ten otevřený. Tak na viděnou!

## Pár cvičení na závěr

**Cvičení 20.** Nalezni nějaký metrický prostor, ve kterém má každá kružnice jen konečně mnoho bodů, ale každá koule nekonečno.

**Cvičení 21.** Nalezni nějaký metrický prostor, kde existuje kružnice, která je podmnožinou jiné kružnice o větším poloměru.

**Cvičení 22.** Všimni si, že v metrickém prostoru na slovech (byl uveden na začátku seriálu) je trojúhelník (VITEK, MATEJ, POTOK) rovnoramenný. Rozmysli si, jak vypadají všechny rovnostranné trojúhelníky na slovech délky 6, kde pro jednoduchost uvažujeme jen slova obsahující pouze písmena A a B.

**Úloha 3.** Mějme na kružnici  $2n$  různých bodů, ty spárujme, každý pár spojme úsečkou a posčítejme délky těchto úseček. Uvažujme takové párování, které dává tento součet délek nejmenší ze všech možných párování. Dokaž, že v tomto párování se žádné dvě úsečky uvnitř kruhu neprotínají.

**Cvičení 23.** Rozmysli si, že pokud bychom v rovině v definici eukleidovské metriky

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

zapomněli odmocninu, pak bychom nedostali metriku.

**Cvičení 24.** Najdi metrický prostor, kde existují dvě kružnice, které se protínají právě ve třech bodech.

**Úloha 4.** Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor. Dokaž, že pak i  $\sigma$  tvoří metriku na  $M$ , kde

$$\sigma(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \quad x, y \in M.$$

**Cvičení 25.** Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a mějme v něm posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$  a nechť pro každé přirozené  $n$  platí  $\rho(x_n, y_n) = \sin\left(\frac{\pi n}{2025}\right)$ . Dokaž, že pak alespoň jedna z těchto dvou posloupností nemá limitu.

**Úloha 5.** Mějme  $n \in \mathbb{N}$ . Definujme *chameleon* jako posloupnost  $3n$  písmenek, mezi kterými je přesně  $n$  písmenek „a“,  $n$  písmenek „b“ a  $n$  „c“. Definujme výměnu jako vyměnění dvou sousedních písmenek (výměna tedy dělá z chameleonů chameleony). Dokaž, že pro každého chameleona existuje jiný chameleon, který se nedá z původního chameleona získat pomocí méně než  $\frac{3n}{2}$  výměn.

(IMO shortlist 2017)

**Cvičení 26.** Dokaž, že v metrickém prostoru  $(M, \rho)$  pro  $A, B \subseteq M$  platí:

- (1) Pokud  $A \subseteq B$ , pak i  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ .
- (2)  $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$ .
- (3)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

Zároveň ukaž, že v bodě (1) z  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$  neplyne  $A \subseteq B$  a že v bodě (2) se nemusí výsledné množiny rovnat.

**Cvičení 27.** Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$  jsou dvě posloupnosti bodů v  $M$  mající limity  $x = \lim x_n$  a  $y = \lim y_n$ . Dokaž, že pak posloupnost vzdáleností  $(\rho(x_n, y_n))_{n=1}^\infty$  má limitu (v  $\mathbb{R}$  vzhledem k metrice  $\sigma(x, y) = |x - y|$ ).

## Návody k úlohám

1. Uvažuj množinky  $A_{x,y}$  takových čísel, že jejich první cifra je  $x$  a druhá je  $y$ . Jaká je vzdálenost dvou čísel ze stejné množiny  $A_{x,y}$ ?
2. Čísla seřaď a zvol to prostřední. Ukaž, že pro sudé  $n$  tvaru  $n = 2\ell$  fungují obě prostřední hodnoty  $x_\ell$  i  $x_{\ell+1}$ .
3. Uvažuj dvě protínající se úsečky a najdi jiné párování, které součet délek těchto dvou úseček zmenší.
5. Zkus najít nějaká dvě slova, která jsou od sebe faakt daleko. Jak daleko od nich může být náš chameleon?

## Řešení cvičení

1. Mělo by to být vidět z toho, že musíme ujít nějakou vzdálenost horizontálně a nějakou vertikálně, a je jedno, v jakém pořadí je ujdeme. Trochu formálněji se dá říct, že vertikální složky kavárny a knihovny se liší o nějaké  $y$ , horizontální složky se liší o nějaké  $x$ . No a postačující podmínka je, že se všechny svislé úseky počítají na  $y$  a horizontální na  $x$  (ve vertikálním směru je potřeba ujít přesně  $y$  a v horizontálním přesně  $x$  a každá orientace úseku přispívá jen do jedné z těchto dvou složek). Délka cesty je však součet délek úseků, tedy  $x + y$ , což není závislé na zvolené cestě.

2. Pokud se body  $x, y$  shodují, pak speciálně  $x_1 = y_1$ , takže měříme vzorečkem  $\rho(x, y) = |y_2 - x_2|$ , který se rovná nule, neboť  $x_2 = y_2$ . Pokud naopak  $\rho(x, y) = 0$  pro nějaké body  $x, y$ , pak buď tyto body mají shodnou první souřadnici (takže jsme měřili vzorečkem  $|y_2 - x_2|$ , který je nulový, takže i  $x_2 = y_2$ ), nebo jsme měřili vzorečkem  $|x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2|$ . V tomto druhém případě sčítáme tři nezáporná čísla a vychází nám nula, takže jednotlivé sčítance musí být nulové, tj.  $x_2 = y_2 = 0$  a  $x_1 = y_1$ . V obou případech dostáváme  $x = y$ .

Oba zadané vzorečky metriky zřejmě splňují podmínku symetrie. Zbývá proto dokázat trojúhelníkovou nerovnost.

Mějme tři body  $x, y, z$ . Pokud všechny tři body mají shodnou první souřadnici, pak podmínka

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

je vlastně trojúhelníková nerovnost pro absolutní hodnotu

$$|z_2 - x_2| \leq |y_2 - x_2| + |z_2 - y_2|,$$

o které víme, že platí.

Pokud  $x_1 = y_1 \neq z_1$ , pak

$$\rho(x, z) = |x_2| + |z_1 - x_1| + |z_2| \leq |x_2 - y_2| + |y_2| + |z_1 - y_1| + |z_2| = \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

kde jsme zase využili trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu. Podobně se postupuje v případech  $x_1 \neq y_1 = z_1$  a  $x_1 \neq z_1 = y_1$ .

Nakonec pokud mají všechny body různou první souřadnici, pak

$$\rho(x, z) = |x_2| + |z_1 - x_1| + |z_2| \leq |x_2| + |z_1 - y_1| + |y_1 - x_1| + |z_2|,$$

a pokud pravou stranu ještě navýšíme o  $2|y_2|$ , dostaneme opět trojúhelníkovou nerovnost pro  $\rho$ .

**3.** Uvědomíme si, že plošná odlišnost je vlastně obsah té části trojúhelníků, ve které se neprotínají. Vzdálenost trojúhelníku od sebe sama je pak zřejmě nula, a naopak odlišné trojúhelníky mají odlišnost kladnou. Vzoreček je symetricky zadaný, takže plošná odlišnost je symetrická. Pro ověření trojúhelníkové nerovnosti označme  $S_A, S_B, S_C$  postupně obsahy trojúhelníků  $A, B, C$  a ještě označme  $S_{A \cap B}, S_{B \cap C}, S_{C \cap A}$  a  $S_{A \cap B \cap C}$  obsahy postupně průniku  $A$  a  $B$ , průniku  $B$  a  $C$ , průniku  $C$  a  $A$  a nakonec průniku všech tří trojúhelníků  $A, B, C$ . Plošná odlišnost  $A$  od  $C$  je  $S_A + S_C - 2S_{A \cap C}$ , zatímco součet plošné odlišnosti  $A$  od  $B$  a odlišnosti  $B$  od  $C$  je

$$(S_A + S_B - 2S_{A \cap B}) + (S_B + S_C - 2S_{B \cap C}) = S_A + S_C + 2(S_B - S_{A \cap B} - S_{B \cap C}).$$

Ukážeme, že pokud od tohoto součtu odlišností  $A$  od  $B$  a  $B$  od  $C$  odečteme plošnou odlišnost  $A$  od  $C$ , dostaneme nezáporné číslo. Tím bude trojúhelníková nerovnost dokázána. Tento rozdíl, který označíme jako  $d$ , je

$$d = S_A + S_C + 2(S_B - S_{A \cap B} - S_{B \cap C}) - (S_A + S_C - 2S_{A \cap C}) = 2(S_{A \cap C} + S_B - S_{A \cap B} - S_{B \cap C}).$$

Z obrázku (v němž  $P$  je průnik všech tří trojúhelníků) si můžeme rozmyslet, že

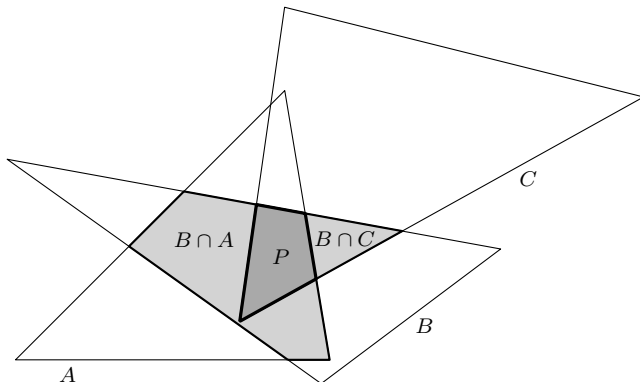
$$S_{B \cap A} + S_{B \cap C} - S_{A \cap B \cap C} \leq S_B,$$

protože levá strana je přesně obsah té části trojúhelníku  $B$ , která se protíná s  $A$  nebo s  $C$  (odčítat  $S_{A \cap B \cap C}$  musíme, aby se tato část obsahu nezapočítala dvakrát).

Díky této nerovnosti máme

$$\frac{d}{2} = S_{A \cap C} + S_B - S_{A \cap B} - S_{B \cap C} \geq S_{A \cap C} - S_{A \cap B \cap C}.$$

Ale průnik  $A$  s  $C$  jistě obsahuje průnik všech tří trojúhelníků, takže má také větší obsah a platí  $S_{A \cap C} \geq S_{A \cap B \cap C}$ . Odtud již  $\frac{d}{2} \geq 0$ , takže i  $d \geq 0$  a trojúhelníková nerovnost platí.



4. (1) Předpokládejme, že  $\rho$  je skoro stejná jako  $\sigma$ . Pak přenásobením převrácenými hodnotami c-ček dostáváme  $\frac{1}{C}\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \frac{1}{c}\rho(x, y)$ , což znamená, že i  $\sigma$  je skoro stejná jako  $\rho$ .

(2) Pokud je  $\rho$  menší než konstanta krát  $\sigma$ , které je zase menší než jiná konstanta krát  $\tau$ , pak je  $\rho$  menší než součin těchto konstant. Na druhou stranu to funguje obdobně.

(3) Euklidovská vzdálenost je vždy větší nebo rovna maximové vzdálenosti, protože popisuje délku úsečky a ta je delší než libovolná její podsložka. Zároveň je menší nebo stejná jako  $\sqrt{2}$ -násobek maximové metriky. Dá se to i spočítat explicitně, ale můžeme si to rozmyslet tak, že pokud prodloužíme kratší složku tak, aby nyní byly obě stejné dlouhé, maximová vzdálenost se zachová a euklidovská vzdálenost se zvětší na  $\sqrt{2}x^2$ , což je  $\sqrt{2}x$ , tedy se budou rovnat. A manhattanská vzdálenost je zjevně větší než maximová, protože součet je větší než maximum, a zároveň menší než dvojnásobek maximové, protože součet dvou čísel je menší než když sečteme to největší z nich samo se sebou. Ukázali jsme tak, že manhattanská vzdálenost je skoro stejná jako maximová, která je skoro stejná jako euklidovská vzdálenost, tedy všechny jsou skoro stejné.

6. Vezměme si nějaký bod na úsečce a ukážeme, že není vnitřní. Kdyby byl bod vnitřní, existovala by otevřená koule se středem v jeho středu, která by byla celá obsažena v úsečce. Již nyní ale vidíme, že tomu tak zjevně není. Nechtě tato koule má poloměr  $r$ . Pak na kolmici na naší úsečce procházející vybraným bodem určité existuje nějaký bod ve vzdálenosti  $\frac{1}{2}r$  od našeho bodu, který ale nenáleží naší úsečce. To je spor s tím, že je celá tato otevřená koule obsažena v úsečce.

7. Nechtě  $x$  je nějaký bod z konečného průniku. Chceme najít kuličku se středem v  $x$ , která celá leží v průniku. Protože je průnik prvkem všech  $G_i$  a protože jsou všechny otevřené, pro každou z nich najdeme poloměr  $r_i$ , že kulička  $U_{r_i}(x)$  je obsažena v  $G_i$ . Pokud si nyní vezmeme  $r = \min_i r_i$ , kulička  $U_r(x)$  se vejde do všech ostatních kuliček, a tedy je obsažena v každé  $G_i$ , tedy i v průniku. Průnik je tedy otevřený.

V případě nekonečného průniku se nám nemusí v předchozím důkazu podařit najít kladné minimum nekonečna poloměrů. Příkladem je nekonečný systém postupně se zmenšujících otevřených intervalů

$$\mathcal{G} = \left\{ \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

v  $\mathbb{R}$  se standardní metrikou  $\rho(x, y) = |x - y|$ . Jednotlivé prvky  $\mathcal{G}$  jsou otevřené množiny, ale průnik tohoto systému je  $\bigcap \mathcal{G} = \{0\}$ , což není otevřená množina.

10. Zřejmě je pravá strana podmnožinou levé strany, takže stačí ukázat, že to platí i naopak. Buď  $x$  nějaký bod z  $A$ . Tento bod samozřejmě také leží v celém prostoru  $M$ , pro který máme ze cvičení 9 rozklad

$$M = \text{Int } A \cup \text{Int}(A^c) \cup \partial A.$$

Protože ale  $x$  leží v  $A$ , určitě nemůže ležet v  $\text{Int}(A^c) \subseteq A^c$ . Tedy buď  $x$  leží ve vnitřku  $A$  (a pak jsme hotovi), nebo už musí ležet na hranici  $A$ . Ale zároveň předpokládáme  $x \in A$ , takže pak  $x \in A \cap \partial A$ , takže i v tomto případě  $x$  leží v množině na pravé straně dokazované rovnosti.

**11.** Uzavřené množiny obsahují svoji hranici. Chceme tedy dokázat, že  $\bar{A}$  obsahuje svoji hranici. Ukážeme, že každý bod na hranici  $\bar{A}$  je i na hranici původní množiny  $A$ . Pak totiž bude z definice ležet v  $\bar{A}$ . Nechť tedy nějaký takový bod  $x$  leží na hranici  $\bar{A}$ . Mějme nějakou kouli  $U_r(x)$  pro nějaké  $r > 0$ . Chceme dokázat, že jak  $A$ , tak doplněk  $A$ , mají neprázdný průnik s touto koulí. Pro doplněk  $A$  to máme hned, protože to je nadmnožina doplňku  $\bar{A}$ , a pro něj víme, že  $x$  leží na jeho hranici. Nyní z definice uzávěru buď  $x$  leží v  $\bar{A}$ , nebo na hranici  $\bar{A}$ . V obou případech máme, že v koulí se středem  $x$  o polovičním poloměru  $q = \frac{r}{2}$  leží nějaký bod  $x_2 \in \bar{A}$ . A protože  $x_2$  leží v  $\bar{A}$ , máme opět z definice uzávěru, že buď leží v  $A$ , nebo na hranici  $A$ . V prvním případě jsme vyhráli hned (našli jsme bod z  $A$  blízky  $x$ , tedy  $x$  leží na hranici  $A$  a je tedy součástí  $\bar{A}$ ), v opačném z definice hranice existuje nějaký bod  $x_3 \in A$ , že  $x_3 \in U_q(x_2)$ . A jaká je vzdálenost  $x_3$  od  $x$ ? Z trojúhelníkové nerovnosti je to nejvýše  $q + q = r$ . To jsme chtěli dokázat. Lze si to představit tak, že hranice není od  $A$  nijak vzdálena, a tedy jejím přidáním žádná nová hranice nevznikne.

**12.** Uzavřená množina obsahuje celou svoji hranici, otevřená množina neobsahuje nic ze svoji hranice. Avšak ze symetrie definice hranice jsou hranice  $F$  a  $F^c$  stejné. Protože množina a její doplněk dávají dohromady celý prostor, je odtud vidět dualita těchto dvou typů množin.

**13.** Pokud  $x \in (\bar{A})^c$ , pak  $x$  neleží v  $\bar{A}$ , takže neleží ani v  $A$ , ani v  $\partial A$ . Z rozkladu ze cvičení 9

$$M = \text{Int } A \cup \text{Int}(A^c) \cup \partial A$$

musí  $x$  ležet vně  $A$ , tj. v  $\text{Int}(A^c)$ . Pokud naopak  $x \in \text{Int}(A^c)$ , pak z toho samého rozkladu (v němž mají všechny tři množiny po dvou prázdný průnik, tj. každý bod  $M$  leží v právě jedné z těchto množin) už nemůže  $x$  ležet ani v  $\text{Int } A$ , ani v  $\partial A$ . V tom případě ale ani  $x$  neleží v uzávěru  $A$ , tj.  $x \in (\bar{A})^c$ .

**14.** Uvažujme úplně všechny otevřené koule, které jsou podmnožinami  $G$ , a tyto si nějak opíšeme – budeme je nazývat  $U_{r(\alpha)}(a_\alpha)$  – tedy vždy pro každé  $\alpha \in I$  je  $U_{r(\alpha)}(a_\alpha) \subseteq G$ , a zároveň jsme žádnou takovou otevřenou koulí nevynechali. Potřebujeme ukázat, že sjednocení těchto koulí nám dá opravdu  $G$ .

Předně protože každá z těchto koulí je podmnožinou  $G$ , musí i jejich sjednocení být podmnožinou  $G$  – pokud máme  $x \in \bigcup U_{r(\alpha)}(a_\alpha)$ , pak  $x$  leží v nějaké konkrétní kuličce  $U_{r(\beta)}(a_\beta)$ , ta je ale podmnožinou  $G$ , a tedy  $x \in G$ . Nyní naopak ukážeme, že  $G \subseteq \bigcup U_{r(\alpha)}(a_\alpha)$ . Nechť je  $x \in G$  libovolné. Protože  $G$  je otevřená, lze najít poloměr  $r > 0$  takový, že  $U_r(x) \subseteq G$ . Tato kulička ale musí být někde mezi našimi kuličkami  $U_{r(\alpha)}(a_\alpha)$ , protože jsme žádnou nevynechali! Tedy  $x \in U_r(x) \subseteq \bigcup U_{r(\alpha)}(a_\alpha)$ , z čehož plyne, že  $G$  je podmnožinou sjednocení těchto kuliček.

**15.** Nechť je  $\varepsilon > 0$  libovolné. Z řešeného příkladu víme, že lze najít  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n \geq n_0$  již platí  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Tedy také pro každý index  $n \geq n_0$  je

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Z definice limity to znamená, že  $\lim x_n = x$ .

**16.** Můžeme postupovat z definice, nebo využít cvičení 15 a toho, že pro každé přirozené  $n$  platí

$$\rho\left(\frac{1}{2^n}, 0\right) = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

**17.** Musí být od určitého indexu již konstantní, tj. posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  má v takovém prostoru limitu  $x$  právě tehdy, když od nějakého indexu  $n_0$  již pro všechny  $n \geq n_0$  je  $x_n = x$ . To plyne z toho, že pokud zvolíme  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , pak je kulička se středem v  $x$  a poloměrem  $\varepsilon$  v diskrétní metrice

dost malinkatá:  $U_\varepsilon(x) = \{x\}$ . Aby tedy od nějakého indexu již vždy  $x_n$  ležela v této kuličce, musí od tohoto indexu se již všechny  $x_n$  rovnat  $x$ .

**18.** Řešení je dost podobné minulému příkladu. Pokud máme bod  $x$  z  $\bar{A}$ , pak buď leží uvnitř  $A$  a k takovému se dá dokonvergovat pomocí konstantní posloupnosti  $(x, x, x, \dots)$ , nebo  $x$  leží na hranici  $A$ , a pak se k němu dá dokonvergovat body z  $A$  úplně stejně jako v posledním odstavci předchozího příkladu volením  $x_n \in U_{1/n}(x) \cap A$ . Naopak, pokud  $x$  je limitou nějaké posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$  bodů z  $A$ , pak stejně jako v minulém příkladě nemůže ležet v  $\text{Int}(A^c)$ , takže leží buď v  $A$ , nebo v  $\partial A$ , ale v obou případech tedy leží v  $\bar{A} = A \cup \partial A$ .

**20.** Funguje například  $\mathbb{R}$  se standardní metrikou.

**21.** Sestroj ho! Metrika na grafu může dobře posloužit. Kreativité se meze nekladou. Uměl bys zařadit, aby tyto kružnice měly nekonečno bodů?

**23.** Označme takovou „pозмěněnou eukleidovskou metrikou“ jako  $f(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ . Pak například pro body  $x = (0, 0)$ ,  $y = (1, 1)$  a  $z = (2, 2)$  neplatí trojúhelníková nerovnost, neboť  $f(x, z) = 8 > 2 + 2 = f(x, y) + f(y, z)$ .

**24.** Třeba metrika na grafech.

**27.** Dokážeme, že  $\lim \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$ . Nejprve si dokážeme pomocnou nerovnost

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n).$$

Z trojúhelníkové nerovnosti máme postupně

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y),$$

takže  $\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n) \leq \rho(x, x_n) + \rho(y_n, y)$ . Obdobným použitím trojúhelníkové nerovnosti na  $\rho(x_n, y_n)$  můžeme ukázat  $\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n)$ . Dohromady tyto dvě nerovnosti dávají

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n).$$

Tím už máme vlastně vyhráno, neboť pravá strana konverguje k nule. Ukažme si to z definice: Nechť  $\varepsilon > 0$  je libovolné. Protože  $\lim x_n = x$ , nalezneme index  $n_1 \in \mathbb{N}$  takový, že pro  $n \geq n_1$  je  $\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  (proč hledáme  $n_1$  k polovině  $\varepsilon$  místo k  $\varepsilon$  se ukáže za chvíli). Obdobně nalezneme  $n_2 \in \mathbb{N}$ , aby pro  $n \geq n_2$  bylo  $\rho(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Nyní zvolme za  $n_0$  to větší z čísel  $n_1, n_2$ . Pak pro každé  $n \geq n_0$  budou platit oba odhady současně, a tedy v kombinaci s pomocnou nerovností máme

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ke každému  $\varepsilon > 0$  jsme tedy schopni nalézt  $n_0 \in \mathbb{N}$ , aby pro všechna  $n \geq n_0$  bylo  $|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| < \varepsilon$ , takže  $\lim \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$ .



# Metrické prostory II – Lovci kompaktů

Milý příteli,

v minulém díle seriálu jsme vybudovali základy pro práci v metrických prostorech. V tomto díle se pustíme do větších hloubek a objevíme tam pořádné věty, které jsou dosti zásadní a netriviální. Neobejde se to bez pár úvodních kapitol, jejichž cílem bude porozumění pojmům úplnost a spojitost. Čti je tedy tak podrobně, abys měl(a) pocit, že rozumíš, co ty pojmy opravdu znamenají.

Poté už přijdou na řadu těžší věty a tvrzení. Tvrzení mají podobnou roli jako příklady, jelikož jsou obvykle dokazované (tj. řešené) a ukazují nějaké základní vlastnosti zkoumaných objektů. Typicky jsou ale o něco obecnější než příklady a častěji se na ně později odvoláváme. Naopak příklady nejsou pro celý seriál zas tak důležité a neboj se je (třeba jen dočasně) přeskakovat, když by ses na nich zasekl(a).

Věty jsou pak v našem seriálu opravdu významná, užitečná a někdy obtížná tvrzení. Jejich důkazy, ač dle našeho názoru pěkné a poučné, se Ti můžou zdát zprvu obtížné a je úplně v pořádku, pokud je napoprvé nepochopíš. Vůbec je dobré si při studiu látku projít vícekrát, myšlenky pak najednou začnou vypadat méně trikové a začneš pro ně mít intuici (toto platí i mimo studium metrických prostorů :)).

Zlatým grálem tohoto dílu bude kompaktnost. Kompaktnost je na první pohled prapodivná vlastnost, která má však spoustu velmi přátelských důsledků. Vědět o metrickém prostoru, že je kompaktní, je asi to nejlepší, co bychom si mohli přát. Na její docenění je ale potřeba vybudovat znalost jistých jednodušších vlastností, což uděláme v tomto díle, abychom příště již mohli využívat kompaktnosti v plné síle.

## Úplnost

**Pohádka 1.** *Kdysi vládl v PraSestánu matematicky nadšený král, který si na svém hradě pěstoval rozsáhlou sbírku konvergentních posloupností. Každá z nich bydlela ve svém metrickém prostoru a měla v něm nějakou limitu. Jedné noci se ale do hradu vloupal zloděj a některým posloupnostem jejich limity ukradl, tedy z některých metrických prostorů odebral body, které byly limitami králových posloupností (metrika na zbylé body fungovala pořád stejně, takže stále šlo o metrické prostory). Když to král zjistil, povolal svého nejlepšího matematika, že mu nyní původně konvergentní posloupnosti k ničemu nekonvergují a že neví, co bude dělat. Matematik však prohlásil: „To nevádí. Zloděj ať si ukradené body klidně nechá, my si vyrobíme nové. Měl jste totiž štěstí, že neukradl žádný bod z žádné z vašich posloupností. Protože posloupnosti samotné zůstaly nedotčeny, tak, přestože teď už nekonvergují, na nich lze poznat, že by měly konvergovat. Já vám tam ty limity doplním, a dokonce budou odpovídat těm původním!“*

Zkusme se na chvilku zamyslet nad tím, co znamená, že posloupnost konverguje (neboli že má limitu). Jak víme z minulého dílu, posloupnost konverguje, pokud pro libovolné  $\varepsilon > 0$  se od nějakého bodu celý zbytek posloupnosti nachází v kouli o poloměru  $\varepsilon$  se středem v její limitě. Co kdyby ale tyto koule nemusely mít střed v limitním bodě posloupnosti, ale stačilo by, aby měly

střed v nějakém jiném bodě? Ukáže se, že tato vlastnost stále jistým způsobem určuje posloupnosti, které by měly konvergovat.

**Definice 2.** Nechtě  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je posloupnost v něm. Řekneme, že tato posloupnost je *cauchyovská* (nebo že splňuje *Bolzanovu–Cauchyovu podmínku*), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m > n_0 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

nebo ekvivalentně

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : \rho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon.$$

První verze definice prostě říká, že jsou si body posloupnosti časem libovolně blízko. Tato formulace je hezký symetrická a typicky se cauchyovskost definuje tímto způsobem.

Druhá, ekvivalentní verze může být jednodušší na ověření a víc připomíná definici limity – pro danou toleranci  $\varepsilon$  se body časem všechny nachází v  $\varepsilon$ -kuličce kolem *někakého bodu posloupnosti*  $x_{n_0}$ . Vhodný bod  $x_{n_0}$  se může měnit pro různá  $\varepsilon$ , nemusí být „pevně daný“ narozdíl od limity.

Všimněme si, že cauchyovskost se dívá pouze na to, jak jsou od sebe vzdáleny body posloupnosti, ne na zbylé prvky našeho prostoru. Je to tedy vlastnost posloupnosti samotné, nezávisí na tom, jak vypadá zbytek prostoru (například zda má v sobě „díry“). Morální podstata je, že jde o posloupnost, která „by měla“ konvergovat. Body posloupnosti jsou k sobě totiž od nějakého bodu velmi blízko, a tak bychom očekávali existenci limity. Obecně ale žádná limita nemusí existovat.

**Příklad 3.** Dokaž, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

*Řešení.* Zvolíme si  $\varepsilon > 0$  a dokážeme, že časem budou všechny body nejvýše  $2\varepsilon$  daleko od sebe. Protože posloupnost konverguje, existuje její limita  $x$ . Od jistého  $n_0$  dál tedy jsou všechny body posloupnosti nejvýše  $\varepsilon$  daleko od  $x$ . Pak ale pro všechny dvojice  $n, m > n_0$  máme z trojúhelníkové nerovnosti  $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ . To přesně znamená, že je posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  cauchyovská.<sup>1</sup>

Cauchyovskost je tedy slabší než konvergence. To vskutku odpovídá intuici – posloupnosti mající limitu vskutku splňují, že by měly mít limitu.

**Příklad 4.** Uvažujme metrický prostor  $\mathbb{R}$  se standardní metrikou a odeberme z něj bod 0. Uvažujme posloupnost  $x_n = \frac{1}{n}$ . Dokaž, že tato posloupnost je cauchyovská, ale nemá limitu.

*Řešení.* Nejprve poznamenejme, že pokud z libovolného prostoru odebereme libovolnou množinu bodů, zbylé body s metrikou zúženou pouze na ně budou tvořit metrický prostor, protože axiomy definující metriku budou stále platit, pokud platily předtím.

Nyní k samotné úloze: Uvažujme tutěž posloupnost ze zadání jakožto posloupnost v celém  $\mathbb{R}$ . Tam má posloupnost patrně limitu nula. Tudíž musí být cauchyovská. Z jednoznačnosti limity pak víme, že žádný další bod  $\mathbb{R}$  nemůže být také limitou této posloupnosti, protože pak by měla dvě limity. Tudíž ani po odebrání nuly nemůže žádný jiný bod být limitou, a nula již v našem prostoru není, a tudíž limita nyní neexistuje.

Povšimni si elegance řešení. Nemuseli jsme nic počítat s epsilony, jen jsme si všimli, že náš prostor je vlastně jen  $\mathbb{R}$ -ko s *dírou*, a že naše posloupnost konverguje právě k té díře. Za chvíli uvidíme, že každý prostor, ve kterém existují nekonvergující cauchyovské posloupnosti je tohoto tvaru – byl to prostor bez děr, ze kterého někdo odebral pár bodů a zbyly po nich díry. To motivuje zabývat se prostory bez děr, kterým se v matematice říká *úplné*.

**Definice 5.** Metrický prostor  $(M, \rho)$  nazveme *úplný*, pokud je v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní. O množině  $A \subseteq M$  řekneme, že je *úplná*, pokud každá cauchyovská posloupnost bodů v  $A$  má také v  $A$  limitu.

<sup>1</sup>Výsledný odhad byl nakonec  $2\varepsilon$ , ne  $\varepsilon$ , ale tento výraz stále umí být libovolně malý. Případně problém lze obejít volbou  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$  v podmínce limity.

Úplnost je velmi užitečná. Dokázat, že je nějaká posloupnost konvergentní, může být obecně velmi obtížné. Museli bychom totiž hledat limitu a u té není jasné, kde ji vůbec vzít. Zato ověřit cauchyovskost je snadné – stačí se podívat, jak daleko jsou od sebe body posloupnosti. Pokud jsou časem dost blízko, je posloupnost cauchyovská. No a pokud se pohybujeme v úplném metrickém prostoru, pak už automaticky má limitu.

**Cvičení 1.** Dokaž, že každý konečný metrický prostor je úplný.

Většina prostorů, se kterými se běžně pracuje, je úplná. Důležitý příklad pro nás budou reálná čísla, byť tuto větu nebudeme dokazovat.

**Věta 6.** (úplnost reálných čísel) *Prostor  $\mathbb{R}$  se standardní metrikou  $\rho(x, y) = |x - y|$  je úplný. Obecněji, prostor  $\mathbb{R}^n$  s eukleidovskou metrikou je úplný pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ .*

Naopak racionální čísla  $\mathbb{Q}$  s metrikou  $\rho(x, y) = |x - y|$  úplná nejsou. Například je možné vytvořit posloupnost čím dál lepších racionálních aproximací iracionálních čísel  $\pi$  nebo  $\sqrt{2}$  – tyto aproximační posloupnosti budou v  $\mathbb{Q}$  cauchyovské, ale přitom  $\pi$  ani  $\sqrt{2}$  v  $\mathbb{Q}$  neleží. To je důležitý rozdíl mezi množinami  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R}$ . Dokonce je to jeden ze způsobů, jak  $\mathbb{R}$  definovat (ekvivalentních způsobů je ovšem víc, takže podle toho, jaký se zvolí, je předchozí věta buď opravdu věta, která se musí dokázat, nebo je to přímá vlastnost definice reálných čísel).

**Cvičení 2.** Nechť  $(M, \rho)$  je úplný metrický prostor a  $F \subseteq M$ . Dokaž, že  $F$  je úplná, právě když je uzavřená.

**Věta 7.** (zúplnění prostoru) *Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor. Pak  $M$  lze zúplnit, neboli existuje úplný metrický prostor  $(\bar{M}, \bar{\rho})$  takový, že  $M \subseteq \bar{M}$  a  $\bar{\rho} = \rho$  na  $M$ . Dokonce  $M$  je hustá<sup>2</sup> v  $\bar{M}$  a toto zúplnění je v jistém smyslu jednoznačné (resp. všechna taková zúplnění jsou v jistém smyslu stejný prostor).*

Větu dokazovat nebudeme, jen poznamenejme, že důkaz zúplněný prostor vytvoří v podstatě jako množinu všech limit cauchyovských posloupností z původního prostoru. Pokud tedy zúplníme úplný prostor, nic se na něm nezmění. Věta nám říká, že nikdy nemusíme pracovat s neúplným prostorem. Všechny neúplné prostory totiž vznikly tak, že někdo vzal úplný prostor a udělal v něm díry.

Jako jednu ukázkou toho, že úplné prostory mají pěkné vlastnosti, si dokážeme Banachovu větu, která se věnuje problému řešení rovnice  $f(x) = x$  na úplném metrickém prostoru. V této rovnici  $f$  značí funkci, která navíc musí mít speciální vlastnosti (například musí být takzvané spojitá). Než se proto k Banachově větě dostaneme, podívejme se nejdřív na funkce jako takové, a speciálně pak na funkce spojitě. Budeme je potkávat stále častěji.

## Zobrazení

Naším společníkem na pouti tímto a přístím dílem seriálu budou *funkce* (nebo také *zobrazení*). V této kapitole si jen krátce shrneme některé základní značení používané pro funkce, které budeme používat.

Funkci si můžeme představit jako mašinku, která něco přijímá a něco jiného vrací. To, co funkce přijímá a vrací, mohou být čísla, množiny, vánoční stromčky, ale i jiné funkce. Obvykle je ale možné množinu všech objektů, které daná funkce přijímá (tzv. *argumenty*), nějak rozumně popsat,

<sup>2</sup>To znamená, že uzávěr  $M$  je roven celému prostoru  $\bar{M}$ . Proto také nový úplný prostor značíme  $\bar{M}$ , tj. stejně jako uzávěr  $M$ . Pokud si vzpomeneš na cvičení v prvním díle seriálu, že uzávěr množiny  $A$  je roven množině limit všech posloupností v  $A$ , pak by Ti značení  $\bar{M}$  mělo připadat ještě přirozenější – zúplnění  $\bar{M}$  je nadmnožina  $M$ , do které přidáme všechny limity (a tím odebereme neúplnostní díry).

stejně jako lze popsat množinu objektů, které funkce vrací (*funkční hodnoty*). Například funkce dolní celé části  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  dělá z reálných čísel celá čísla zaokrouhlením dolů. Takovou situaci značíme  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Šlo by i říct, že  $f$  jde z reálných čísel do reálných čísel, značeno  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Příklad 8.** Funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definovaná jako  $f(x) = x^2$  každé reálné číslo umocní na druhou. Protože jsou všechny druhé mocniny reálných čísel nezáporné, leží všechny funkční hodnoty vskutku v  $\mathbb{R}_0^+$ . Mohli bychom ale říct, že  $f$  je  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a stále by to byla pravda, jen to o té funkci tolik neříká.

**Příklad 9.** Funkce  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definovaná jako  $f(x, y) = (x, -y)$  bodům roviny přiřazuje body roviny s opačnou  $y$ -ovou složkou. Je to, geometricky vzato, osová souměrnost podle souřadné osy  $x$ .

**Příklad 10.** Pokud  $A$  je libovolná množina, pak každá funkce  $a: \mathbb{N} \rightarrow A$ , která  $n$  přiřadí  $a_n \in A$ , odpovídá posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^\infty$ .

**Definice 11.** Buď  $f: A \rightarrow B$  zobrazení a  $C \subseteq A$ . Množinu všech hodnot, na které se body z  $C$  zobrazí, nazýváme *obrazem*  $C$  a značíme ji

$$f(C) = \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Nechť naopak  $D \subseteq B$ , pak množinu všech bodů, které se zobrazí do  $D$ , nazýváme *vzorem*  $D$  a značíme ji

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}.$$

**Příklad 12.** Pro  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danou předpisem  $f(x) = x^2$  platí  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$ , což jsou tedy všechny možné hodnoty, kterých může  $f$  nabývat. Stejně tak ale platí třeba  $f(\langle 0, \infty \rangle) = \mathbb{R}_0^+$ . Hodnoty  $x$ , které po aplikování  $f$  dají číslo nejvýše 4, lze popsat množinou

$$f^{-1}(\langle -\infty, 4 \rangle) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\} = \langle -2, 2 \rangle.$$

**Definice 13.** Nechť  $f: A \rightarrow B$  a  $C \subseteq A$ . Výrazem  $f|_C$  budeme značit funkci  $f$  zúženou na množinu  $C$ , tedy funkci, která je definovaná na  $C$  a je v bodech  $C$  identicky rovná funkci  $f$ .

**Příklad 14.** Funkci  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou jako  $f(x) = x^3$  můžeme zúžit na funkci  $f|_{\mathbb{N}}$ , čímž získáme funkci představující posloupnost  $(1, 8, 27, \dots)$ .

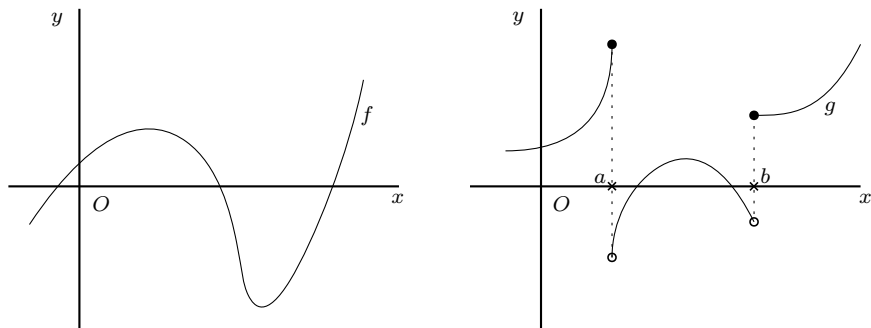
**Definice 15.** Řekneme, že funkce  $f: A \rightarrow B$  je *na*  $B$ , pokud množina jejích funkčních hodnot je celé  $B$ . Řekneme, že funkce je *prostá*, pokud neexistují dva různé body  $a_1, a_2$  takové, že  $f(a_1) = f(a_2)$ . Řekneme, že funkce je *bijekce*, pokud je prostá a na.

**Příklad 16.** Funkce  $\frac{1}{x}$  definovaná na  $\mathbb{R}^+$  je bijekce na  $\mathbb{R}^+$ . Každé  $y \in \mathbb{R}^+$  umíme vyjádřit jako  $f(\frac{1}{y})$  a zároveň pro různá kladná  $x_1, x_2$  jsou i hodnoty  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$  různé.

To by bylo k funkcím v obecnosti všechno a můžeme se vrhnout na nějaké zajímavější vlastnosti, jako třeba spojitost.

## Spojitost

Se spojitou funkcí ses s největší pravděpodobností již někdy setkal(a), i když o tom možná nevíš. Možná jsi o některých funkcích slyšel, že jsou spojité, ale nevíš přesně, co se tím myslí. V této kapitole se pokusíme nějak intuitivně odůvodnit to, jak se obvykle spojitost zavádí, tak, aby to nebylo příliš strašidelné, a zvykneme si na některé vlastnosti spojitých funkcí.



Vlevo příklad spojité funkce, vpravo příklad funkce nespojité v bodech  $a$  a  $b$ .

Co tedy ta spojitost je? Někdy se říká, že reálná funkce je spojitá, když má souvislý graf (tedy dá se nakreslit jednou čarou). Tento pohled sice dává dobrou přibližnou představu, ale není tak úplně správný.

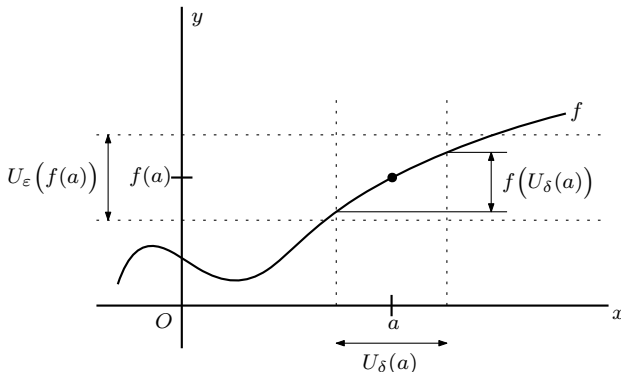
Najdeme si tedy poněkud lepší definici. Velmi neformálně se dá říct, že pokud je funkce spojitá, tak nikde skokově nemění svoji hodnotu. Anebo jinak, malá změna argumentu udělá jen malou změnu funkční hodnoty. Jak tuto myšlenku ale popsat matematicky přesně? Bohužel nejde přímočaře říct, že má existovat nějaká konstanta  $c$ , aby se při změně argumentu o libovolné  $\delta$  funkční hodnota změnila o nejvýše  $c\delta$ . Spojitá funkce totiž může růst velmi rychle. Například funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná jako  $f(x) = x^2$  je spojitá, ale přesto pokud se s  $x$ -em blížíme k nekonečnu, bude růst libovolně rychle a nebude splňovat vztah, který jsme uvedli. Tato vlastnost nám tedy spojitost nedefinuje, není však zbytečná a více se o ní můžeme dočíst v rámečku o něco dále.

Trik v zadefinování spojitosti je v tom, že místo toho, abychom rovnou pohnuli argumentem a koukali se, o kolik se změní funkční hodnota, si nejdřív předepíšeme, že funkční hodnota se má změnit nejvýše o  $\varepsilon$ , a poté najdeme  $\delta$  takové, že pokud se pohneme z daného bodu nejvýše o  $\delta$ , hodnota se změní nejvýše o  $\varepsilon$ . Formálně nám totéž říká tato definice:

**Definice 17.** Nechtě  $(X, \rho)$ ,  $(Y, \sigma)$  jsou metrické prostory a  $f: X \rightarrow Y$ . O  $f$  řekneme, že je *spojitá*, pokud

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \rho(x, y) < \delta \implies \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

To znamená, že pokud se od bodu  $x$  pohneme o nejvýše  $\delta$ , funkční hodnota se změní o nejvýše  $\varepsilon$ , a že to umíme zařídit pro libovolné kladné  $\varepsilon$  a libovolný bod  $x$  původního prostoru.



Ve skutečnosti každá funkce, která splňuje vztah  $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < c\delta$ , je automaticky spojitá. Těmto funkcím se říká *lipschitzovské* (nebo taky *c-lipschitzovské*, pokud záleží na tom, kolik přesně je  $c$ ), a mají spoustu přátelských vlastností. Spojitost samotná totiž dovoluje funkcím chovat se trochu zákeřně, protože, ač se nemohou skokovitě měnit, mohou se hýbat libovolně rychle.

Například dlouho se věřilo, že každá spojitá funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  má konečnou derivaci na „velké množině bodů“, tedy že jí tam lze přiložit tečnu, která ji v nějakém smyslu dobře aproximuje. To se později ukázalo být mýlkou, když byl nalezen příklad funkce, která je velmi špičatá a nelze jí přiložit tečnu v žádném bodě, ale přesto je spojitá. Těto funkci se říká Weierstrassova a její existence značně zaskočila tehdejší matematiku. Ukázalo se tím, že i spojitě funkce nemusí být tak slušně vychované, jak bychom si přáli. Zato lipschitzovské funkce už uvedenou vlastnost splňují a s ní i mnoho dalších, což částečně zjistíme už v tomhle díle seriálu. Zatím si však vystačíme se spojitými funkcemi. Ale neboj, ač se mohou někdy chovat prapodivně, my budeme studovat hlavně ty pěkné vlastnosti :).

Ještě k definici poznamenejme, že definuje spojitou funkci mezi dvěma metrickými prostory. Standardní spojitost funkcí  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je pak jen speciální případ, stačí za oba metrické prostory vzít  $\mathbb{R}$  se standardní metrikou. Nejlepší bude si na spojitost zvyknout pomocí příkladů:

**Příklad 18.** Dokaž, že funkce  $f(x) = x^2$  je spojitá.

*Řešení.* Stačí uvažovat  $x \in \mathbb{R}$  libovolné a  $1 > \varepsilon > 0$  (uvažujeme jen  $\varepsilon < 1$ , protože tím to bude platit i pro větší epsilony, a zjednoduší se nám volba  $\delta$ , když bude platit  $\varepsilon^2 < \varepsilon$ ). Hledáme  $\delta$ , které vyhovuje definici. Položme<sup>3</sup>  $\delta = \frac{1}{4(|x|+1)}\varepsilon$  a opravdu, pokud si každé  $y \in (x - \delta, x + \delta)$  napíšeme jako  $y = x + t$  pro  $|t| < \delta$ , dostaneme

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |(x + t)^2 - x^2| = |2xt + t^2| \leq |2xt| + |t^2| < 2x\delta + \delta^2 \\ &< \varepsilon \left( \frac{1}{2(|x| + 1)} + \frac{1}{16(|x| + 1)^2} \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Toto lze provést pro každé  $x$  a  $\varepsilon$ , čímž je definice ověřena.

**Cvičení 3.** Rozmysli si, že libovolná funkce z diskrétního prostoru do libovolného metrického prostoru je spojitá.

**Cvičení 4.** Rozmysli si, že v definici spojitě funkce by šlo psát

$$\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)),$$

tedy že jakkoliv malou  $\varepsilon$ -kuličku se středem v  $f(x)$  zvolíme, vždy jsme schopni najít  $\delta$ -kuličku se středem v  $x$ , kterou  $f$  zobrazí do původní  $\varepsilon$ -kuličky.

**Cvičení 5.** Nechť  $(X, \rho)$  a  $(Y, \sigma)$  jsou metrické prostory,  $c$  je kladné reálné číslo a  $f : X \rightarrow Y$  splňuje pro každé body  $x, y \in X$

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq c \cdot \rho(x, y).$$

Dokaž, že pak je  $f$  spojitá funkce.

**Úloha 1.** Uvažujme jako metrický prostor vrcholy grafu mající tvar  $n$ -úhelníku (tj. množinu  $V$  obsahující  $n$  vrcholů spojených postupně dokolečka hranami) s grafovou metrikou  $\rho$ .

<sup>3</sup>Volba  $\delta$  je taková, aby odhad vyšel. Lze samozřejmě volit mnoho různých  $\delta$ , ale zdálo se nám, že tato volba vede k nejkratšímu řešení.

Nechť  $f : V \rightarrow \mathbb{N}$  splňuje, že pro libovolná  $u, v \in V$  je  $|f(u) - f(v)| \leq \rho(u, v)$ . Pro která  $n$  musí vždy (ve smyslu „pro každou takovou  $f$ “) existovat nějaké sousední vrcholy  $x, y$  takové, že  $f(x) = f(y)$ ?

Podívejme se na příklad spojitosti pro funkci více proměnných, která některým bodům roviny přiřazuje čísla. Již v takovém případě je dokazování spojitosti trochu pracné a ošklivé, byť celkem přímočaré (prostě chceme, aby pro dostatečně blízké body  $(x, y)$  a  $(x + t, y + s)$  byla hodnota  $|f(x, y) - f(x + t, y + s)|$  také malá). Typicky tak nechceme dokazovat spojitost takovýmto způsobem, ale chceme si nějak ulehčit práci. To naštěstí často jde, jak uvidíme.

**Příklad 19.** Dokaž, že funkce  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  daná předpisem  $f(x, y) = x/y$  je spojitá, kde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

*Řešení.* Nechť  $\varepsilon > 0$  je libovolné a  $z_0 = (x, y) \in A$  je bod, v němž ověřujeme spojitost. Zatím nevolme konkrétní  $\delta$ , prostě předpokládejme, že  $\delta$  je kladné a splňující  $y - \delta > 0$ , aby  $U_\delta(z_0) \subseteq A$ . Spočteme, jak moc se od sebe může lišit  $f(x + t, y + s)$  a  $f(x, y)$  pro  $(x + t, y + s) \in U_\delta(z_0)$ , a na základě toho zvolíme  $\delta$  dost malé, aby se funkční hodnoty vždy lišily nejvýše o  $\varepsilon$ .

Mějme tedy  $(x + t, y + s) \in U_\delta(z_0)$ . Předně platí  $y + s > 0$  z předpokladu  $y - \delta > 0$ . Můžeme třeba<sup>4</sup> odhadovat

$$\begin{aligned} |f(x + t, y + s) - f(x, y)| &= \left| \frac{x + t}{y + s} - \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{(x + t)y - x(y + s)}{y(y + s)} \right| = \frac{|ty - sx|}{y(y + s)} \leq \frac{|t|y + |s||x|}{y(y - \delta)} \\ &\leq \frac{\sqrt{(t^2 + s^2)(y^2 + x^2)}}{y(y - \delta)} < \frac{\delta\sqrt{x^2 + y^2}}{y(y - \delta)}, \end{aligned}$$

kde předposlední nerovnost je Cauchyova–Schwarzova nerovnost říkající v tomto případě

$$(ty + sx)^2 \leq (t^2 + s^2)(y^2 + x^2)$$

pro libovolná reálná  $x, y, t, s$  (a v této zjednodušené podobě ji můžeš dokázat jednoduše roznásobením závorek; je to ale jedna z nerovností, co je dobré znát, neboť se často hodí). Poslední nerovnost pak plyne z toho, že  $(x + t, y + s) \in U_\delta(x, y)$ , takže pro eukleidovskou vzdálenost bodů  $(x, y)$  a  $(x + t, y + s)$  platí

$$\delta > \rho_2((x, y), (x + t, y + s)) = \sqrt{((x + t) - x)^2 + ((y + s) - y)^2} = \sqrt{t^2 + s^2}.$$

Odhad

$$|f(x + t, y + s) - f(x, y)| < \frac{\delta\sqrt{x^2 + y^2}}{y(y - \delta)}$$

již nezávisí na konkrétních hodnotách  $t$  a  $s$ . Umíme zvolit  $\delta > 0$  dost malé tak, aby celá pravá strana byla menší než  $\varepsilon$ ? Chceme

$$\frac{\delta\sqrt{x^2 + y^2}}{y(y - \delta)} < \varepsilon,$$

což lze roznásobením a upravením ekvivalentně převést na  $\delta(\sqrt{x^2 + y^2} + y\varepsilon) < y^2\varepsilon$ , neboli

$$\delta < \frac{y^2\varepsilon}{\sqrt{x^2 + y^2} + y\varepsilon}.$$

<sup>4</sup>Úplně bez problémů by šlo postupovat i jinými nerovnostmi. Pointou je nakonec dostat výraz závisející jen na bodu  $(x, y)$  a hodnotě  $\delta$ , který navíc umí být libovolně malý při volbě malého  $\delta$ .

Pokud tedy máme daný bod  $(x, y) \in A$  a  $\varepsilon > 0$ , umíme volbou  $\delta$  splňující předchozí nerovnost a  $y - \delta > 0$  zařídit, aby

$$|f(x+t, y+s) - f(x, y)| < \frac{\delta\sqrt{x^2+y^2}}{y(y-\delta)} < \varepsilon$$

pro libovolný bod  $(x+t, y+s)$  z  $\delta$ -kuličky kolem  $(x, y)$ . To dokazuje, že  $f$  je spojitá funkce.

Pro snazší určování spojitosti funkcí se hodí následující cvičení a tvrzení, která říkají, že skládání funkcí i základní aritmetické operace typicky zachovávají spojitost.

**Tvrzení 20.** *Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojitá zobrazení. Pak platí:*

- (1) *Funkce daná součtem  $f(x) + g(x)$  je na  $M$  spojitá.*
- (2) *Funkce daná součinem  $f(x) \cdot g(x)$  je na  $M$  spojitá.*
- (3) *Pokud  $g$  není v žádném bodě  $M$  nulová, pak funkce daná podílem  $f(x)/g(x)$  je na  $M$  spojitá.*

Například z tohoto tvrzení ihned plyne, že libovolný polynom  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  je spojitý – stačí vědět, že funkce  $g(x) = x$  je spojitá, načež postupně i  $x \cdot x = x^2, x^3, \dots, x^n$  jsou spojité, a pak i jejich součty jsou spojité.

Někdy se též spojitost definuje vlastností z následujícího cvičení, která říká, že spojité funkce vzorují otevřené množiny na otevřené množiny. Tato alternativní definice nám přijde méně názorná, ale je to každopádně užitečná vlastnost, neboť se pomocí ní dá snadno ukazovat otevřenost (a s lehkou modifikací uzavřenost) množin. Například ve chvíli, kdy víme, že funkce  $f(x, y) = x^2 + xy - y^3$  je na  $\mathbb{R}^2$  spojitá, můžeme hned říct, že množina

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy > y^3\}$$

je otevřená, neboť  $A$  je vzorem intervalu  $(0, \infty)$  při zobrazení  $f$  (symbolicky  $M = f^{-1}((0, \infty))$ ), tento interval je otevřený a  $f$  je spojitá.

**Cvícení 6.** Nechť  $(X, \rho)$  a  $(Y, \sigma)$  jsou metrické prostory. Dokaž, že  $f : X \rightarrow Y$  je spojitá právě tehdy, když pro každou  $G$  otevřenou podmnožinu  $Y$  platí, že  $f^{-1}(G)$  je otevřená v  $X$ .

**Cvícení 7.** Pomocí předchozího cvičení ukaž, že funkce  $f$  mezi metrickými prostory  $(X, \rho)$  a  $(Y, \sigma)$  je spojitá právě tehdy, když pro každou  $F$  uzavřenou podmnožinu  $Y$  je i  $f^{-1}(F)$  uzavřená v  $X$ .

**Cvícení 8.** Nechť  $(X, \rho)$ ,  $(Y, \sigma)$ ,  $(Z, \tau)$  jsou metrické prostory a  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  jsou spojité funkce. Pak složení těchto funkcí (tj.  $h(x) = g(f(x))$  pro  $x \in X$ ) je spojitá funkce.

Tato tři nevinná cvičení jsou poněkud magická – místo toho, aby se dívala na vzdálenosti bodů, jako se dívá klasická definice spojitosti, dívají se jen na to, jak se na sebe zobrazují otevřené (uzavřené) množiny. Na tom je v podstatě postaven obor topologie, který na metriku zapomíná a nechává si jen otevřené a uzavřené množiny. Ty stále splňují pravidla, na která jsme přišli v prvním dílu seriálu, tedy že sjednocení otevřených množin je otevřená množina a že průnik dvou otevřených množin je otevřená množina. Každý metrický prostor je tedy topologickým prostorem, protože otevřené množiny splňují tato pravidla. Mnoho věcí, které si ukazujeme v metrických prostorech, platí i v topologických prostorech, které jsou mnohem obecnější a obvykle tam žádná metrika nejde zadefinovat.

Nakonec si ukážeme ještě jeden jiný způsob, jak rozumět spojitosti. Ten se nám bude často hodit, a navíc vypadá elegantně – říká, že spojité funkce dovolují zaměňovat pořadí limity a výpočtu funkce.



**Věta 21.** (Heineova) Necht'  $(X, \rho)$  a  $(Y, \sigma)$  jsou metrické prostory a  $f : X \rightarrow Y$  je zobrazení. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (1)  $f$  je spojité.
- (2) pro každou posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  bodů v  $X$  konvergující k  $x \in X$  platí, že  $\lim f(x_n) = f(x)$  (tj.  $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ ).

*Důkaz.* Necht' je nejdříve  $f$  spojité. Buď  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  posloupnost bodů v  $X$  s limitou  $x$ . Ověříme, že posloupnost  $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$  má limitu  $f(x)$ . Necht' je  $\varepsilon > 0$  libovolné. Ze spojitosti  $f$  nalezneme  $\delta > 0$  takové, aby  $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$ . K  $\delta$  nalezneme  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro  $n \geq n_0$  platí  $x_n \in U_\delta(x)$ . Pak ale pro  $n \geq n_0$  také platí

$$f(x_n) \in f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)),$$

tedy  $\sigma(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ . Odtud plyne, že  $\lim f(x_n) = f(x)$ .

Necht' je naopak  $f$  nespojité. To po znegování definice spojitosti znamená, že existuje bod  $x \in X$  a existuje konkrétní  $\varepsilon > 0$  takové, že ať bude  $\delta > 0$  jakékoliv, stejně bude existovat problematický bod  $y \in X$ , který je sice blízko k  $x$  ( $\rho(x, y) < \delta$ ), ale funkční hodnoty v těchto bodech budou od sebe daleko, tj.  $\sigma(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$ .

Můžeme tak zkonstruovat posloupnost bodů v  $X$  tak, že pro  $\delta = 1/n$  zvolíme za bod  $x_n$  odpovídající hodnotu  $y$ , která je k  $x$  blízko, ale funkční hodnotou je od  $f(x)$  daleko – platí nám tedy

$$\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}, \quad \sigma(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon.$$

Pak zřejmě body  $x_n$  konvergují k  $x$ , ale posloupnost funkčních hodnot  $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$  určitě k  $f(x)$  nekonverguje, protože bude vždy alespoň  $\varepsilon$  daleko od  $f(x)$ . Tedy výrok (2) neplatí.  $\square$

Vybavení úplností i spojitostí se můžeme konečně podívat na první hezkou větičku přesahující rámec metrických prostorů, Banachovu větu.

## Banachova věta

V této kapitole si ukážeme jednu z nejznámějších vět o pevném bodě, *Banachovu větu o kontrakci*. *Pevným bodem* (libovolného) zobrazení  $f : M \rightarrow M$  se myslí takové  $x \in X$ , že  $f(x) = x$ . Věty o pevných bodech jsou pak tvrzení, která za určitých předpokladů o množině  $X$  a o zobrazení  $f$  vyvozují existenci nebo jednoznačnost pevného bodu.

Ve škole po Tobě asi ještě nechtěli, abys hledal(a) pevné body, ale určitě jsi řešil(a) spousty rovnic, jako třeba

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \text{nebo} \quad 25^x + 5^x = 3.$$

Řešení rovnice lze ale vždy převést na hledání pevného bodu, v našich příkladech například můžeme ekvivalentně řešit<sup>5</sup>

$$x^2 + 3x + 3 = x \quad \text{nebo} \quad 25^x + 5^x - 3 + x = x,$$

tj. hledat pevné body zobrazení

$$f(x) = x^2 + 3x + 3, \quad \text{respektive} \quad f(x) = 25^x + 5^x - 3 + x.$$

<sup>5</sup>Obecně stačí nejdřív všechny členy převést z pravé strany rovnice na levou, a pak přičíst k oběma stranám  $x$ . Není to ale jediná cesta, jak rovnici převést na hledání pevného bodu zobrazení. Někdy se může hodit být s úpravami rovnice trochu kreativnější, například proto, aby výsledné zobrazení, jehož pevný bod se hledá, bylo jednodušší nebo splňovalo nějaké hezké vlastnosti.

Zároven i když nejsme schopni nějakou rovnici přímo vyřešit, může být užitečné vědět, že nějaké řešení existuje, případně kolik jich je.

Banachova věta pro  $f : M \rightarrow M$  jednak požaduje, aby  $M$  byl úplný metrický prostor, a jednak aby  $f$  byla takzvaná kontrakce. Řekněme si nejdřív, co to je.

**Definice 22.** Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ . O zobrazení  $f : M \rightarrow M$  řekneme, že je to *kontrakce*, pokud pro každá  $x, y \in M$  platí

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot \rho(x, y).$$

Kontrakce k sobě vlastně přibližuje body – například pokud  $\lambda = 1/2$ , pak pro každé dva různé body  $x, y$  je

$$\frac{\rho(f(x), f(y))}{\rho(x, y)} \leq \frac{1}{2},$$

tj.  $f(x)$  a  $f(y)$  jsou k sobě alespoň dvakrát blíže než  $x$  a  $y$ . Zároveň podle cvičení 5 je každá kontrakce automaticky spojitá.

Teď už jsme plně připraveni na Banachovu větu.

**Věta 23.** (Banachova o kontrakci) Necht  $(M, \rho)$  je úplný metrický prostor a  $f : M \rightarrow M$  je kontrakce. Pak existuje právě jeden bod  $p \in M$  splňující  $f(p) = p$ .

*Důkaz.* Důkaz má pěknou myšlenku: Prostě začneme z nějakého bodu  $x_0 \in M$  budovat posloupnost  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Kdyby tato posloupnost měla limitu  $p$ , pak by platilo  $p = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(p)$ , a  $p$  by tak bylo hledaným bodem. To, že  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  má limitu, bude plynout z úplnosti  $M$  za předpokladu, že  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  je Cauchyovská. A tenhle poslední chybějící dílek vyplyne z toho, že  $f$  je kontrakce, takže body prostoru nezobrazuje „moc daleko“.

Necht je tedy  $x_0 \in M$  libovolně zvolený bod a definujme posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  skrze  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Označme si jako  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  koeficient kontrakce  $f$ , aby platilo

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot \rho(x, y), \quad x, y \in M.$$

Všimneme si, že pro  $n \in \mathbb{N}_0$  platí

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \lambda \cdot \rho(x_n, x_{n-1})$$

a tento odhad můžeme opakovat:

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda \cdot \rho(x_n, x_{n-1}) \leq \lambda^2 \cdot \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq \lambda^n \rho(x_1, x_0).$$

Protože  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ , pravá strana konverguje k nule, takže sousední body  $x_n, x_{n+1}$  jsou s rostoucím  $n$  stále blíže a blíže.

To nám na Cauchyovskost posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  ještě úplně nestačí, neboť bychom chtěli odhad na vzdálenost obecných bodů  $x_n$  a  $x_m$  pro  $n > m$ . Pomůžeme si trojúhelníkovou nerovností:

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n-1}) + \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + \rho(x_{m+1}, x_m) \leq (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda^m) \cdot \rho(x_1, x_0).$$

Otázkou je, zda součet mocnin  $\lambda$  v závorce umí být pro velká  $m, n$  libovolně blízko nuly. Upravme si ho pomocí vzorce pro součet<sup>6</sup> geometrické řady:

$$\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda^m = \lambda^m (1 + \lambda + \dots + \lambda^{n-m-1}) = \lambda^m \frac{1 - \lambda^{n-m}}{1 - \lambda} = \frac{\lambda^m - \lambda^n}{1 - \lambda} \leq \frac{\lambda^m}{1 - \lambda}.$$

<sup>6</sup>Konkrétně, pro  $|q| \neq 1$  platí  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .

To znamená, že

$$\rho(x_n, x_m) \leq \lambda^m \cdot \frac{\rho(x_1, x_0)}{1 - \lambda},$$

což překvapivě nezávisí na hodnotě  $n$ , a zároveň tento odhad konverguje (v indexu  $m$ ) k nule – pokud je  $m$  velké, je pravá strana malá, a všechny body  $x_n$ ,  $n > m$  jsou už velmi blízko  $x_m$ . Formálně, pokud dostaneme libovolné  $\varepsilon > 0$ , tak můžeme zvolit  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro  $m \geq n_0$  již platí

$$\lambda^m \cdot \frac{\rho(x_1, x_0)}{1 - \lambda} < \varepsilon.$$

Pak pro každá  $n > m \geq n_0$  přirozená bude

$$\rho(x_n, x_m) \leq \lambda^m \cdot \frac{\rho(x_1, x_0)}{1 - \lambda} < \varepsilon,$$

takže  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  je cauchyovská.

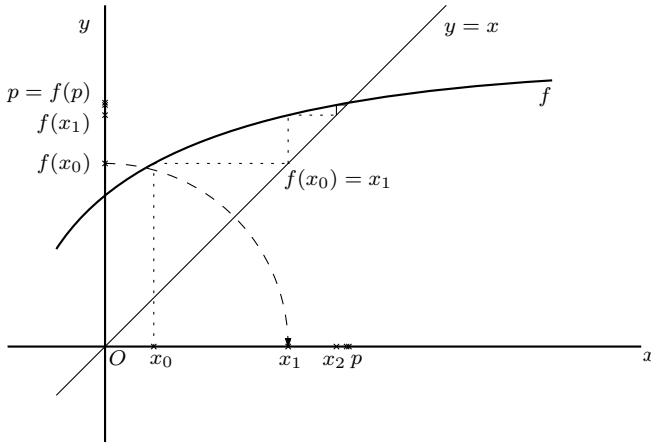
Z úplnosti prostoru  $M$  má tato posloupnost limitu  $p \in M$ . Nakonec, jak jsme zmínili na začátku důkazu, díky spojitosti  $f$  (každá kontrakce je spojitá) dostaneme

$$f(p) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = p.$$

Ukázali jsme tak, že nějaký vyhovující bod  $p$  existuje. Věta ještě říká, že těchto bodů není víc, takže musíme dokázat ještě tuto část. Nechť  $q \in M$  je také bod splňující  $f(q) = q$ . Pak

$$\rho(p, q) = \rho(f(p), f(q)) \leq \lambda \cdot \rho(p, q),$$

takže  $(1 - \lambda) \cdot \rho(p, q) \leq 0$ . Protože  $1 - \lambda$  je kladné a  $\rho(p, q)$  je nezáporná vzdálenost, musí platit  $\rho(p, q) = 0$ . Tedy  $p = q$ . □



V důkazu je úplně jedno, jak si počáteční bod  $x_0$  posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  zvolíme. V každém případě tato posloupnost bude konvergovat k pevnému bodu  $p$ , a navíc ji jsme schopni rekurentně počítat, protože víme, že  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Banachova věta (respektive její důkaz) nám tudíž navíc popisuje, jak se pevný bod kontrakce dá v principu najít.

Pomocí Banachovy věty se dají hledat přibližná řešení rovnic na počítači (případně v ruce během dlouhých zimních večerů). Na začátku této kapitoly jsme si ukázali, jak se dá úloha řešení rovnice převést na hledání pevného bodu zobrazení  $f$ . Pokud máme navíc štěstí a  $f$  je kontrakce, pak dle důkazu Banachovy věty lze zvolit libovolné  $x_0$  a počítat aproximace

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \quad \dots, \quad x_{n+1} = f(x_n),$$

o kterých máme zaručeno, že konvergují k hledanému řešení  $x$ . Můžeme tak napočítat prvních pár členů

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$$

a prohlásit, že  $x_k$  je aproximace hledaného neznámého řešení  $x$ . Z důkazu Banachovy věty dokonce víme, že pro  $n > m$  libovolná platí

$$\rho(x_n, x_m) \leq \lambda^m \cdot \frac{\rho(x_1, x_0)}{1 - \lambda},$$

z čehož se dá celkem jednoduše dostat i odhad chyby

$$\rho(x, x_m) \leq \lambda^m \cdot \frac{\rho(x_1, x_0)}{1 - \lambda},$$

díky kterému víme, jak velký počet iterací  $k$  zvolit, abychom dosáhli předem dané chyby (alespoň pokud známe hodnotu  $\lambda$ ).

Stejně lze postupovat i pro soustavy rovnic, akorát pak  $f$  nebude zobrazení na podmnožině  $\mathbb{R}$ , ale na podmnožině  $\mathbb{R}^n$  (například soustava tří rovnic o třech neznámých bude dána třemi rovnostmi „zakódovanými“ v zobrazení  $f$  na  $\mathbb{R}^3$ ).

**Pohádka 24.** *Mapa PraSdubic leží rozložená na zemi na náměstí PraSdubic. Pak na mapě musí existovat<sup>7</sup> bodík, který fyzicky přímo leží na místě, které vyznačuje. Dokud bude mapa položena kdekoliv v PraSdubicích, takový bod vždy bude existovat.*

Pro jednoduchost řekněme, že půdorys PraSdubic je čtverec v rovině

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1000 \wedge 0 \leq y \leq 1000\}$$

a mapa je fyzicky čtverec

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 3\}$$

se středem v bodě  $(2, 2)$ . Fyzický střed PraSdubic tak má souřadnice  $(500, 500)$  a odpovídající bod na mapě tak fyzicky leží na souřadnicích  $(2, 2)$ . Prakticky máme zobrazení  $f : P \rightarrow C \subseteq P$ , které zobrazuje tak, že vezme fyzický bod PraSdubic  $x \in P$ , najde ho na mapě ležící na zemi, a vrátí souřadnice  $f(x)$  fyzického bodu nacházejícího se pod bodem mapy.

A protože  $P$  je úplný prostor jakožto uzavřená podmnožina úplného  $\mathbb{R}^2$ , a navíc  $f$  je kontrakce (můžeš i přímo spočítat předpis  $f$ , je velku jednoduchý), musí opravdu dle Banachovy věty existovat bod ležící přímo pod svým vyznačením na mapě.

**Příklad 25.** Nechtě  $(F_n)_{n=0}^\infty$  je posloupnost *Fibonacciho čísel*, definována jako

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

<sup>7</sup>Teda alespoň dokud mapa není stejně velká jako celé PraSdubice.

Najdi dvěma způsoby pevný bod zobrazení

$$f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle, \quad f(x) = \frac{x+1}{x+2},$$

a pomocí toho spočti  $\lim \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}$ .

*Řešení.* Jeden způsob, jak najít pevný bod  $f$ , je přímočarý – prostě na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  řešíme rovnici

$$x = \frac{x+1}{x+2}.$$

K ní je ekvivalentní kvadratická rovnice  $x(x+2) = x+1$ , neboli  $x^2 + x - 1 = 0$ . Ta má právě jeden kořen v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , je jím  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Postupujme nyní pracněji a spíš ze zvědavosti pomocí Banachovy věty. Předně  $\langle 0, 1 \rangle$  se standardní metrikou je úplný metrický prostor a  $f$  je kontrakce, neboť pro  $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$  platí

$$\left| \frac{x+1}{x+2} - \frac{y+1}{y+2} \right| = \frac{|(x+1)(y+2) - (y+1)(x+2)|}{(x+2)(y+2)} = \frac{|x-y|}{(x+2)(y+2)} \leq \frac{1}{4} |x-y|$$

(pro  $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$  je  $x+2$  i  $y+2$  alespoň 2). Navíc zřejmě pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  i  $f(x) \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Podle Banachovy věty tak na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  existuje právě jeden pevný bod zobrazení  $f$ , což je v souladu s našim přímým vyřešením rovnice. Navíc volbou libovolného  $x_0 \in \langle 0, 1 \rangle$  a počítáním  $x_{n+1} = f(x_n)$  dostaneme posloupnost mající jako limitu hledaný pevný bod.

Jako příjemná počáteční volba  $x_0$  se jeví nula. Další dva členy posloupnosti pak jsou

$$x_1 = f(0) = \frac{1}{2}, \quad x_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+2} = \frac{1+2}{1+2 \cdot 2} = \frac{3}{5},$$

a ještě dále  $x_3 = 8/13$  a  $x_4 = 21/34$ . Obecněji, píšme ve zlomku  $x_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$  (pro  $x_0$  položíme  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = 1$ ). Pak

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} = x_{n+1} = \frac{\frac{\alpha_n}{\beta_n} + 1}{\frac{\alpha_n}{\beta_n} + 2} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n + 2\beta_n},$$

takže

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n, \quad \beta_{n+1} = \alpha_n + 2\beta_n = \alpha_{n+1} + \beta_n.$$

První vypočítané čitatele a jmenovatele hodnot  $x_n$  už nápadně připomínají Fibonacciho čísla, konkrétně z chování prvních členů vypadá slibně  $\alpha_n = F_{2n}$  a  $\beta_n = F_{2n+1}$ . Ověříme to indukcí. Předně díky  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/2$  platí

$$\alpha_0 = 0 = F_0, \quad \alpha_1 = 1 = F_2, \quad \beta_0 = 1 = F_1, \quad \beta_1 = 2 = F_3,$$

což odpovídá Fibonacciho číslům. Nechť pro  $n$  nezáporné celé platí  $\alpha_n = F_{2n}$  a  $\beta_n = F_{2n+1}$ . Pak pro následující členy platí

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \beta_n = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2} = F_{2(n+1)}, \\ \beta_{n+1} &= \alpha_{n+1} + \beta_n = F_{2n+2} + F_{2n+1} = F_{2n+3} = F_{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Tím je indukce dokončena a opravdu platí  $x_n = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}$ . Protože podle Banachovy věty tato posloupnost konverguje k pevnému bodu  $f$  a ten jsme spočítali, dostáváme vztah

$$\lim \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

což je převrácená hodnota známého *zlatého řezu*  $\varphi \approx 1,618$ .

**Cvičení 9.** Zobecní předchozí příklad na výpočet  $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ , kde posloupnosti  $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ ,  $(\beta_n)_{n=0}^\infty$  splňují rekurenci

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + p\beta_n, \quad \beta_{n+1} = \alpha_n + q\beta_n$$

pro  $q > 1$  a  $q > p \geq 0$ .

**Příklad 26.** V rovině je zobrazení  $f(x, y) = (r(x - p_1) + p_1, r(y - p_2) + p_2)$  stejnoolehlost podle bodu  $P = (p_1, p_2)$  s koeficientem stejnoolehlosti  $r \in \mathbb{R}$ . Pro  $r \in (-1, 1)$  je  $f$  kontrakcí, načež má stejnoolehlost v rovině právě jeden pevný bod, kterým je samozřejmě  $P$ .

**Cvičení 10.** Necht  $a > 1$  a  $x_0$  je kladné. Definujme posloupnost

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Dokaž, že tato posloupnost konverguje<sup>8</sup> k  $\sqrt{a}$ .

**Cvičení 11.** Jsou dána čísla  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Najdi na  $\mathbb{R}$  funkci, která má právě tyto body jako své pevné body.

**Cvičení 12.** Necht  $(M, \rho)$  je neprázdný metrický prostor. Existuje na něm vždy nějaká kontrakce?

## Podposloupnosti

Snad jsme Tě už v průběhu seriálu přesvědčili, že konvergentní posloupnosti mají hezké vlastnosti. O posloupnostech bez limity jsme zatím moc nemluvili. V této kapitole se krátce podíváme na podposloupnosti, které nám můžou říct něco o chování posloupností bez limity. Podposloupnosti vzniknou tak, že z původní posloupnosti

$$(x_n)_{n=1}^\infty = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots)$$

vybereme některé prvky „zleva doprava“. Tedy podposloupnost například může být, že vynecháme první dva prvky a uvažujeme posloupnost

$$(x_{k+2})_{k=1}^\infty = (x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \dots).$$

Nebo vybereme pouze sudé prvky

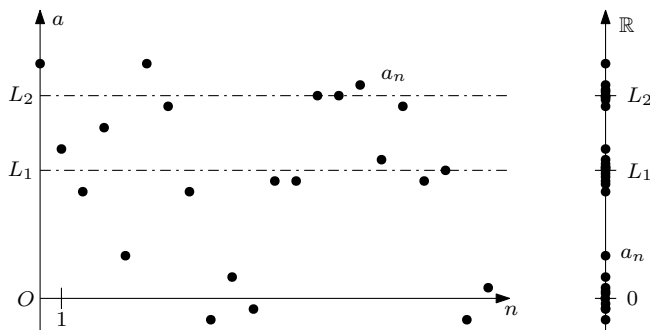
$$(x_{2k})_{k=1}^\infty = (x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \dots).$$

Prakticky chceme vybrat nekonečnou rostoucí posloupnost indexů a pomocí ní vybrat prvky podposloupnosti – například v případě sudých prvků to je posloupnost indexů  $(2k)_{k=1}^\infty$ . Rostoucí proto, abychom vybírali „zleva doprava“ (a speciálně nějaký prvek nevybrali víckrát), nekonečnou pak proto, abychom mohli mluvit o limitách.

**Definice 27.** Necht  $A$  je množina a  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je posloupnost bodů v  $A$ . Necht  $(n_k)_{k=1}^\infty$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  je *podposloupností* posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ .

<sup>8</sup>Tuto posloupnost jsme již potkali v rámečku v prvním díle seriálu. V principu by tímto způsobem šlo počítat druhé odmocniny v ruce, protože k výpočtu členů posloupnosti stačí umět sčítat a dělit.

Otázka je, jak souvisí konvergence původní posloupnosti a konvergence jejích podposloupností. To nám totiž může dát další vhled do toho, jak se posloupnost chová, i když sama o sobě nekonverguje.



Posloupnost „hromadící“ se kolem tří hodnot 0,  $L_1$  a  $L_2$ .

Například reálná posloupnost

$$((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$$

nemá limitu, ovšem její sudá podposloupnost  $(1, 1, 1, \dots)$  má limitu 1 a její lichá podposloupnost  $(-1, -1, -1, \dots)$  má limitu  $-1$ . Můžeš si rozmyslet, že každá podposloupnost této posloupnosti buď nemá limitu, a nebo má za limitu 1 nebo  $-1$ .

Obdobně to platí třeba pro posloupnost

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \dots\right),$$

která má také za limity podposloupností jen 1 nebo  $-1$ , pokud podposloupnost vůbec konverguje. To nám něco říká o jejím chování – body  $\pm 1$  jsou jediné, kolem kterých se posloupnost „shlukuje“.<sup>9</sup>

To, že  $((-1)^n + 1/n)_{n=1}^{\infty}$  nemá limitu, lze samozřejmě ukázat z definice, ale také to ihned plyne z následujícího tvrzení – kdyby totiž  $((-1)^n + 1/n)_{n=1}^{\infty}$  měla limitu, pak bychom neměli být schopní najít dvě její podposloupnosti se dvěma různými limitami, nicméně to se nám před chvílíčkou podařilo.

**Tvrzení 28.** (limita podposloupnosti) *Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost bodů v  $M$  s limitou  $x \in M$ . Pak každá podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  má též limitu  $x$ .*

*Důkaz.* Prostě ověříme definici limity. Nechť  $\varepsilon > 0$  je libovolné. Protože původní posloupnost má limitu  $x$ , umíme najít  $n_0$  přirozené takové, že pro každé  $n \geq n_0$  již  $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ . Posloupnost indexů  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$  musí v nějakou chvíli toto  $n_0$  přerůst, řekněme že se to stane od indexu  $k_0$  dál. Tedy pro  $k > k_0$  je  $n_k > n_{k_0} \geq n_0$ . To znamená, že na takové indexy  $n_k$  se také vztahuje předchozí epsilonový odhad, takže pro  $k \geq k_0$  je  $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ . Z definice limity to znamená, že  $\lim_k x_{n_k} = x$ .  $\square$

Přejít od konvergentní podposloupnosti ke konvergentní posloupnosti bude logicky problematictější. Jak jsme totiž viděli, vůbec to nemusí jít:  $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$  sice má konvergentní podposloupnost, ale sama o sobě nekonverguje. Nicméně pro cauchyovské posloupnosti to možné je:

<sup>9</sup>Ve smyslu, že množina  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  bodů naší posloupnosti má hranici  $\{1, -1\}$ .

**Tvrzení 29.** Necht'  $(M, \rho)$  je metrický prostor a posloupnost bodů  $(x_n)_{n=1}^\infty$  v  $M$  má následující dvě vlastnosti:

- (1)  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je cauchyovská.
- (2) Existuje podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  mající limitu  $x \in M$ .

Pak má i původní posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  limitu  $x$ .

*Důkaz.* Kdyby  $M$  byl úplný, stačila by nám vlastnost (1). Vlastnost (2) nám tu tak vlastně supluje úplnost  $M$ , kterou nepředpokládáme. Myšlenka je taková, že podposloupnost nám umožní dostat se některými body blízko k  $x$ , a cauchyovskost nám pak zaručí, že ostatní body nebudou od těchto bodů blízkých k  $x$  daleko.

Tedy mějme  $\varepsilon > 0$  libovolné. Z cauchyovskosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$  nalezneme  $m_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro  $n, m \geq m_0$  bude  $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Z konvergence  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  zase nalezneme  $k_0 \in \mathbb{N}$  splňující, že pro  $k \geq k_0$  je  $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Navíc ale požadujeme, aby  $n_{k_0} \geq m_0$  – kdyby to původní  $k_0$  nesplňovalo, můžeme ho zvyšovat tak dlouho, dokud  $n_{k_0}$  nepřeroste  $m_0$ , a takové nové  $k_0$  též bude splňovat předchozí odhad.

Protože  $n_{k_0} \geq m_0$ , můžeme ho chápat jako index  $m$  vystupující v odhadu cauchyovskosti. Pro libovolné  $n \geq m_0$  tak speciálně platí  $\rho(x_{n_{k_0}}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Nakonec z trojúhelníkové nerovnosti

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_{k_0}}) + \rho(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n \geq m_0.$$

Ověřili jsme tak, že  $\lim x_n = x$ . □

**Cvičení 13.** Necht'  $(M, \rho)$  je metrický prostor,  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je posloupnost bodů v  $M$  a  $x \in M$ . Necht' obě podposloupnosti  $(x_{2k})_{k=1}^\infty$  a  $(x_{2k-1})_{k=1}^\infty$  mají za limitu  $x$ . Dokaž, že pak i původní posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  konverguje k  $x$ .

**Úloha 2.** Ukaž pomocí předchozího cvičení, že pro Fibonaccioho čísla  $(F_n)_{n=0}^\infty$  z příkladu 25 platí

$$\lim \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Dá se tak říct, že i když o nějaké posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$  nevíme, jestli konverguje, může být užitečné zabývat se některými jejími podposloupnostmi, u nichž třeba limitu najdeme. Třeba s trochou štěstí z toho bude plynout konvergence původní  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , a i kdyby ne, tak aspoň zjistíme něco o limitním chování některých bodů  $(x_n)_{n=1}^\infty$ .

Také ale existují posloupnosti, které žádnou konvergentní podposloupnost nemají. Například v reálných číslech to je posloupnost

$$(n)_{n=1}^\infty = (1, 2, 3, \dots),$$

kteřá pořád jen stejně rychle roste a nikde se „neshlukuje“. Mohli bychom zkusit náš metrický prostor  $\mathbb{R}$  omezit, aby nešlo takto růst nade všechny meze, třeba na prostor  $(-2026, 2026)$ . Omezuje ho i zeddola, jinak by  $(-n)_{n=1}^\infty$  neměla konvergentní podposloupnost. Tím nám ale zase vznikají nové problémy, neboť  $(-2026, 2026)$  není úplný, takže třeba posloupnost  $(2026 - 1/n)_{n=1}^\infty$  nemá konvergentní podposloupnost (to zase platí díky tomu, že v  $\mathbb{R}$  má tato posloupnost limitu 2026, a tedy každá podposloupnost musí mít limitu 2026, která ale v našem intervalu neleží).

Můžeme se místo toho zkusit omezit na uzavřený interval  $[-2026, 2026]$ . To je úplný prostor, a navíc v něm nelze růst nade všechny meze. Zajišťuje nám to ale, že každá posloupnost už musí nějakou konvergentní podposloupnost mít? Možná Tě překvapí, že v reálných číslech ano, jak říká slavná Bolzanova–Weierstrassova věta, kterou si v příští kapitole dokážeme.

Nejdřív si ale pojďme prostory, v nichž existují konvergentní podposloupnosti, nějak pojmenovat. Jsou to jedny z nevýznamnějších typů metrických prostorů se spoustou krásných vlastností, které všechny v principu vyplývají z této nevinné vlastnosti podposloupností. Jsou to takzvané *kompakty*.



# Kompaktnost

**Definice 30.** O podmnožině  $K \subseteq M$  v metrickém prostoru  $(M, \rho)$  řekneme, že je *kompaktní*, pokud pro každou posloupnost bodů  $(x_n)_{n=1}^\infty$  v  $K$  existuje podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ , která má v  $K$  limitu. Pokud  $K = M$ , říkáme, že  $(M, \rho)$  je *kompaktní metrický prostor*.

Není to jediný způsob, jak kompaktnost definovat. V průběhu seriálu ještě narazíme na několik jiných vlastností, které kompaktnost charakterizují. Zajímavé na nich je, jak bývají různorodé a zdánlivě úplně jiné – v těch ostatních, které v seriálu potkáme, se o posloupnostech vůbec mluvit nebude. Mít různé odlišné pohledy na to, co to kompaktnost je, pak výrazně ulehčuje práci v důkazech, protože na každý problém se hodí mít trochu jiný úhel pohledu. Zároveň si člověk udělá lepší představu o tom, co to ta kompaktnost asi je a k čemu může být užitečná.

Když už jsme u užitečnosti, časem uvidíme několik tvrzení a vět, které ukazují, že spojitě funkce na kompaktech se chovají moc pěkně, například že spojitě bijekce mají automaticky spojitou inverzní funkci nebo že na kompaktu existují body minima a maxima spojitě funkce (což je nesmírně užitečná věta, jak teoreticky, tak prakticky). Pro kompaktní množiny třeba v  $\mathbb{R}^3$  platí různá geometrická tvrzení o protínání těles nebo o pokrývání množiny jinými množinami. Také některé významné věty o pevných bodech využívají kompaktnosti. K některým těmto důsledkům se postupně propracujeme.

Zatím ale ani pořádně nevíme, jestli nějaké kompaktní prostory existují. Pojďme proto nejdříve najít nějaké příklady kompaktních a prozkoumat jejich základní vlastnosti.

Na konci předchozí kapitoly jsme na příkladu nahlédli, že aby měl prostor vůbec šanci být kompaktní, tak musí být úplný. Platí to obecně, jak ukazuje následující tvrzení.

**Tvrzení 31.** *Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $K \subseteq M$  je kompaktní. Pak  $K$  musí být úplná.*

*Důkaz.* Nechť  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je cauchyovská posloupnost v  $K$ . Z kompaktnosti  $K$  nalezneme podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ , která konverguje k  $x \in K$ . Podle tvrzení 29 z toho ale už plyne, že  $(x_n)_{n=1}^\infty$  má také limitu  $x$ . Tedy  $K$  je úplný.  $\square$

Prvními, nepříliš zajímavými příklady kompaktních jsou konečné množiny.

**Cvičení 14.** Buď  $(M, \rho)$  metrický prostor a  $K$  jeho konečná podmnožina. Dokaž, že  $K$  je kompaktní.

V diskrétních prostorech jiné kompakty ani neexistují.

**Cvičení 15.** Dokaž, že v prostoru  $(M, \rho_{\text{disk}})$  s diskrétní metrikou je  $K \subseteq M$  kompaktní právě tehdy, když je  $K$  konečná.

**Cvičení 16.** Nechť  $(M, \rho)$  je kompaktní metrický prostor a  $K \subseteq M$ . Pak  $K$  je kompaktní právě tehdy, když je  $K$  uzavřená v  $M$ .

Jak jsme zmínili v kapitole o podposloupnostech, každý uzavřený interval v  $\mathbb{R}$  je kompaktní. To bude náš první zajímavější (a také základní) příklad kompaktního. Pomocí této věty v dalším textu dokážeme, jak vypadají kompakty obecně v  $\mathbb{R}^n$  (tj. speciálně v rovině a v prostoru).

**Věta 32.** (Bolzanova–Weierstrassova) *Každý uzavřený interval v  $\mathbb{R}$  se standardní eukleidovskou metrikou je kompaktní.*

*Důkaz.* Nechť  $a < b$  jsou dvě reálná čísla a  $\langle a, b \rangle$  je uvažovaný uzavřený interval. Nechť  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je nějaká posloupnost bodů v tomto intervalu – to vlastně znamená, že tato posloupnost reálných čísel je omezená. Protože  $\langle a, b \rangle$  je úplný, stačí nám nalézt cauchyovskou podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  – pak tato podposloupnost bude automaticky konvergentní.

Myšlenkou důkazu je náš interval  $\langle a, b \rangle$  postupně půlit. Při prvním půlení na intervaly  $\langle a, \frac{a+b}{2} \rangle$  a  $\langle \frac{a+b}{2}, b \rangle$  musí alespoň v jednom z nich ležet nekonečno bodů naší posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$  – pokud by v obou bylo jen konečně bodů, pak by i v celém  $\langle a, b \rangle$  leželo jen konečně bodů posloupnosti, která je ale nekonečná. Jeden takový interval si zvolíme a opět ho rozpůlíme. V jedné z těchto půlek musí zase ležet nekonečno bodů naší posloupnosti, ten si zvolíme. Takto budeme postupně vytvářet menší a menší intervaly, v nichž ale stále bude nekonečno bodů naší posloupnosti. Tím se tyto body k sobě víc a víc přibližují, protože intervaly jsou čím dál menší. Pomocí toho zkonstruujeme cauchyovskou podposloupnost.

Formálně si  $n$ -tý interval označíme jako  $\langle a_n, b_n \rangle$ . První interval má krajní body  $a_1 = a$  a  $b_1 = b$ . Dále postupujeme induktivně, jak jsme popsali v předchozím odstavci – pokud již máme interval  $\langle a_k, b_k \rangle$ , ve kterém leží nekonečno bodů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , pak musí v alespoň jednom z intervalů  $\langle a_k, \frac{a_k+b_k}{2} \rangle$ ,  $\langle \frac{a_k+b_k}{2}, b_k \rangle$  ležet nekonečno bodů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Takový si zvolíme a jeho levý, respektive krajní bod označíme jako  $a_{k+1}$ , respektive  $b_{k+1}$ .

Máme tak posloupnost intervalů  $(\langle a_n, b_n \rangle)_{n=1}^\infty$ , které jsou uzavřené, jejich délky se postupně zmenšují ( $n$ -tý interval má délku  $(b-a)/2^{n-1}$ ) a které splňují  $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle$ . Navíc díky tomu, že jsme volili intervaly tak, aby v nich vždy bylo nekonečně bodů naší posloupnosti, můžeme nyní vybírat postupně nějaké body  $x_{n_1} \in \langle a_1, b_1 \rangle$ , pak  $x_{n_2} \in \langle a_2, b_2 \rangle$  navíc s podmínkou  $n_2 > n_1$ , pak  $x_{n_3} \in \langle a_3, b_3 \rangle$  navíc s podmínkou  $n_3 > n_2$ , a tak dále, obecně  $x_{n_k} \in \langle a_k, b_k \rangle$  navíc s podmínkou<sup>10</sup>  $n_k > n_{k-1}$ .

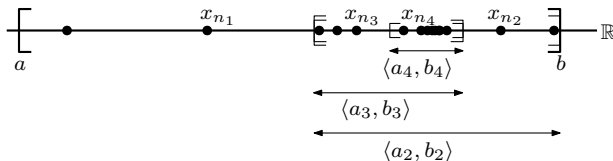
Máme tak podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ . Je cauchyovská? Ano, díky vlastnostem našich intervalů  $\langle a_k, b_k \rangle$ . Pokud totiž dostaneme  $\varepsilon > 0$ , můžeme nejdřív nalézt index  $k_0$  takový, aby platilo

$$\frac{b-a}{2^{k_0-1}} < \varepsilon.$$

Levá strana je délka intervalu  $\langle a_{k_0}, b_{k_0} \rangle$ , takže všechny body v něm mají nejvýše takovou vzdálenost. Pro libovolné  $k, \ell \geq k_0$  je  $x_{n_k}, x_{n_\ell} \in \langle a_{k_0}, b_{k_0} \rangle$ , protože  $x_{n_k} \in \langle a_k, b_k \rangle \subset \langle a_{k_0}, b_{k_0} \rangle$ , stejně tak pro  $\ell$ . Tedy

$$|x_{n_k} - x_{n_\ell}| \leq \frac{b-a}{2^{k_0-1}} < \varepsilon$$

a podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  je cauchyovská, tedy z úplnosti  $\langle a, b \rangle$  konvergentní. □



**Cvičení 17.** Rozmysli si, proč by důkaz Bolzanovy–Weierstrassovy věty nefungoval pro intervaly  $\langle 0, 1 \rangle$  a  $\langle 0, \infty \rangle$ . Také si rozmysli, že s lehkou modifikací důkaz naopak platí i pro  $\langle 0, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$ .

**Cvičení 18.** Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $K_1, \dots, K_m$  jsou kompaktní podmnožiny  $M$ . Dokaž, že pak i  $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$  je kompaktní. Platí to i pro sjednocení nekonečna kompakťů?

Kromě toho, že kompakty musí být uzavřené, jsme v  $\mathbb{R}$  viděli, že nemůžou být „moc velké“, například v  $\langle 0, \infty \rangle$  posloupnost  $(n)_{n=1}^\infty$  nemá konvergentní podposloupnost. Velikost metrického prostoru lze popsat například takto:

<sup>10</sup>Tady se právě hodí, že v  $\langle a_k, b_k \rangle$  leží nekonečno bodů naší posloupnosti. Kdyby jich tam leželo jen konečně, mohlo by se stát, že všechny tyto body by měly indexy menší než  $n_{k-1}$ .

**Definice 33.** Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$ . Řekneme, že  $A$  je *omezená*, pokud existují střed  $a \in M$  a poloměr  $r > 0$  takové, že  $A \subseteq U_r(a)$ .

Prakticky, v omezené množině jsou všechny body od sebe vzdálené méně než  $2r$ . Takováto omezenost je celkem intuitivní a užitečná, ale časem ji budeme muset trochu vylepšit – chtěli bychom nalézt charakterizaci, že kompakty jsou právě úplné a „malé“ množiny, podobné jako to platí v  $\mathbb{R}$ . Omezené množiny ale bohužel obecně nejsou „dost malé“.

Přesto se nám omezenost bude hodit, protože například v  $\mathbb{R}^n$  s eukleidovskou metrikou omezenost opravdu stačí. To nám říká Heineova–Borelova věta, kterou si za chvíli dokážeme.

**Cvičení 19.** Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$  je omezená. Ukaž, že pak i  $\bar{A}$  je omezený.

**Tvrzení 34.** Necht  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $K \subseteq M$  je kompaktní. Pak je  $K$  omezená.

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $K$  není omezená. Zvolme  $x_0 \in K$  a definujme  $r_0 = 0$ . Z neomezenosti  $K$  lze nalézt  $x_1 \in K \setminus U_1(x_0)$ . Označme  $r_1 = \rho(x_1, x_0)$ . Z neomezenosti  $K$  lze dále nalézt  $x_2 \in K \setminus U_{r_1+1}(x_0)$ , označme  $r_2 = \rho(x_2, x_0)$ .

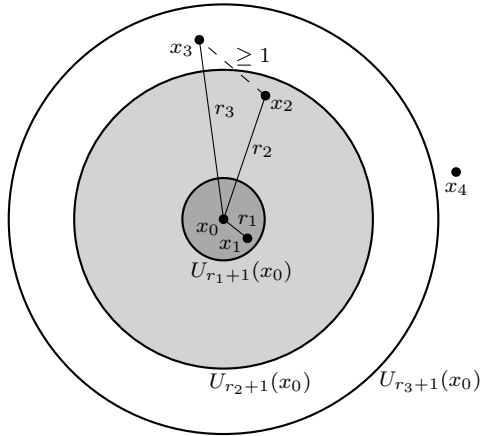
Obecně, předpokládejme, že máme body  $x_0, x_1, \dots, x_n$  a poloměry  $r_1, \dots, r_n$  takové, že  $r_i = \rho(x_i, x_0)$  a  $x_i \in K \setminus U_{r_{i-1}+1}(x_0)$  pro  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pak lze z neomezenosti  $K$  nalézt  $x_{n+1} \in K \setminus U_{r_n+1}(x_0)$  a označit  $r_{n+1} = \rho(x_{n+1}, x_0)$ . Tímto způsobem jsme schopni zkonstruovat nekonečné posloupnosti  $(x_n)_{n=0}^\infty$  a  $(r_n)_{n=0}^\infty$  splňující

$$r_n = \rho(x_n, x_0), \quad x_{n+1} \in K \setminus U_{r_n+1}(x_0), \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0.$$

Pro body  $x_n, x_m$ ,  $n > m$  platí přeuspořádáním trojúhelníkové nerovnosti

$$\rho(x_n, x_m) \geq \rho(x_n, x_0) - \rho(x_0, x_m) \geq (r_{n-1} + 1) - r_{n-1} = 1,$$

neboť  $x_n \notin U_{r_{n-1}+1}(x_0)$  a  $\rho(x_m, x_0) = r_m < r_{m+1} < \dots < r_{n-1}$ . To znamená, že žádná podposloupnost posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$  nemůže být cauchyovská, a tedy ani konvergentní. Tedy pokud  $K$  není omezená, tak není ani kompaktní.  $\square$



**Věta 35.** (Heineova–Borelova) Podmnožina  $A$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  se standardní eukleidovskou metrikou je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a omezená.

*Důkaz.* Již víme, že kompaktní množiny v libovolném metrickém prostoru jsou uzavřené a omezené, takže stačí dokázat opačnou implikaci. Budeme postupovat indukcí podle dimenze  $n$ . Myšlenka je taková, že body posloupnosti v  $\mathbb{R}^{n+1}$  promítneme do  $\mathbb{R}^n$  a do  $\mathbb{R}$ , ve kterých pomoci

kompaktnosti nalezneme konvergentní podposloupnosti, a pomocí nich dáme zpátky v  $\mathbb{R}^{n+1}$  dohromady konvergentní podposloupnost původní posloupnosti.

Tedy postupujeme indukcí. Nechť je nejdříve  $n = 1$  a  $A \subseteq \mathbb{R}$  je uzavřená a omezená. Z omezenosti leží celá  $K$  v nějaké otevřené kuličce, což je v případě  $\mathbb{R}$  otevřený interval konečné délky, označme ho  $(a, b)$ . Ten zase leží v uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Nechť  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je libovolná posloupnost bodů v  $A$ . Pak tato posloupnost leží i v  $\langle a, b \rangle$ , takže podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty umíme nalézt konvergentní podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  mající limitu  $x \in \langle a, b \rangle$ . Protože ale body podposloupnosti  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  leží v uzavřené množině  $A$ , musí zde ležet i jejich limita, tj.  $x \in A$ . Tím jsme ověřili kompaktnost  $A$ .

Nyní provedeme indukční krok. Nechť pro  $\mathbb{R}^n$  tvrzení platí, dokážeme ho pro  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Buď  $A$  uzavřená a omezená podmnožina  $\mathbb{R}^{n+1}$  a  $(x_n)_{n=1}^\infty$  posloupnost bodů v  $A$ , ze které chceme vybrat konvergentní podposloupnost. Souřadnice bodu  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  píšme jako  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)})$  nebo také jako  $x = (\tilde{x}, x^{(n+1)})$ , kde  $\tilde{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ . Na prostoru  $\mathbb{R}^{n+1}$  značíme eukleidovskou metriku  $\rho$ , na  $\mathbb{R}^n$  zase  $\tilde{\rho}$ .

Nechť  $A \subseteq U_r(a)$  z omezenosti  $A$ . Nechť  $x \in A$ , pak  $\rho(x, a) < r$  a okamžitě také platí

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{a})^2 &= (x^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x^{(n)} - a^{(n)})^2 \\ &\leq (x^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x^{(n)} - a^{(n)})^2 + (x^{(n+1)} - a^{(n+1)})^2 \\ &= \rho(x, a)^2 < r^2, \end{aligned}$$

takže i body  $A$  „po zapomenutí poslední souřadnice“ tvoří omezenou množinu v  $\mathbb{R}^n$ . Speciálně díky  $x_n \in A$  platí  $\{\tilde{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U_r(\tilde{a}) \subset \mathbb{R}^n$ . To ale znamená, že body  $(\tilde{x}_n)_{n=1}^\infty$  všechny leží i v uzavřené kuličce  $B_r(\tilde{a})$ , která je omezená. Podle indukčního předpokladu je kompaktní, takže můžeme vybrat podposloupnost  $(\tilde{x}_{n_k})_{k=1}^\infty$  konvergující k  $y \in \mathbb{R}^n$ .

Našli jsme tak podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ , která někde konverguje v prvních  $n$  složkách. Obdobně se vypořádáme s chybějící  $(n+1)$ . složkou. Posloupnost  $(x_{n_k}^{(n+1)})_{k=1}^\infty$  celá leží v kuličce  $U_r(a^{(n+1)}) \subset \mathbb{R}$ , protože pro  $x \in A$  je

$$\left| x^{(n+1)} - a^{(n+1)} \right|^2 \leq \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{a})^2 + \left| x^{(n+1)} - a^{(n+1)} \right|^2 = \rho(x, a)^2 < r^2.$$

Proto také  $(x_{n_k}^{(n+1)})_{k=1}^\infty$  leží v uzavřené kuličce  $B_r(a^{(n+1)})$  (tj. uzavřeném intervalu), což je kompakt, takže můžeme provést druhý výběr podposloupnosti  $(x_{m_i})_{i=1}^\infty$ , kde každému indexu  $m_i$  odpovídá nějaký index  $n_k$ . Tato posloupnost konverguje k  $z \in \mathbb{R}$ .

Stále ale platí, že  $(\tilde{x}_{m_i})_{i=1}^\infty$  konverguje k  $y$ , neboť je to podposloupnost (pod)posloupnosti  $(\tilde{x}_{n_k})_{k=1}^\infty$ . Odtud plyne, že posloupnost  $(x_{m_i})_{i=1}^\infty$  v  $A$  konverguje jak v prvních  $n$  složkách k  $y$ , tak i v poslední složce k  $z$ . Pak již ale musí<sup>11</sup> celá konvergovat k bodu  $p = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)}, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . A protože  $A$  je uzavřená a body  $(x_{m_i})_{i=1}^\infty$  v  $A$  leží, je  $p \in A$ . Tím jsme našli konvergentní podposloupnost pro  $(x_n)_{n=1}^\infty$  a ukázali kompaktnost  $A$ .  $\square$

Heineova–Borelova věta nám ukazuje, že v  $\mathbb{R}^n$  je kompaktní celá řada, a dává nám vcelku jednoduchý způsob, jak kompaktnost ověřovat. Například v rovině ihned vidíme, že uzavřený čtverec, kruh nebo 2026úhelník jsou kompaktní.

**Cvičení 20.** Dokaž, že množina  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$  je kompaktní.

<sup>11</sup>Intuitivně např. v  $\mathbb{R}^2$ , pokud  $x_n$  konvergují k  $x$  a zároveň  $y_n$  konvergují k  $y$ , tak i body  $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$  se budou postupně blížit k  $(x, y)$ . Formálně se to udělá tak, že pro  $\varepsilon > 0$  se najde  $n_0$  takové, aby pro  $n \geq n_0$  zároveň platilo  $|x_n - x| < \sqrt{\varepsilon}/2$  a  $|y_n - y| < \sqrt{\varepsilon}/2$ , načež bude  $\rho((x_n, y_n), (x, y))^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2 < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon$ . Pro více složek se postupuje podobně.

**Cvičení 21.** Dokaž, že množina  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$  není kompaktní.

Na závěr tu máme ochutnávku toho, jak se spojitě funkce a kompakty hezky vzájemně doplňují, čemuž se budeme více věnovat v třetím díle seriálu.

**Tvrzení 36.** (spojitý obraz kompaktu) *Nechť  $(K, \rho)$  je kompaktní metrický prostor,  $(Y, \sigma)$  je metrický prostor a  $f : K \rightarrow Y$  je spojitě zobrazení. Dokaž, že pak  $f(K)$  je kompaktní v  $Y$ .*

*Důkaz.* Buď  $(y_n)_{n=1}^\infty$  nějaká posloupnost bodů v metrickém prostoru  $f(K)$ . Chceme ukázat, že tato posloupnost má konvergentní podposloupnost. Z definice

$$f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$$

umíme nalézt nějaká  $x_n \in K$  taková, že  $f(x_n) = y_n$ . Protože  $K$  je kompaktní, má  $(x_n)_{n=1}^\infty$  konvergentní podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  s limitou  $x \in K$ . Díky spojitosti  $f$  je pak

$$\lim_k y_{n_k} = \lim_k f(x_{n_k}) = f(\lim_k x_{n_k}) = f(x),$$

takže  $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$  je konvergentní podposloupnost naší původní posloupnosti  $(y_n)_{n=1}^\infty$ . □

Tvrzení je zajímavé i z toho důvodu, že spojitě funkce nemusí zobrazovat omezené množiny na omezené množiny: Například  $f(x) = 1/x$  zobrazuje omezenou množinu  $(0, 1)$  na neomezenou množinu  $(1, \infty)$ . Stejně tak spojitě funkce nemusí zobrazovat uzavřené množiny na uzavřené množiny (narozdíl od vzorování uzavřených množin, jak jsme viděli ve cvičení 7): Funkce  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  zobrazuje celé  $\mathbb{R}$  (což je uzavřená množina) na množinu  $(0, 1)$ , která uzavřená není.

V kontextu Heineovy–Borelovy věty, pokud je  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  zároveň omezená a uzavřená, tak je kompaktní, takže ji spojitě funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  zobrazí na kompaktní  $f(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ , tedy  $f$  zachová omezenost a uzavřenost. Kdyby ale  $A$  byla jen omezená nebo jen uzavřená, tak  $f(A)$  nemusí být ani omezená, ani uzavřená. V jakémisi smyslu se omezenost a uzavřenost chovají pro spojitě funkce hezky jenom dohromady, ne samy o sobě.

**Příklad 37.** Nechť  $(K, \rho)$  je kompaktní metrický prostor a  $f : K \rightarrow K$  zachovává vzdálenosti<sup>12</sup>, tj. pro každá  $x, y \in K$  platí

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y).$$

Dokaž, že  $f$  je na  $K$  (tj. každý bod  $K$  je obrazem nějakého bodu z  $K$ ).

*Řešení.* Pro spor předpokládejme, že existuje bod  $x \notin f(K)$ . Z předchozího tvrzení víme, že  $f(K)$  je kompaktní, tudíž jde o uzavřenou množinu. Protože  $x$  neleží v  $f(K)$ , má od  $f(K)$  nějakou kladnou vzdálenost  $\varepsilon > 0$  (v opačném případě by totiž ležel na hranici  $f(K)$  a z uzavřenosti by byl prvkem  $f(K)$ ). Každý prvek  $f(K)$  je alespoň  $\varepsilon$  vzdálen od  $x$ .

Uvažujme nyní posloupnost  $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$ . Pro lepší značení označme prvky posloupnosti jako  $f^n(x)$  (tedy například  $f^2(x) = f(f(x))$ ). Jak daleko jsou od sebe prvky této posloupnosti? Protože je  $f$  izometrie, můžeme „ohoblovat“ nadbytečné aplikace funkce a spočítat si pro přirozená  $n > m$

$$\rho(f^n(x), f^m(x)) = \rho(f^{n-1}(x), f^{m-1}(x)) = \dots = \rho(f^{n-m}(x), x)$$

Výsledný výraz ale udává vzdálenost mezi  $x$  a prvkem  $f(K)$ , tudíž je velký alespoň  $\varepsilon$ . Libovolné dva prvky posloupnosti jsou od sebe tedy vzdáleny alespoň  $\varepsilon$ . Potom ale tato posloupnost nemůže mít konvergentní podposloupnost, protože nemůže mít ani cauchyovskou podposloupnost, natož pak konvergentní. To je ale spor, protože se nacházíme na kompaktní.

<sup>12</sup>Takovým zobrazením říkáme *izometrie*.

V minulém díle seriálu jsme v rámečku popisovali Hausdorffovu metriku  $\rho_H$ , pomocí které lze měřit odlišnost (některých) podmnožin metrického prostoru, a to tak, že se v každém bodu obou množin určí minimální vzdálenost k nějakému bodu druhé množiny, a pak se za vzdálenost množin položí největší z těchto čísel. Dá se ukázat, že „některé podmnožiny“ můžou být například všechny kompakty – speciálně například v rovině uzavřenost zaručuje, že dvě různé množiny mají kladnou vzdálenost (jinak by např. otevřený a uzavřený kruh o stejném středu a poloměru měly vzdálenost 0), a omezenost zase zaručuje, že vzdálenost dvou množin je konečná.

Můžeme tak třeba v rovině vyšetřovat konvergence posloupností množin. Bude se nám hodit vědět, že kompaktní podmnožiny  $\mathbb{R}^2$  spolu s Hausdorffovou metrikou tvoří úplný prostor.

Podívejme se na jednu takovou posloupnost. Řekněme, že máme rovnostranný trojúhelník  $T$  s vrcholy  $A, B, C$ . Označme  $S_{AB}, S_{BC}, S_{CA}$  středy stran  $AB, BC, CA$ . Tomuto trojúhelníku přiřadíme množinu  $f(T) = T_A \cup T_B \cup T_C$ , kde  $T_A$  je trojúhelník  $AS_{AB}S_{CA}$ ,  $T_B$  je trojúhelník  $BS_{BC}S_{AB}$  a  $T_C$  je trojúhelník  $CS_{CA}S_{BC}$  (jinými slovy,  $f(T) = T \setminus I$ , kde  $I$  je otevřený trojúhelník  $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ ).

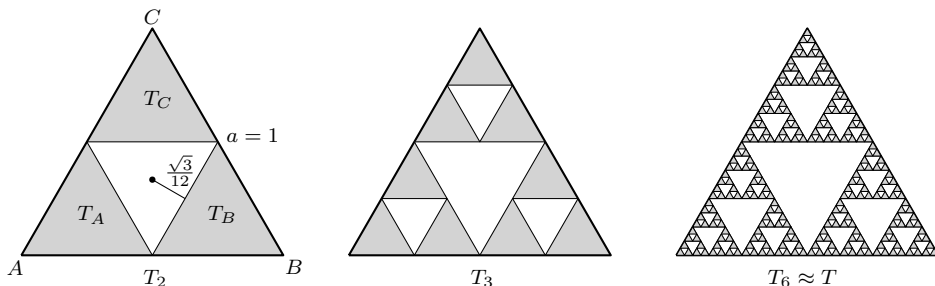
Zobrazení  $f$  tak rovnostrannému trojúhelníku přiřazuje sjednocení tří rovnostranných trojúhelníků  $T_A, T_B, T_C$ . Na ně lze  $f$  opět aplikovat, tj. rozložit každý z trojúhelníků  $T_A, T_B, T_C$  na tři menší rovnostranné trojúhelníky. Popíšme tento proces posloupností:  $T_1$  bude první rovnostranný trojúhelník, řekněme o straně délky 1,  $T_2 = f(T_1)$ ,  $T_3$  pak vznikne aplikací  $f$  na tři trojúhelníky v  $T_2$ ,  $T_4$  zase vznikne aplikací  $f$  na devět trojúhelníčků v  $T_3$  a tak dále. Na obrázku je pár těchto množin znázorněno.

Hausdorffova vzdálenost  $T_1$  od  $T_2$  se dá spočítat jednoduše z obrázku Pythagorovou větou, je to  $\frac{\sqrt{3}}{12}$ . Ve skutečnosti je to vzdálenost  $T_1$  od libovolného  $T_n$ ,  $n > 1$ . Vzdálenost  $T_2$  od  $T_3$  je  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}$  a ve skutečnosti je to vzdálenost  $T_2$  od libovolného  $T_n$ ,  $n > 2$ . Obecně platí, že pro  $n > m$  je vzdálenost  $T_n$  od  $T_m$  rovna

$$\rho_H(T_n, T_m) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

To znamená, že posloupnost obrazců  $(T_n)_{n=1}^{\infty}$  je cauchyovská! A protože prostor, ve kterém pracujeme, je úplný, má tato posloupnost limitu  $T$ .

Tato množina  $T$  je takzvaný *Sierpiňského trojúhelník*. Je to příklad *fraktálu*, o kterých jsi možná někdy něco slyšel(a), a jako takový vypadá zajímavě (byť ho v plném detailu nemůžeme nakreslit) a má některé netradiční vlastnosti. Například jednotlivé  $T_n$  jsou rozumné geometrické obrazce s kladným obsahem  $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ , ovšem tato posloupnost obsahů konverguje k nule, takže v tomto smyslu má  $T$  „nulový obsah“. Spousta fraktálů nebo jiných exotických objektů se dá sestavit tak, že se vytvoří posloupnost rozumných objektů, o které se pak ukáže, že musí konvergovat k něčemu zajímavému.



## Do třetice všeho dobrého

Děkujeme, že jsi s námi došel (došla) až sem, na konec druhého dílu seriálu. Kompaktnost jsme zatím moc nevyužili, ale to se příště změní. Uvidíme, jak se spojitě funkce s kompaktností kamarádí a že z toho plynou třeba i geometrická tvrzení, která o funkcích vlastně vůbec nehovoří. Také zjistíme, že pro spojitě funkce na kompaktu lze zavést metrika, a tedy si je lze představovat jako body v (už docela velkém) metrickém prostoru, což je docela odlišný pohled na funkce, než jaký jsi možná měl(a) doposud. Celkově se budeme snažit využít celé mašinerie, kterou jsme vybudovali, na získání hezkých náhledů. Těšíme se, až se zase uvidíme ve třetím díle!

### Návody k úlohám

1. Očísluj si vrcholy jako  $v_1, \dots, v_n$  a předepiš si hodnotu na prvním vrcholu. Jaké jsou možné hodnoty na vrcholu  $v_2$ ? A na  $v_3$ ? Až dojdeš k  $v_n$ , nezapomeň, že ten je zase napojen na první vrchol  $v_1$ .
2. Zkus v příkladu 25 zvolit jiné  $x_0$ .

### Řešení cvičení

1. Rozmysli si, že cauchyovské posloupnosti jsou právě ty, které jsou od nějakého bodu konstantní. Ty pak zjevně mají za limitu ten bod, který se v nich vyskytuje nekonečněkrát.
2. Nechť  $F$  je úplná a  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je posloupnost v  $F$  konvergující k  $x \in M$ . Pak tato posloupnost je cauchyovská podle cvičení 3, takže z úplnosti  $F$  musí v  $F$  konvergovat. Z jednoznačnosti limity tato limita v  $F$  musí být rovna  $x$ , takže  $x \in F$ .

Pokud je  $F$  naopak uzavřená a  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je cauchyovská posloupnost bodů v  $F$ , pak z úplnosti  $M$  (neboť  $(x_n)_{n=1}^\infty$  speciálně leží v  $M$ ) musí mít tato posloupnost v  $M$  limitu  $x$ . Ale  $F$  je uzavřená, takže  $x \in F$ , což dokazuje, že cauchyovská posloupnost bodů v  $F$  má automaticky limitu v  $F$ . Tedy  $F$  je úplná.

3. Stačí vzít vždy  $\delta = \frac{1}{2}$ .
5. Nechť  $x \in X$  a  $\varepsilon > 0$  jsou libovolné. Položme  $\delta = \varepsilon/c > 0$ . Pak pro  $y \in U_\delta(x)$  platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq c \cdot \rho(x, y) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

což dokazuje spojitost  $f$ .

6. Nechť je  $f$  spojitá a  $G$  je otevřená podmnožina  $Y$ . Pokud je  $f^{-1}(G)$  prázdná, je jistě otevřená a jsme hotovi. Jinak nechť je  $x \in f^{-1}(G)$ , tj. platí  $f(x) \in G$ . Z otevřenosti  $G$  nalezneme  $\varepsilon > 0$  takové, že  $U_\varepsilon(f(x)) \subseteq G$ . Protože  $f$  je spojitá, lze najít  $\delta > 0$  takové, že  $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)) \subseteq G$ . To ale znamená, že všechny body z kuličky  $U_\delta(x)$  se zobrazí do  $G$ , tj.  $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(G)$ . Tedy  $x$  je vnitřním bodem  $f^{-1}(G)$ , a to je tak otevřená množina v  $X$ .

Nechť naopak vzory otevřených množin v  $Y$  jsou otevřené v  $X$ . Nechť  $x \in X$  a  $\varepsilon > 0$  jsou libovolné. Kulička  $U_\varepsilon(f(x))$  je jistě otevřená v  $Y$ , takže musí její vzor

$$f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$$

být podle předpokladu otevřený v  $X$ . Tento vzor navíc obsahuje  $x$ , takže z otevřenosti obsahuje i nějakou celou kuličku  $U_\delta(x)$ . To ale znamená, že

$$f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)).$$

Tedy  $f$  je spojitá.

**7.** Ze cvičení 6 víme, že  $f$  je spojitá právě tehdy, když vzoruje otevřené množiny v  $Y$  na otevřené množiny v  $X$ . Z prvního dílu seriálu víme, že  $F$  je v  $Y$  uzavřená právě tehdy, když  $F^c$  je v  $Y$  otevřená. Pro vzory zase platí  $(f^{-1}(F))^c = f^{-1}(F^c)$ . Tedy pokud je  $F$  uzavřená v  $Y$ , pak je  $F^c$  otevřená v  $Y$ , načež  $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$  je otevřená v  $X$ , a tedy  $f^{-1}(F)$  je v  $X$  uzavřená. Pokud naopak  $f$  vzoruje uzavřené na uzavřené, pak se analogicky dokáže, že vzoruje i otevřené na otevřené.

**8.** Dle předchozích cvičení nám stačí ověřit, že  $h^{-1}(U)$  je otevřená v  $X$  pro každou  $U$  otevřenou v  $Z$ . Víme, že  $g^{-1}(U)$  je otevřená v  $Y$ . Pak ale ze spojitosti  $f$  musí i  $f^{-1}(g^{-1}(U)) = h^{-1}(U)$  být otevřená v  $X$ .

**10.** Chceme použít Banachovu větu pro  $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$  na intervalu  $(0, \infty)$ , ze kterého bereme hodnotu  $x_0$ . Tento interval ale není uzavřený, a navíc pro hodnoty  $x$  blízko nuly je funkce  $f$  citlivá na malé změny  $x$  (kvůli členu  $a/x$ ) a nevyjde kontraktivní. Musíme tak postupovat opatrněji.

Podívejme se na kontraktivitu  $f$ :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \frac{1}{2} \left| x + \frac{a}{x} - y - \frac{a}{y} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x^2y + ay - y^2x - ax|}{|xy|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|xy(x - y) - a(x - y)|}{|xy|} = \\ &= \frac{1}{2} |x - y| \cdot \frac{|xy - a|}{|xy|}. \end{aligned}$$

Činitel  $\frac{|xy-a|}{|xy|}$  může být obecně velký pro  $x, y$  blízko nuly. Pokud ale  $xy \geq a > 0$ , půjde se zbavit absolutních hodnot a dostaneme

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2} |x - y| \cdot \frac{xy - a}{xy} \leq \frac{1}{2} |x - y|,$$

takže za takové podmínky bude  $f$  kontrakcí.

Zkusme se tak nejdřív omezit na interval  $\langle \sqrt{a}, \infty \rangle$ , který je úplný a na němž je  $f$  kontrakcí. Potřebujeme ještě ale, aby  $f$  zobrazovala tento interval do sebe, tj. aby pro každé  $x \geq \sqrt{a}$  bylo i  $f(x) \geq \sqrt{a}$ . K odhadu použijeme AG<sup>13</sup> nerovnost:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{a}{x}} = \sqrt{a}.$$

Tento odhad nám zajišťuje, že  $f$  zobrazuje  $\langle \sqrt{a}, \infty \rangle$  do sebe, ale říká ještě víc – platí totiž pro každé kladné  $x$ , takže  $f$  dokonce zobrazuje  $(0, \infty)$  do  $\langle \sqrt{a}, \infty \rangle$ .

To znamená, že pokud máme libovolné  $x_0 > 0$ , klidně neležící v  $\langle \sqrt{a}, \infty \rangle$ , tak po jedné iteraci  $x_1 = f(x_0)$  již v tomto intervalu ležet bude. Další iterace  $x_{n+1} = f(x_n)$  už z něj neutečou, protože  $f$  zobrazuje tento interval do sebe. Navíc je na něm  $f$  kontrakcí a interval je úplný. Podle Banachovy věty tak i v této komplikovanější situaci, kdy  $x_0 \notin \langle \sqrt{a}, \infty \rangle$ , bude posloupnost konvergovat k jedinému pevnému bodu  $f$  na intervalu  $\langle \sqrt{a}, \infty \rangle$ .

Snadno se ověří, že  $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ . Tato hodnota zřejmě leží v našem intervalu, takže to musí být ten pevný bod, ke kterému  $(x_n)_{n=0}^\infty$  konverguje.

**11.** Vezmeme třeba polynom  $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$ . Ten se nuluje právě v bodech  $a_i$ . Pokud nyní zdefinujeme  $f(x) = P(x) + x$ , pak  $f(a) = a \iff P(a) + a = a$ , což nastane právě tehdy, když  $a$  je kořenem  $P$ , tedy právě pro hodnoty  $a_i$ .

**12.** Ano – zvol jeden bod  $a \in M$  a definuj funkci na  $M$  konstantně jako  $f(x) = a$ .

<sup>13</sup>Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem říká, že pro  $u_1, \dots, u_n$  kladná reálná čísla vždy platí  $\frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \geq \sqrt[n]{u_1 \cdots u_n}$ . Zde ji používáme pro  $n = 2$  a v této podobě se snadno dokáže ze zřejmě platné nerovnosti  $(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geq 0$ .



**14.** Necht' je  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  libovolná posloupnost v  $K$ . Protože je tato posloupnost nekonečná a  $K = \{a_1, \dots, a_\ell\}$  pouze konečná, musí existovat bod  $a_j \in K$ , který se v posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  vyskytuje nekonečněkrát, řekněme, že postupně na pozicích  $n_1, n_2, n_3, \dots$ . Pak ale podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  zřejmě konverguje k  $a_j$ , neboť je konstantní.

**15.** Ze cvičení 14 víme, že konečná  $K$  je kompaktní. Pokud je naopak  $K$  nekonečná, můžeme zkonstruovat posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  takovou, že žádné dva její prvky nejsou stejné. Pak mají všechny její body vzdálenost 1, takže ať zvolíme podposloupnost jakkoliv, nikdy nebude cauchyovská, a tedy ani konvergentní. Odtud plyne, že  $K$  nemůže být kompaktní.

**16.** Necht'  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost bodů z  $K$ . Protože je  $M$  kompaktní, existuje vybraná konvergentní podposloupnost. No a nyní si vzpomeneme na charakterizaci uzavřených množin z prvního dílu seriálu (tvrzení, že množina je uzavřená právě tehdy, pokud je uzavřená na limity). Pokud je  $K$  uzavřená, pak tato limita leží v  $K$  a máme tedy podposloupnost konvergentní v  $K$ . Naopak pokud není uzavřená, pak si můžeme za  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  zvolit posloupnost bodů z  $K$ , které konvergují k bodu mimo  $K$ . Všechny podposloupnosti budou také konvergovat k tomu stejnému bodu mimo  $K$  a z jednoznačnosti limit nebudou mít limitu v  $K$ .

**17.** Pro  $\langle 0, 1 \rangle$  se nám nemusí podařit najít limitu cauchyovské podposloupnosti  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ , protože tento interval není úplný. Pro  $\langle 0, \infty \rangle$  je zase problém v tom, že délka všech dílčích půlených intervalů je stále nekonečno, takže výběrem  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  nemusíme dostat cauchyovskou podposloupnost.

Pro množinu  $\langle 0, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$  můžeme nejdřív vybrat jeden z intervalů  $\langle 0, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle$ , v němž leží nekonečno bodů naší posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , a na tento interval a těchto nekonečno bodů použít Bolzanovu–Weierstrassovu větu.

**18.** Necht'  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost bodů v  $K$ . Protože množin  $K_1, \dots, K_m$  je konečný počet, musí existovat  $K_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  taková, že v  $K_j$  leží nekonečno bodů naší posloupnosti. Označme jako  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty}$  ty body ležící v  $K_j$ . Protože  $K_j$  je kompaktní, můžeme vybrat podposloupnost  $(y_{k_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$  konvergující k  $y \in K_j \subseteq K$ . To je ale zároveň zase podposloupnost posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  (konkrétně nějaký výběr z podposloupnosti  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ), takže jsme ukázali, že  $K$  je kompaktní.

Sjednocení nekonečna kompaktních už kompaktní být nemusí – například sjednocení uzavřených intervalů  $\langle -n, n \rangle$  dává nekompaktní  $\mathbb{R}$ , nebo v nekonečném diskrétním prostoru  $\{x_1, x_2, \dots\}$  jsou jednoprvkové množiny  $x_n$  kompaktní, ale jejich nekonečné sjednocení ne.

**19.** Nalezneme  $a \in M$  a  $r > 0$  takové, že  $A \subseteq U_r(a)$ . Pro  $x \in \bar{A}$  buď  $x$  leží v  $A$ , načež  $\rho(x, a) < r < r + 1$ , nebo  $x \in \partial A$ , načež lze najít  $y \in A$  vzdálené od  $x$  nejvýše 1. Pak ale

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < 1 + r.$$

Tedy každý bod hranice  $A$  je vzdálen od  $a$  nejvýše o  $r + 1$ , takže  $A \subseteq U_{r+1}(a)$ .

**20.** Definujme na  $\mathbb{R}^3$  funkci  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$ . Pak lze množinu  $K$  (která je elipsoidem) psát jako

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Protože  $\{0\}$  je uzavřená množina v  $\mathbb{R}$  a  $f$  je spojitá funkce (je to součet několika funkcí typu  $g(x) = x^2$ , jejichž spojitost jsme přímo ukazovali), musí být  $K$  uzavřená podle cvičení 6.

Nyní ukážeme omezenost  $K$ . Pro bod  $(x, y, z) \in K$  můžeme odhadovat jeho vzdálenost od počátku jako

$$\rho_2((x, y, z), (0, 0, 0))^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1,$$

takže  $K \subseteq U_1((0, 0, 0))$ .

Protože  $K$  je uzavřená a omezená podmnožina  $\mathbb{R}^3$ , je již dle Heineovy–Borelovy věty kompaktní.

**21.** Množina  $A$  (která je dvojkružel) obsahuje celou přímku  $\{(t, t, t\sqrt{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ , takže není omezená – jakkoliv velký poloměr  $r > 0$  zvolíme, stejně budou v  $A$  ležet body  $(-r, -r, -r\sqrt{2})$  a  $(r, r, r\sqrt{2})$ , které jsou od sebe vzdálené více jak  $2r$ , takže  $A$  nebude uzavřená v žádné kuličce o poloměru  $r$  (s libovolným středem). Protože  $A$  není omezená, nemůže být ani kompaktní.

# Metrické prostory III – Metrická všehochuť

Milý příteli,

vítáme Tě u posledního dílu letošního seriálu metrických prostorů. V tomto dílu budeme hlavně řešit příklady, ačkoliv se najde i několik tvrzení a vět.

Jak jsme slibovali minule, hlavně si ukážeme, že spojitě funkce na kompaktech nabývají nejmenších a největších hodnot a co všechno z toho plyne. Speciálně zjistíme, že takové funkce lze přirozeně měřit, a prozkoumáme vzniklý nový metrický prostor. Směle do toho!

## Maxima a suprema

Než se dostaneme k větě o nabývání extrémů pro spojitě funkce, budeme si muset trochu zobecnit pojmy maxima a minima tak, aby se nám dobře pracovalo s nekonečnými množinami. Ujasněme si, co že je to maximum množiny:

**Definice 1.** Nechť  $A \subset \mathbb{R}$  je množina. Číslo  $m \in A$  nazveme *maximem* množiny  $A$ , pokud  $a \leq m$   $\forall a \in A$ . Nazveme ho *minimem* množiny  $A$ , pokud  $a \geq m$   $\forall a \in A$ .

Maxima jsou Ti pravděpodobně dobře známá. Bohužel maxima mají jeden zásadní problém:

**Příklad 2.** Existují množiny  $A \subseteq \mathbb{R}$ , které nemají maximum.

*Řešení.* Například otevřený interval  $(0, 1)$ . Jednička není maximem, protože neleží v množině, pro cokoliv menší než 1 zase bude existovat nějaký maličko větší prvek, který leží v  $(0, 1)$  – pro  $x < 1$  například aritmetický průměr  $\frac{x+1}{2} \in (0, 1)$ .

Na střední škole je tento nedostatek maxima snadné přehlížet, protože platí následující:

**Cvičení 1.** Každá konečná množina  $A \subset \mathbb{R}$  má maximum.

Jsou dva důvody, proč množina  $A \subseteq \mathbb{R}$  nemusí mít maximum – může se stát, že prvky  $A$  jsou libovolně velké, nebo že prvky  $A$  jsou sice shora omezené, ale žádná taková mez neleží v  $A$ . Pokud jsou prvky  $A$  libovolně velké, nemá moc smysl snažit se maximum zobecnit. Ve druhém případě se ale o to můžeme pokusit – naší snahou je říct, že třeba otevřený interval v příkladu 2 sice maximum nemá, ale stejně je pro něj hodnota 1 speciální – je to jakési „zobecněné maximum“ intervalu  $(0, 1)$ . Odražme se od omezenosti:

**Definice 3.** Mějme množinu  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Číslo  $s \in \mathbb{R}$  nazveme *horní mezí* množiny  $A$ , pokud všechny prvky  $A$  jsou menší než  $s$ , tj.  $\forall a \in A : a \leq s$ . Obdobně *dolní mez* je číslo takové, že všechny prvky  $A$  jsou větší než toto číslo.

Horní mez pro shora omezenou množinu  $A$  z definice existuje. Na druhou stranu ale není určena jednoznačně. Libovolné číslo větší než nějaká horní mez je totiž také horní mez. Jde prostě o nějakou hodnotu, která shora ohraničuje, jak velké prvky dané množiny vůbec mohou být. Platí však pěkné pozorování, že maximum je jednoduše horní mez, která je zároveň prvkem množiny. Naše zobecněné maximum také bude jistá speciální horní mez množiny.

**Pohádka 4.** V PraSestánu se staví nová školka. Bude tam docházet nekonečno dětí a každé z nich má nějaké pořadové číslo. Stavbyvedoucí si všiml, že  $n$ -té dítě je vysoké přesně  $2 - \frac{1}{n}$  metru. Jak vysoké musí postavit dveře, aby se do nich každé dítě vešlo, ale zároveň byly co nejnižší možné?

Odpověď je 2 metry. Zdůvodnění je prosté: Každé dítě je určité velké nejvýše 2 metry, tedy všechny dveřmi projdou. Zároveň pokud by stavbyvedoucí postavil dveře nižší než 2 metry, pak některé dítě dveřmi neprojde. Všimněme si, že kdyby měla množina výšek dětí maximum (tedy některé dítě bylo vyšší než všechny ostatní), pak by stačilo postavit dveře do výšky tohoto nejvyššího dítěte. Ale i přesto, že žádné maximum neexistuje, tak lze zvolit výšku dveří, která vyhovuje podmínkám. Dokonce ať by výšky jednotlivých dětí vypadaly jakkoliv, pokud by byly shora omezené, tak výška dveří vyhovující požadavkům půjde vždy zvolit. Této výšce se říká *supremum* výšek jednotlivých dětí a jde o jakési „vylepšené“ maximum, protože v reálných číslech existuje vždy, zatímco maximum jen někdy.

**Definice 5.** Necht  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Reálné číslo  $s$  nazveme *supremem* množiny  $A$ , pokud zároveň platí:

- (1)  $s$  je horní mezí množiny  $A$ ;
- (2) kdykoliv  $s'$  je horní mezí  $A$ , pak již  $s \leq s'$ .

Supremum můžeme chápat jako nejmenší z horních mezí. Vlastnost (2) se často používá jinak: Lze také říct, že pokud je  $s' < s$ , pak musí existovat  $a \in A$  takové, že  $s' < a$ . Neboli „*supremum je taková horní mez  $s$ , že kdykoliv se posuneme jakkoliv málo pod  $s$ , tak už budeme pod nějakým prvkem v  $A$ .*“

Tento mezistupeň mezi maximem na jedné straně a obecnou horní mezí na straně druhé kombinuje hezké vlastnosti obou těchto polů. Tak například stejně jako pro maximum platí jednoznačnost suprema:

**Tvrzení 6.** Každá neprázdná podmnožina  $\mathbb{R}$  má nejvýše jedno supremum.

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $s_1$  a  $s_2$  jsou suprema množiny  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Podle vlastnosti (1) z definice suprema je  $s_1$  horní mezí  $A$ , takže podle vlastnosti (2) pro supremum  $s_2$  musí  $s_2 \leq s_1$ . Obdobně  $s_2$  je horní mezí  $A$ , tedy dle vlastnosti (2) pro supremum  $s_1$  musí  $s_1 \leq s_2$ . Tato suprema jsou si proto již rovna.  $\square$

Supremum množiny  $A$  značíme  $\sup A$ . Ukažme nyní, že se vážně jedná o zobecnění maxima:

**Tvrzení 7.** Maximum  $m$  množiny  $A$  je zároveň i jejím supremem.

*Důkaz.* Z definice maxima máme ihned, že  $m$  je horní mezí  $A$ . Pro libovolnou horní mez  $s$  množiny  $A$  musí speciálně  $m \leq s$ , protože  $m$  leží v  $A$ . Tedy  $m$  je nejmenší horní mezí  $A$ , a tedy supremem  $A$ .  $\square$

**Cvičení 2.** Dokaž, že množina  $A = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$  má supremum 1.

Analogicky, jako jsme zobecnili maximum na supremum, se dá zobecnit minimum.

**Definice 8.** Necht  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Reálné číslo  $d$  nazveme *infimem* množiny  $A$ , pokud zároveň platí:

- (1)  $d$  je dolní mezí množiny  $A$ ;
- (2) kdykoliv  $d'$  je dolní mezí  $A$ , pak již  $d \geq d'$ .

Je sice užitečné umět mluvit jak o supremech, tak o infimech, ale jedno se dá na druhé snadno převést, takže v tomto dílu seriálu budeme typicky mluvit o maximech a supremech. Konkrétně si můžeme rozmyslet, že pro množinu  $A \subseteq \mathbb{R}$  platí  $\inf A = -\sup(-A)$ , pokud  $\sup(-A)$  existuje, kde  $-A = \{-x \mid x \in A\}$  jsou jednoduše opačné hodnoty čísel z  $A$ . Tímto vztahem suprema a infima se dá například velmi snadno ukázat, že infimum existuje nejvýše jedno nebo že minimum  $A$  je automaticky infimem  $A$ . Dále proto budeme pracovat hlavně se supremy.

Užitečná vlastnost suprema  $A$  je, že ačkoliv nemusí ležet přímo v  $A$ , vždy leží na hranici  $A$ .

**Tvrzení 9.** *Nechť  $A \subseteq \mathbb{R}$  má supremum. Pak existuje posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  prvků z  $A$  splňující  $\lim x_n = \sup A$ .*

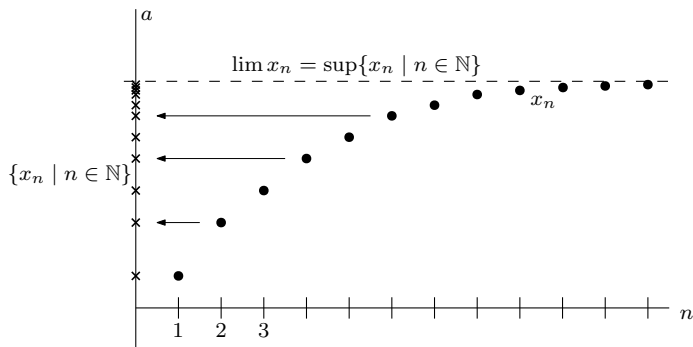
*Důkaz.* Pro každé  $n$  přirozené se podíváme na hodnotu  $\sup A - 1/n$ . To už není horní mez  $A$ , takže nalezneme  $x_n \in A$  takové, že  $x_n > \sup A - 1/n$ . Tím vytvoříme posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  čísel z  $A$ , pro kterou platí nerovnosti

$$\sup A - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup A < \sup A + \frac{1}{n},$$

kde využíváme, že supremum je horní mezí  $A$ . Platí proto  $|x_n - \sup A| < 1/n$ , a protože pravá strana konverguje k nule, musí i levá strana konvergovat k nule, neboli  $\lim x_n = \sup A$ .  $\square$

**Cvičení 3.** Umiš zařídit, aby v tvrzení 9 byla posloupnost rostoucí?

**Cvičení 4.** (Vztah suprema a limity) Nechť  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je neklesající posloupnost reálných čísel. Dokaž, že  $\lim x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , pokud alespoň jedno z nich existuje.



Zatím jsme si jen ukázali, že supremum je o něco obecnější pojem než maximum ve smyslu, že každá množina s maximem má i supremum, a že existují množiny bez maxima se supremem. Není zatím jasné, jestli jsme si nějak moc pomohli – mohlo by se stát, že stále většina shora omezených reálných množin  $A$  nemá ani maximum, ani supremum. Naštěstí tomu tak vůbec není, jak praví následující důležitá věta.

**Věta 10.** (Vlastnost suprema množiny reálných čísel) *Nechť  $A$  je libovolná neprázdná shora omezená podmnožina reálných čísel. Pak existuje reálné supremum množiny  $A$ .*

Tuto větu dokazovat nebudeme. Opírá se totiž přímo o podstatu reálných čísel – je možné reálná čísla definovat tak, že na rozdíl od racionálních čísel splňují vlastnost suprema. Toto je pak jedno z možných alternativních zavedení reálných čísel vedle úplnosti  $\mathbb{R}$ , kterou jsme diskutovali kolem věty 6 v druhém dílu seriálu. Úplnost a vlastnost suprema mají velmi těsný vztah, stejně jako jsou obecněji úzce provázané limitní přechody a suprema.

**Cvičení 5.** Ukaž, že existuje  $A$  omezená podmnožina racionálních čísel  $\mathbb{Q}$  taková, že  $A$  nemá racionální supremum.

**Cvičení 6.** Nechť  $A$  je množina a  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  jsou funkce. Předpokládejme, že existují reálná  $\sup_{x \in A} f(x)$  a  $\sup_{x \in A} g(x)$ , kde  $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$  (tj. supremum obrazu množiny  $A$ ). Dokaž, že platí

$$\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x).$$

**Úloha 1.** Najdi supremum množiny  $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Možná Ti v definici suprema přijde omezující podmínka, že množina musí být shora omezená. Někdy se tento problém řeší tím, že si k množině  $\mathbb{R}$  přidáme ještě prvek  $\infty$ , který je větší než všechna reálná čísla. Tím nám odpadne podmínka na omezenost shora. A pokud přidáme ještě prvek  $-\infty$  (který je menší než všechna reálná čísla i  $\infty$ ), odpadne nám i podmínka na neprázdnot (supremum prázdné množiny bude  $-\infty$ ). V tomto rozšířeném  $\mathbb{R}$  tedy úplně každá množina má supremum i infimum. To je pěkná vlastnost a strukturám, které ji splňují, se říká *úplné svazy*. Všimni si, že pojmy supremum a maximum se dívají jen na to, které prvky jsou větší než jiné a nijak nepracují s operacemi, které  $\mathbb{R}$  má, jako je násobení, sčítání a dělení. Rozšířením  $\mathbb{R}$  o nekonečna sice získáme suprema všech množin, ale zase ztratíme definovanost našich operací, protože třeba  $\infty - \infty$  nejde moc dobře dodefinovat.

## Nabývání extrémů

Při práci s funkcemi se velmi hodí, když funkce  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  na svém definičním oboru nabývá extrémů (tedy maxima či minima). Nicméně ne všechny funkce nabývají svého maxima: Například  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  svého maxima ani minima nenabývá, neboť  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  je neomezená.

Stejně tak se může stát, že  $f$  má na svém definičním oboru supremum, ale této hodnoty nenabývá, tedy se nejedná o maximum – například klasická hyperbola  $f(x) = 1/x$  na  $(-\infty, 0)$  má supremum 0, neboť pro hodně záporná  $x$  je  $1/x$  malé, ale stále záporné číslo, nicméně nikdy není  $1/x = 0$ .

Jeden ze způsobů, jak zaručit, že funkce nabývá svého maxima, je omezit se na spojitě funkce na kompaktním definičním oboru. Všimni si, že ve znění věty není o supremech ani zmínka. Použijí se totiž až v důkazu věty a hrají tam důležitou roli – bez vlastnosti suprema  $\mathbb{R}$ , případně úplnosti  $\mathbb{R}$ , by důkaz takto neprošel.

**Věta 11.** (O nabývání maxima) *Nechť  $(K, \rho)$  je neprázdný kompaktní metrický prostor a funkce  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá. Pak existuje bod  $x^* \in K$ , v němž  $f$  nabývá maxima, tzn. pro libovolné  $x \in K$  platí  $f(x) \leq f(x^*)$ .*

*Důkaz.* Zkusíme nejdřív najít maximální hodnotu  $f$  na  $K$ , a až pak samotný bod  $x^*$ , ve kterém  $f$  této hodnoty nabývá. Přírodním kandidátem na maximální hodnotu  $f$  je supremum množiny

$$f(K) = \{f(x) \mid x \in K\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Nejdřív si rozmysleme, proč by tato množina měla supremum mít. Protože je to podmnožina reálných čísel, víme, že supremum  $f(K)$  bude existovat, pokud bude  $f(K)$  shora omezená.

Na konci minulého dílu seriálu jsme si dokázali větu o spojitém obrazu kompaktu – ta nám v tomto případě říká, že  $f(K)$  je kompaktní v  $\mathbb{R}$ , neboť  $K$  je kompaktní a  $f$  je spojitá funkce. Pokud je ale  $f(K) \subseteq \mathbb{R}$  kompaktní, pak víme, že již musí být omezená. Tudiž má v reálných číslech opravdu supremum, označme ho  $s = \sup f(K)$ .

Nyní zkusme najít bod  $x^*$ . Protože  $s$  je supremum  $f(K)$ , můžeme díky tvrzení 9 najít posloupnost  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  bodů z  $f(K)$ , která k  $s$  konverguje. Navíc ke každému  $y_n$  existuje nějaké  $x_n \in K$  takové, že  $f(x_n) = y_n$  (jinak by  $y_n \notin f(K)$ ).

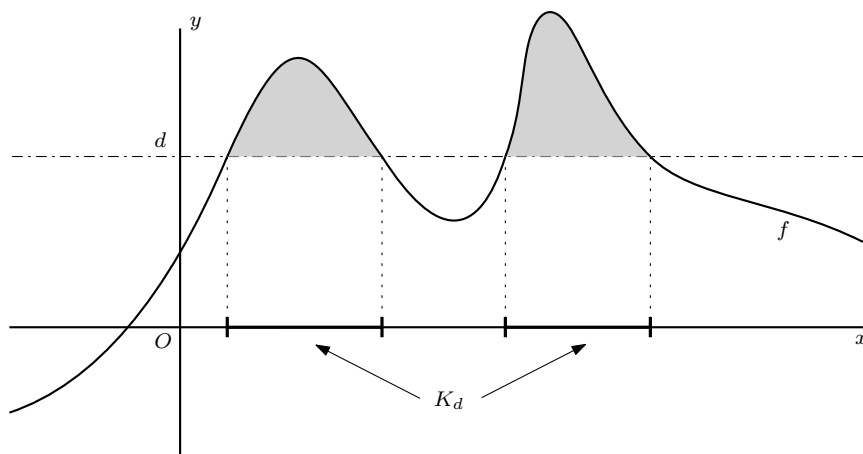
Máme tak novou posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  bodů z  $K$ , která nám bohužel zatím k ničemu nekonverguje, ačkoliv  $\lim f(x_n) = s$ . To snadno vyřešíme kompaktností  $K$ : Prostě vybereme podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  mající limitu  $x^* \in K$ . Pro podposloupnost stále platí  $\lim f(x_{n_k}) = s$ . Zároveň ale ze spojitosti  $f$  a Heineovy věty nyní musí platit  $\lim f(x_{n_k}) = f(x^*)$ .

Jednoznačnost limity nám tím pádem říká, že  $f(x^*) = s$ . A protože  $s$  je supremem množiny  $f(K)$ , musí pro každý bod  $x \in K$  platit  $f(x) \leq s = f(x^*)$ .  $\square$

Větu ještě trochu zesílíme – běžně se totiž stává, že  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá, ale počáteční volba metrického prostoru  $M$  není kompaktní. Nabývání maxima ale stejně půjde použít za předpokladu, že množina „potenciálních bodů maxima“ je kompaktní. Tím myslíme, že pokud například v nějakém bodě  $x_0$  platí  $f(x_0) = 1$ , pak nemá smysl hledat maximum v bodech  $x$ , v nichž  $f(x) < 1$ .

**Důsledek 12.** (Silnější nabývání maxima) *Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá. Nechť existuje číslo  $d \in \mathbb{R}$  takové, že množina  $K_d = \{x \in M \mid f(x) \geq d\}$  je neprázdná a kompaktní. Pak  $f$  na  $M$  nabývá svého maxima a všechny takové body nabývání leží v  $K_d$ .*

*Důkaz.* Funkce  $f$  je na kompaktu  $K_d$  spojitá, takže zde nabývá svého maxima, řekněme v bodě  $x^* \in K_d$ . Pak pro libovolný bod  $x \in M \setminus K_d$  platí  $f(x^*) \geq d > f(x)$  z definice  $K_d$ . Tedy žádný bod mimo  $K_d$  nemůže být bodem maxima  $f$ . To navíc ukazuje, že  $x^*$  je nejen bodem maxima na  $K_d$ , ale dokonce na celém  $M$ .  $\square$



Analogicky spojitě funkce na kompaktech nabývají svých minimálních hodnot, tedy dohromady svých *extrémů*, tj. maxim i minim. Důsledek o silnějším nabývání minima pak vyžaduje omezení se na neprázdnou a kompaktní množinu

$$K_d = \{x \in M \mid f(x) \leq d\}$$

potenciálních bodů minima.

**Cvičení 7.** Najdi funkci  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  takovou, že

- (1)  $(M, \rho)$  je metrický prostor,  $f$  je spojitá a  $f$  nenabývá svého maxima;
- (2)  $(M, \rho)$  je kompaktní metrický prostor,  $f$  není spojitá a  $f$  nenabývá svého maxima.

Jako první využití nabývání extrémů si ukážeme jakousi alternativu Banachovy věty o kontrakci. Zeslabíme požadavek na kontrakci, ale za cenu zesílení předpokladu na metrický prostor – v Banachově větě jsme požadovali pouze úplnost, teď budeme potřebovat kompaktnost.

**Tvrzení 13.** (Pevný bod neexpanzivního zobrazení) *Nechť  $(K, \rho)$  je kompaktní metrický prostor a  $f : K \rightarrow K$  splňuje pro každou dvojici různých bodů  $x, y \in K$*

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y).$$

*Pak má  $f$  na množině  $K$  právě jeden pevný bod.*

*Důkaz.* Definujme zobrazení  $u : K \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  jako  $u(x) = \rho(f(x), x)$ . Ukážeme, že  $u$  je spojitý, a tím budeme víceméně hotovi.

Buď tedy  $x \in K$  libovolný bod a  $\varepsilon > 0$ . Zvolme  $\delta = \varepsilon/2$ . Pak pro  $y \in U_\delta(x)$  platí

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y) < \delta = \varepsilon/2$$

díky předpokladu na zobrazení  $f$  (přitom pro  $x \neq y$  je první nerovnost ostrá, zatímco pro  $x = y$  jsou obě strany nulové). Díky trojúhelníkové nerovnosti následně platí

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &= \rho(f(x), x) - \rho(f(y), y) \leq \rho(f(x), f(y)) + \rho(f(y), y) + \rho(y, x) - \rho(f(y), y) = \\ &= \rho(f(x), f(y)) + \rho(y, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Stejně tak

$$u(y) - u(x) \leq \rho(f(y), f(x)) + \rho(f(x), x) + \rho(x, y) - \rho(f(x), x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

takže celkem  $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$  a  $u$  je opravdu spojitá funkce.

Protože  $u : K \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  je spojitá a  $K$  je kompaktní, musí existovat bod  $x^* \in K$ , v němž  $u$  nabývá svého minima. Toto  $x^*$  musí být pevným bodem  $f$  – kdyby tomu tak nebylo, tj.  $f(x^*) \neq x^*$ , pak by pro tyto různé body z vlastnosti  $f$  platilo

$$u(f(x^*)) = \rho(f(f(x^*)), f(x^*)) < \rho(f(x^*), x^*) = u(x^*),$$

takže by  $x^*$  nemohl být bodem minima  $u$ , neboť v bodě  $f(x^*)$  by  $u$  bylo menší. Tedy  $f(x^*) = x^*$  a našli jsme pevný bod  $f$  (a zároveň to znamená, že  $u$  nabývá v minimu hodnoty 0).

Nakonec dokážeme jednoznačnost – nechť je  $\bar{x} \in K$  pevným bodem zobrazení  $f$ , a pro spor navíc platí  $x^* \neq \bar{x}$ . Protože jsou pevné body různé, platí z vlastnosti  $f$

$$\rho(x^*, \bar{x}) = \rho(f(x^*), f(\bar{x})) < \rho(x^*, \bar{x}),$$

což je kvůli ostré nerovnosti spor. Tedy  $f$  má právě jeden pevný bod na  $K$ . □

**Cvičení 8.** Ukaž, že funkce  $f : (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$  daná jako  $f(x) = x + 1/x$  splňuje pro každá  $x, y \in (1, \infty)$  vztah  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ , ale  $f$  není kontrakcí.

Dalším pěkným využitím věty o nabývání extrémů je existence nejbližšího bodu množiny k danému bodu v prostoru.

**Příklad 14.** Nechť  $F$  je neprázdná uzavřená podmnožina v  $\mathbb{R}^n$  a  $a \in M$ . Pak existuje  $p \in F$  mající v  $F$  nejmenší vzdálenost od  $a$ .

*Řešení.* Definujme funkci  $f(x) = \rho(a, x)$  pro  $x \in F$ . Budeme chtít využít věty o nabývání extrémů, takže se bude hodit ukázat spojitost  $f$  a omezit se na nějaký kompak. Podívejme se nejdřív na spojitost. Všimneme si, že pro  $x, y \in F$  trojúhelníková nerovnost dává

$$\rho(x, a) - \rho(y, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) - \rho(y, a) = \rho(x, y)$$

a stejně tak

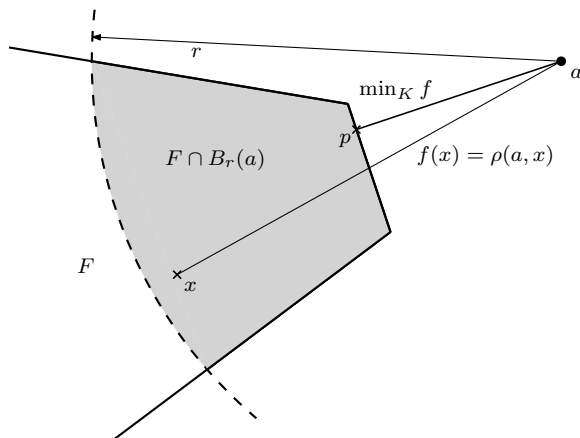
$$\rho(y, a) - \rho(x, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) - \rho(x, a) = \rho(x, y),$$

takže  $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$ . Jak jsme již několikrát viděli, z takového odhadu již plyne spojitost  $f$  – pro  $x \in F$  a  $\varepsilon > 0$  libovolné stačí zvolit  $\delta = \varepsilon$ .

Nyní se omezíme na kompak. Zvolíme poloměr  $r > 0$  dost velký tak, aby  $K = F \cap B_r(a)$  byla neprázdná množina. Protože protínáme uzavřenou  $F$  s uzavřenou koulí, je výsledná množina  $K$  již uzavřená i omezená, a tedy podle Heineovy-Borelovy věty kompaktní. Navíc minimum  $f$  na  $K$  se

bude shodovat s minimem  $f$  na  $F$ , protože pro body  $x \in F \setminus B_r(a)$  je vzdálenost  $x$  od  $a$  větší než  $r$ , takže v nich minimum nebude.

Protože  $f$  je spojitá funkce na kompaktu  $K$ , nabývá tak svého minima. Označme bod nabytí jako  $p \in K \subseteq F$ . Díky tomu, jak jsme zadefinovali  $f$ , je  $p$  zřejmě hledaný bod nejmenší vzdálenosti  $a$  od  $F$ .



**Cvičení 9.** Najdi v  $\mathbb{R}^n$  neprázdnou množinu  $A$  a bod  $a \in \mathbb{R}^n$  takové, že v  $A$  bod s nejmenší vzdáleností od  $a$  neexistuje (vzhledem k eukleidovské metrice).

**Cvičení 10.** Necht  $B_1(0)$  je uzavřená koule v  $\mathbb{R}^2$  v eukleidovské metrice a  $a$  je bod neležící v  $B_1(0)$ . Existuje nejbližší bod v  $B_1(0)$  k  $a$  jenom jeden? Co v případě koule  $B_1(0)$  v maximové metrice?

**Cvičení 11.** Ukaž, že pokud  $f$  je kladná reálná spojitá funkce definovaná na  $\langle 0, 1 \rangle$ , pak je funkce  $\frac{1}{f}$  omezená.

**Cvičení 12.** V rovině je dáno  $n$  bodů  $A_1 = (x_1, y_1), \dots, A_n = (x_n, y_n)$ . Dokaž, že existuje bod  $G$ , který má v součtu od bodů  $A_1, \dots, A_n$  minimální vzdálenost.

**Úloha 2.** V rovině je dáno  $n$  bodů  $A_1 = (x_1, y_1), \dots, A_n = (x_n, y_n)$ . Dokaž, že existuje přímka<sup>1</sup>  $p \subset \mathbb{R}^2$ , která *nejlépe aproximuje* body  $A_1, \dots, A_n$  ve smyslu, že tyto body mají součet kolmých vzdáleností od  $p$  nejmenší možný.

Na následujícím příkladu si ukážeme způsob, jak lze hledat maxima funkce  $f$ . Je založený na tom, že pokud víme, že bod maxima musí existovat, a zároveň se nám podaří o většině bodů ukázat, že v nich maximum není, tak bodem maxima už musí být jeden z těch bodů, které zbyly, aniž bychom pro něj museli maximalitu složitě ověřovat. Ukázat o bodu, že není bodem maxima, bývá totiž snazší než dokazovat opak – stačí prostě najít další bod, který funkční hodnotu  $f$  zvýší. Sice je následující příklad spíš ilustrační, ale tato metoda umí být velmi užitečná, jak uvidíme za tímto příkladem v dalším příkladu a rámečku.

**Příklad 15.** Urči, jaký je maximální obsah obdélníku s obvodem 20.

**Řešení.** Buďte  $x, y$  kladné délky stran obdélníku. Zajímají nás obdélníky splňující  $2(x + y) = 20$ , neboli  $x + y = 10$ , z čehož lze obsah psát jako  $S = xy = x(10 - x)$ , tj. jako funkci jedné proměnné, kterou je délka strany  $x$ .

<sup>1</sup>Hledání takové přímky je užitečné a jedná se o problém *lineární regrese*.



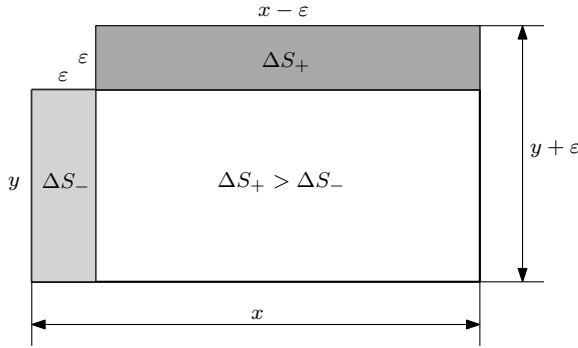
Bud'  $x \neq 10/2 = 5$ . Pak  $x$  a  $y$  jsou různá čísla, řekněme, že  $x > y$ . Podívejme se, co se stane, když  $x$  zmenšíme o nějaké kladné  $\varepsilon$  a  $y$  adekvátně zvýšíme pro zachování obvodu. Obsah se změní jako

$$S' = (x - \varepsilon) \cdot (10 - x + \varepsilon) = x(10 - x) + x\varepsilon - \varepsilon(10 - x) - \varepsilon^2 = S + \varepsilon(2x - 10 - \varepsilon),$$

kde  $S'$  označuje nový obsah pro délku strany  $x - \varepsilon$  a  $S$  označuje starý obsah pro délku strany  $x$ .

Protože  $x > y$  a platí  $x + y = 10$ , musí být  $2x > 10$ . Tím pádem pro dostatečně malá  $\varepsilon > 0$  platí  $2x - 10 - \varepsilon > 0$ , takže pro taková  $\varepsilon$  je  $S' > S$ , neboť přičítáme kladnou hodnotu  $\varepsilon(2x - 10 - \varepsilon)$ . Tím, že jsme trošku zmenšili hodnotu  $x$  a zvětšili hodnotu  $y$ , jsme zvýšili obsah obdélníku, přičemž obvod zůstal nezměněn. Tudíž obdélník se stranami  $x > y$  nemá maximální obsah. Analogicky obdélník se stranami  $x < y$  nemůže mít maximální obsah.

Pokud tedy obdélník s maximálním obsahem existuje, musí to být případ  $x = y$ , neboli když je obdélník čtvercem o délce strany 5. A to, že maximum existuje, plyne z věty o nabývání maxima, v tomto případě pro spojitou funkci  $f(x) = x(10 - x)$  na kompaktu  $\langle 0, 10 \rangle$ . Tudíž maximální obsah obdélníku s obvodem 20 je roven  $5^2 = 25$ .



**Příklad 16.** (AG nerovnost) Dokážeme, že pro nezáporná reálná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  platí

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n},$$

přičemž rovnost nastává právě když jsou si všechna  $a_i$  rovna.

*Řešení.* Necht' jsou nezáporné reálné hodnoty  $a_1, \dots, a_n$  dány a označme levou stranu dokazované nerovnosti jako  $\alpha$  a pravou jako  $\gamma$ . Pro nezáporné proměnné  $x_1, \dots, x_n$  definujeme funkce

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n},$$

tedy speciálně  $A(a_1, \dots, a_n) = \alpha$  a  $G(a_1, \dots, a_n) = \gamma$ .

Definujeme množinu

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x_1, \dots, x_n) = \alpha, \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i \geq 0\},$$

tedy v  $\Omega$  jsou ty  $n$ -tice  $(x_1, \dots, x_n)$ , které jsou nezáporné a dávají aritmetický průměr  $\alpha$ . Náš postup bude ukázat, že  $G$  na  $\Omega$  nabývá maxima  $\alpha$ . Protože speciálně  $(a_1, \dots, a_n)$  leží v  $\Omega$ , bude z toho plynout, že  $\alpha \geq G(a_1, \dots, a_n) = \gamma$ .

Množina  $\Omega$  je kompaktní: Předně je  $\Omega$  uzavřená, protože se jedná o průnik uzavřených množin  $\{x_i \geq 0\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  a  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) = \alpha\}$ , které lze psát jako vzory uzavřených množin při

spojitých zobrazeních, např. poslední množina je  $A^{-1}(\{\alpha\})$ . Dále je  $\Omega$  omezená, neboť pro  $x \in \Omega$  je

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq (x_1 + \cdots + x_n)^2 = n^2 \alpha^2,$$

kde první nerovnost platí roznásobením pravé strany díky nezápornosti  $x_i$  a druhá rovnost z definice množiny  $\Omega$ . Tím pádem každý bod  $\Omega$  je vzdálen od nuly nejvýše  $n\alpha$ , takže je  $\Omega$  omezená. Dle Heineovy–Borelovy věty je  $\Omega$  kompaktní.

Navíc je funkce  $G$  spojitá na  $\Omega$  (součin spojitých funkcí je spojitá funkce a odmocniny jsou spojitě na svých definičních oborech), takže dle věty o nabývání extrémů má  $G$  na  $\Omega$  bod maxima.

Nyní ukážeme, že v bodě maxima  $G$  na  $\Omega$  musí být  $x_1 = \cdots = x_n$ . Předpokládejme, že  $x \in \Omega$  toto nesplňuje, tj. existují  $k \neq \ell$  takové, že  $x_k > x_\ell$ . Zkusme bod  $x$  zperturovat do bodu  $x'$  jako  $x_k - \varepsilon$  a  $x_\ell + \varepsilon$ , ostatní souřadnice zůstanou nedotčeny. Pro dostatečně malé kladné  $\varepsilon$  bude stále  $x_k - \varepsilon \geq 0$  ( $x_k$  musí být kladné a nemůže být přímo nula, jinak by nemohlo  $x_\ell$  být ještě menší než  $x_k$ ). Navíc takto změněné souřadnice stále splňují  $A(x') = \alpha$ , takže  $x' \in \Omega$ .

Pro zkrácení zápisu použijeme součinnou notaci  $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^n x_i$ , a konkrétně  $\prod_{i \neq k, \ell} x_i$  znamená, že násobíme všechna  $x_i$  kromě  $x_k$  a  $x_\ell$ . V bodě  $x'$  se hodnota funkce  $G$  změní jako

$$\begin{aligned} (G(x'))^n &= (x_k - \varepsilon)(x_\ell + \varepsilon) \cdot \prod_{i \neq k, \ell} x_i = x_k x_\ell \prod_{i \neq k, \ell} x_i - \varepsilon x_\ell \prod_{i \neq k, \ell} x_i + \varepsilon x_k \prod_{i \neq k, \ell} x_i - \varepsilon^2 \prod_{i \neq k, \ell} x_i = \\ &= \prod_{i=1}^n x_i + \varepsilon(x_k - x_\ell - \varepsilon) \cdot \prod_{i \neq k, \ell} x_i = (G(x))^n + \varepsilon(x_k - x_\ell - \varepsilon) \cdot \prod_{i \neq k, \ell} x_i. \end{aligned}$$

Protože jsme předpokládali  $x_k > x_\ell$ , lze volbou dostatečně malého  $\varepsilon > 0$  zajistit, že  $x_k - x_\ell - \varepsilon > 0$ . Pak bude celý člen  $\varepsilon(x_k - x_\ell - \varepsilon) \cdot \prod_{i \neq k, \ell} x_i$  kladný, a tedy  $G(x') > G(x)$ . Ukázali jsme, že pokud  $x \in \Omega$  nemá všechny souřadnice stejné velké, potom existuje bod  $x'$  také ležící v  $\Omega$ , který zvýší hodnotu  $G$ . Tudíž  $G$  nemůže nabývat maxima v bodě s nestejnými souřadnicemi.

Přitom ale  $G$  na  $\Omega$  maxima nabývá, takže to již musí být v bodě  $x \in \Omega$ , kde  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ . Z podmínky  $\alpha = A(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$  vychází, že společná hodnota souřadnic musí být  $x_i = \alpha$ . Maximum  $G$  na  $\Omega$  tak je

$$\max_{x \in \Omega} G(x) = G(\alpha, \dots, \alpha) = \sqrt[n]{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha} = \alpha.$$

Nakonec pro původní zvolený bod díky  $(a_1, \dots, a_n) \in \Omega$  platí, že

$$A(a_1, \dots, a_n) = \alpha = \max_{x \in \Omega} G(x) \geq G(a_1, \dots, a_n) = \gamma,$$

což jsme chtěli dokázat.

**Úloha 3.** (CS nerovnost) Dokaž pomocí nabývání extrémů, že pro reálná  $a_1, \dots, a_n$  a  $b_1, \dots, b_n$  platí

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

(pro snazší práci klidně předpokládej nezápornost  $a_i$  a  $b_i$ ).

Slavná *základní věta algebry* říká, že každý nekonstantní polynom  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  s komplexními koeficienty má komplexní kořen  $x_0 \in \mathbb{C}$ . Naznačíme, jak se tato věta dá dokázat s využitím věty o nabývání minima. V tomto rámečku předpokládáme, že jsi už někdy komplexní čísla viděl(a). Speciálně budeme potřebovat znalost odmocnin z jedničky, konkrétně goniometrického nebo exponenciálního tvaru komplexních čísel, pomocí nichž umíme v  $\mathbb{C}$  řešit rovnice typu  $ax^k = b$  pro  $a, b$  komplexní nenulová čísla a  $k$  přirozené číslo.

Dále potřebujeme absolutní hodnotu komplexního čísla a znalost, že  $\mathbb{C}$  s metrikou  $\rho_{\mathbb{C}}(x, y) = |x - y|$  tvoří metrický prostor. Z hlediska metrického lze ale komplexní čísla  $a + bi$  dobře chápat jako rovinu  $\mathbb{R}^2$  s eukleidovskou metrikou  $\rho_2$ , neboť  $\rho_{\mathbb{C}}(a + bi, c + di)^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2 = \rho_2((a, b), (c, d))^2$ . V takto chápaném metrickém prostoru  $\mathbb{C}$  například platí Heineova–Borelova věta.

Nechť je tedy  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  nekonstantní,  $a_j \in \mathbb{C}$ . Bude nás zajímat chování spojité funkce  $\varphi(x) = |P(x)|$ ,  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ . První krok důkazu je ukázat, že pokud zvolíme dostatečně velký poloměr  $r > 0$ , pak  $\varphi$  bude mimo uzavřenou kuličku  $B_r(0)$  už všude velké, v analogii s tím, že každý nekonstantní reálný polynom pro velké argumenty „utíká do  $\pm\infty$ “. Zde „všude velké“ znamená, že existuje konstanta  $C > 0$  taková, že  $\varphi(x) > C$  pro  $x \notin B_r(0)$ , a zároveň v nějakém bodě  $y \in B_r(0)$  je  $\varphi(y) \leq C$ .

Pak množina  $K_C = \{x \in \mathbb{C} \mid \varphi(x) \leq C\}$  je podmnožinou  $B_r(0)$  a z analogie Heineovy–Borelovy věty pro  $\mathbb{C}$  se ukáže, že  $K_C$  je kompaktní. Podle varianty důsledku 12 pro minimum musí v  $K_C$  existovat bod  $x_0$ , v němž  $\varphi$  nabývá minima.

Druhým krokem důkazu je dokázat, že  $\varphi(x_0) = 0$ . Myšlenkou je ukázat, že kdyby  $\varphi(x_0) > 0$ , pak by šlo malým posunem ze  $x_0$  ve vhodném směru hodnotu  $\varphi$  zmenšit, což je ve sporu s minimalitou  $\varphi$  v  $x_0$ . Pro usnadnění života zavedeme pomocnou funkci  $\tilde{P}(x) = P(x + x_0)$ , která je nekonstantním polynomem  $\tilde{P}(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ . Dále buď  $\tilde{\varphi}(x) = |\tilde{P}(x)|$ , takže  $\tilde{\varphi}$  má minimum v 0 a  $\tilde{\varphi}(0) = \varphi(x_0)$ . Ekvivalentně ukážeme, že  $\tilde{\varphi}(0) = 0$ , neboli že  $b_0 = 0$ .

Nechť  $b_k$  je první nenulový koeficient  $\tilde{P}$  s co nejmenším kladným exponentem  $x^k$ , tedy  $\tilde{P}(x) = b_n x^n + \dots + b_k x^k + b_0$ . Označme ještě  $r(x) = b_n x^{n-k-1} + \dots + b_{k+2} x + b_{k+1}$ , takže platí

$$\tilde{P}(x) = x^{k+1} r(x) + b_k x^k + b_0.$$

To intuitivně znamená, že hodně blízko nuly se  $\tilde{P}$  „chová jako  $b_k x^k + b_0$ “ až na malou chybu způsobenou členy vyššího řádu v  $x^{k+1} r(x)$ .

Trojúhelníkovou nerovností získáme odhad

$$\tilde{\varphi}(x) = |\tilde{P}(x)| \leq |b_0 + b_k x^k| + |x^{k+1} r(x)|.$$

Minimum  $\tilde{\varphi}$  by mělo být  $\tilde{\varphi}(0) = |b_0|$ . V trojúhelníkové nerovnosti tvrdíme, že druhý člen bude blízko nuly zanedbatelný. Zkusme proto zmenšit první člen, konkrétně tak, aby  $b_k x^k = -\varepsilon b_0$  pro  $\varepsilon > 0$ . Pracujeme v komplexních číslech, takže tuto rovnici lze vyřešit! Pokud převeďme  $b_k$  a  $b_0$  do goniometrického tvaru jako  $b_k = |b_k|e^{i\alpha}$  a  $b_0 = |b_0|e^{i\beta}$ , tak třeba  $x = \sqrt[k]{\varepsilon \frac{|b_0|}{|b_k|}} \cdot e^{i(\pi + \beta - \alpha)/k}$  je řešením, načež

$$\tilde{\varphi}(x) \leq |b_0 - \varepsilon^k b_0| + |\varepsilon^{k+1} R(\varepsilon)| = |b_0| - \varepsilon^k (|b_0| - \varepsilon |R(\varepsilon)|),$$

kde  $\varepsilon |R(\varepsilon)|$  umí být pro dostatečně malá  $\varepsilon$  libovolné malé, neboť  $R$  je komplexní polynom, tj. na okolí nuly je  $|R|$  omezená.

Pro dostatečně malá  $\varepsilon$  tak bude  $|b_0| > \varepsilon |R(\varepsilon)|$ , a tudíž  $\tilde{\varphi}(x) < |b_0|$ , což je spor s minimalitou  $\tilde{\varphi}(0) = |b_0|$ . Jediný způsob, jak spor nenastane, je, že  $b_0 = 0$ , protože v takovém případě naše volba  $x$  jako řešení  $b_k x^k = -\varepsilon b_0$  bude taky nula. Pak je ale  $|P(x_0)| = \varphi(x_0) = \tilde{\varphi}(0) = 0$  a našli jsme kořen polynomu  $P$ .

## Funkce jako body

Věta o nabývání extrémů nám umožňuje podívat se na zajímavý nový typ metrických prostorů, které pro jednu nebývají  $\mathbb{R}^n$  s eukleidovskou metrikou. Jedná se o *prostor spojitých funkcí na kompaktu*. Jak název napovídá, nejdřív zvolíme nějaký kompaktní prostor  $(K, \rho)$  a zavedeme množinu

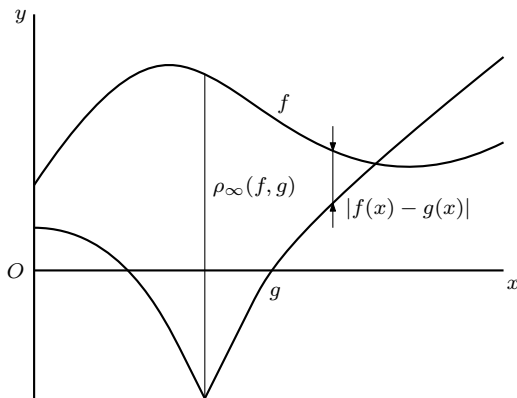
$$\mathcal{C}(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je spojitá}\},$$

tedy body nového metrického prostoru budou *funkce*.

Dvě spojitě funkce  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$  budeme měřit tak, že se podíváme, jak se jejich funkční hodnoty maximálně odlišují. Jinými slovy nás zajímá maximální hodnota  $|f(x) - g(x)|$  pro  $x \in K$ . Takovéto maximum opravdu existuje právě proto, že funkce  $f, g$  i  $|x|$  jsou spojitě, takže funkce  $h(x) = |f(x) - g(x)|$  je také spojitá a na kompaktu  $K$  nabývá maxima. Takto definovaná vzdálenost funkcí  $f$  a  $g$  opravdu splňuje axiomy metriky.

**Definice 17.** Buď  $(K, \rho)$  kompaktní metrický prostor. Množinu všech spojitých funkcí  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  značíme  $\mathcal{C}(K)$ . Na této množině definujeme *supremovou metriku* dvou funkcí  $f, g \in \mathcal{C}(K)$  jako

$$\rho_\infty(f, g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|.$$



**Cvičení 13.** Ukaž, že pro kompaktní metrický prostor  $(K, \rho)$  je  $(\mathcal{C}(K), \rho_\infty)$  také metrický prostor.

Prostor  $(\mathcal{C}(K), \rho_\infty)$  dává zajímavý nový způsob, jak přemýšlet o (spojitých) funkcích geometricky – jsou to zase jen body, mezi nimiž lze rozumně měřit vzdálenosti, mluvit o blízkosti funkcí a kreslit si obrázky s kuličkami. Navíc má  $\mathcal{C}(K)$  tu hezkou vlastnost, že v něm, narozdíl od obecných metrických prostorů, lze sčítat i násobit, neboť spojitost se při těchto operacích zachovává.

**Příklad 18.** Nechť  $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  je dána jako  $f(x) = x^2$ . Ukaž, že v kuličce  $U_1(f)$  leží funkce  $g(x) = x$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  a že nulová funkce  $0(x) = 0$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  leží na hranici  $U_1(f)$ .

*Řešení.*

Funkce  $h(x) = |f(x) - g(x)| = |x^2 - x|$  se na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  rovná  $h(x) = x - x^2$ , neboť pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  platí  $x^2 \leq x$ . Tato funkce je kvadratická s maximem  $h(1/2) = 1/4$ , jak lze vidět z doplnění na čtverec

$$h(x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Tím pádem  $\rho_\infty(f, g) = 1/4 < 1$ , takže  $g \in U_1(f)$ .

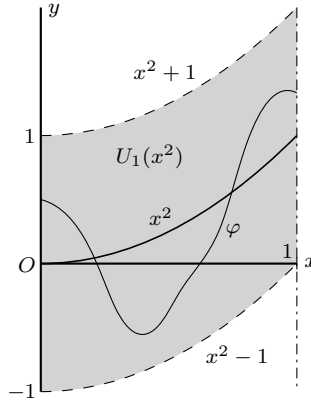
Hranice koule  $U_1(f)$  je, jako v každém metrickém prostoru, dána sférou

$$\partial U_1(f) = \{\varphi \in \mathcal{C}(K) \mid \rho_\infty(f, \varphi) = 1\},$$

takže stačí ukázat, že nulová funkce 0 má od  $f$  supremovou vzdálenost 1. To platí, protože funkce

$$\tilde{h}(x) = |f(x) - 0(x)| = |x^2 - 0| = x^2$$

má na  $\langle 0, 1 \rangle$  maximum  $\tilde{h}(1) = 1^2 = 1$ , takže opravdu  $\rho_\infty(f, 0) = 1$  a  $0 \in \partial U_1(f)$ .



Abychom měli i geometrickou představu, tak kouli  $U_1(x^2)$  v  $\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$  si lze představit tak, že se jedná o oblast mezi grafy funkcí  $x^2 - 1$  a  $x^2 + 1$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Je to proto, že v této oblasti jsou právě body mající svislou vzdálenost od  $x^2$  menší než 1. Spojitá funkce  $\varphi$  pak v kouli  $U_1(x^2)$  leží právě tehdy, když její graf celý leží ve zmíněné oblasti, tj. nikdy nepřekročí nad  $x^2 + 1$  ani pod  $x^2 - 1$ . Tudíž na obrázku nakreslená funkce  $\varphi$  v kouli  $U_1(x^2)$  leží. To, že nulová funkce leží na hranici  $U_1(x^2)$  pak plyne z obrázku tak, že se nulová funkce v bodě 1 dotýká „dolního mantinelu“  $x^2 - 1$ .

Různé volby kompaktu  $K$  dávají různě se chovající prostory  $\mathcal{C}(K)$ . Většinu času budeme pracovat s  $K = \langle 0, 1 \rangle$ , protože se spojitými funkcemi na uzavřeném intervalu se relativně snadno pracuje, a přitom mají zajímavé chování. Volba hraničních bodů jako 0 a 1 je přitom čistě pro usnadnění výpočtů a typicky by obdobné chování měly spojitě funkce na libovolném uzavřeném intervalu. Pěkné věty například platí i pro volbu  $K$  jako kružnice v  $\mathbb{R}^2$  nebo sféry<sup>2</sup> v  $\mathbb{R}^3$ . V následujícím cvičení se podíváme na volbu  $K$  jako malého diskrétního prostoru, a uvidíme, že  $\mathcal{C}(K)$  se v takovém případě chová jako nám známé prostory  $\mathbb{R}^n$ .

**Cvičení 14.** Rozmysli si, že pro prostor  $K = \{1, 2\}$  s diskrétní metrikou  $\rho_{\text{disk}}$  lze  $\mathcal{C}(K)$  chápat jako  $\mathbb{R}^2$  s maximovou metrikou.

<sup>2</sup>Tak například *Borsukova–Ulamova věta* říká, že pokud  $a$  je bod v  $\mathbb{R}^3$  a  $r > 0$ , pak pro spojitou funkci na sféře  $f : \partial U_r(a) \rightarrow \mathbb{R}^2$  vždy existují protilehlé body  $x, \bar{x} \in \partial U_r(a)$  takové, že  $f(x) = f(\bar{x})$  (protilehlé ve smyslu, že přímka daná body  $x$  a  $\bar{x}$  prochází středem sféry  $a$ ). To se často popularizačně popisuje tak, že na povrchu Země vždy existují dva protilehlé body, v nichž je stejná teplota a tlak. Samozřejmě za předpokladu, že teplota i tlak se na Zemi mění spojitě, a se zjednodušením, že Země je koule.

Může vypadat trochu zvláštně, že metriku  $\rho_\infty$  nazýváme supremovou metrikou a ne maximovou metrikou, když ji definujeme maximem. Abychom to trochu ospravedlnili, supremovou metriku lze ekvivalentně definovat supremem jako  $\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)|$  pro dvě spojitě funkce  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$  a kompaktní metrický prostor  $(K, \rho)$ . Definice s maximem je akorát trochu explicitnější, protože z věty o nabývání extrémů víme, že pro spojitě funkce  $f, g$  ono maximum opravdu existuje.

Na druhou stranu využít supremum pro definici metriky  $\rho_\infty$  má svou výhodu, protože s ním lze měřit větší množství funkcí. Například buď  $(M, \rho)$  libovolný metrický prostor a označme  $\mathcal{B}(M)$  jako prostor omezených funkcí na  $M$ , tj.

$$\mathcal{B}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{existuje } c > 0 \text{ takové, že } |f(x)| \leq c \text{ pro všechna } x \in M\}.$$

Pro  $f, g \in \mathcal{B}(M)$  pak  $\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)|$  vždy existuje (funkce  $|f(x) - g(x)|$  neroste nade všechny meze, tj. je omezená a má supremum) a lze ukázat, že  $(\mathcal{B}(M), \rho_\infty)$  také tvoří metrický prostor. Zobecnění je v tom, že nevyžadujeme ani kompaktnost  $M$ , ani spojitost měřených funkcí. Maxima pro takové funkce existovat nemusí, takže supremovou metriku  $\rho_\infty$  dává smysl definovat pouze supremem.

Takovéto zobecnění je však za cenu toho, že  $\mathcal{B}(M)$  nemá obecně tolik pěkných vlastností jako  $\mathcal{C}(K)$ . Budeme se proto věnovat pouze spojitým funkcím na kompaktu.

Užitečná vlastnost prostorů  $\mathcal{C}(K)$  je jejich úplnost.

**Věta 19.** Pro kompaktní prostor  $(K, \rho)$  je prostor  $\mathcal{C}(K)$  úplný.

Větu dokazovat nebudeme, je to trochu pracné. Základní myšlenka důkazu je ale taková, že pokud máme cauchyovskou posloupnost spojitých funkcí  $(f_n)_{n=1}^\infty$ , pak speciálně pro každý bod  $x \in K$  je i posloupnost reálných čísel  $(f_n(x))_{n=1}^\infty$  cauchyovská. Protože je  $\mathbb{R}$  úplný prostor, má tato posloupnost limitu, tu označíme jako  $f(x)$ , neboť závisí na volbě bodu  $x \in K$ . Tím vytvoříme novou funkci  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , která je bodově definovaná jako  $f(x) = \lim (f_n(x))$ . O této funkci je pak potřeba dokázat, že je jednak spojitá, jednak že je limitou posloupnosti funkcí  $(f_n)_{n=1}^\infty$  vzhledem k supremové metrice. Přitom se netriviálně využije kompaktnosti  $K$  – spojitě funkce na kompaktu automaticky splňují jistou silnější definici spojitosti (tzv. *stejněměrnou spojitost*) a ta se použije k ukázání spojitosti  $f$ .

Protože je prostor  $\mathcal{C}(K)$  úplný, lze na něm například používat Banachovu větu o kontrakci. Tímto způsobem je někdy možné řešit funkcionální rovnice, jak ukážeme v následujícím příkladu.

**Příklad 20.** Nalezni všechny spojitě funkce  $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  splňující

$$2f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = x.$$

*Řešení.* Rovnici přeuspořádáme jako  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x/2) + x^2)$ . Tato rovnice připomíná hledání pevného bodu, akorát neznámým „bodem“ je v tomto případě hledaná funkce  $f$ . V kontextu metrických prostorů to ale není problém.

Definujeme zobrazení  $T : \mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow \mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$  jako

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x/2) + x^2), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Zobrazení  $T$  tedy každé  $f \in \mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$  přiřadí novou funkci  $T(f)$ , která je v každém bodě  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  dána vzorcem výše. To, že  $T(f)$  je taky spojitá funkce na  $\langle 0, 1 \rangle$ , není úplně zřejmé, ale plyne to z toho, že funkce  $x^2$  i  $f(x/2)$  jsou spojitě, takže i jejich součet je spojitý, jak jsme zmiňovali v druhém dílu seriálu. Přitom  $f(x/2)$  je spojitá, protože se jedná o složení spojitých funkcí  $f$  a  $x/2$ .

Nyní ukážeme, že  $T$  je kontrakcí na prostoru  $(\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle), \rho_\infty)$ . Pro libovolný bod  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  platí

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(g)(x)| &= \left| \frac{1}{2} \cdot (f(x/2) + x^2) - \frac{1}{2} \cdot (g(x/2) + x^2) \right| = \frac{1}{2} |f(x/2) - g(x/2)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{y \in \langle 0, 1 \rangle} |f(y/2) - g(y/2)| = \frac{1}{2} \max_{z \in \langle 0, 1/2 \rangle} |f(z) - g(z)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{z \in \langle 0, 1 \rangle} |f(z) - g(z)| = \frac{1}{2} \rho_\infty(f, g), \end{aligned}$$

kde jsme v úpravách maxima nejdřív využili substituce  $z = y/2$ , a následně toho, že maximum přes větší množinu  $\langle 0, 1 \rangle$  bude větší nebo rovno maximum přes menší  $\langle 0, 1/2 \rangle$ . Pro každý bod  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  jsme ukázali odhad  $|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \frac{1}{2} \rho_\infty(f, g)$ , takže už musí platit i

$$\rho_\infty(T(f), T(g)) = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \frac{1}{2} \rho_\infty(f, g).$$

To dokazuje, že  $T$  je kontrakcí na prostoru spojitých funkcí.

Protože je navíc  $\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$  úplný prostor, má podle Banachovy věty o kontrakci zobrazení  $T$  právě jeden pevný bod, takže existuje právě jedno spojitě řešení  $f$  zadané rovnice

$$2f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = x$$

na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Můžeme celkem snadno tipnout, že toto řešení bude lineární, tj. tvaru  $f(x) = ax + b$ . Dosazením dostaneme  $2ax + 2b - ax/2 - b = x$  a porovnáním koeficientů u lineárního a absolutního členu zjistíme, že  $2a - a/2 = 1$  a  $2b - b = 0$ , tedy  $a = 2/3$  a  $b = 0$ . Funkce  $f(x) = 2x/3$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  je tak jediným spojitým řešením zadané rovnice.

Může se zdát, že jsme se v příkladu většinu času věnovali nepodstatným věcem, a pak řešení náhodně tipli. Ale celý náš postup stál na tom, že jsme ukázali, že tipnout řešení dává smysl, protože existuje právě jedno – díky existenci mělo smysl vůbec tipovat, a jediný správný tip stačí na nalezení všech (tj. jednoho) řešení. V závislosti na funkcionální rovnici může být tipnutí řešení ta jednodušší část, zatímco tou pracnější je ukázat, že jiná řešení neexistují.

Ještě poznamenejme, že kdyby místo funkce  $x$  na pravé straně rovnice byla libovolná funkce  $R \in \mathcal{C}(K)$ , tak by úplně stejný postup jako v příkladu pomocí Banachovy věty zaručil, že funkcionální rovnice

$$2f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = R(x)$$

má právě jedno spojitě řešení  $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Tedy například i o strašlivostech typu

$$2f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = x^{2026} + \sin(6x^3 + 7x) - 2^x$$

můžeme říct, že existuje právě jedna spojitá  $f$  splňující takovou rovnici na  $\langle 0, 1 \rangle$ . Tipnout řešení by bylo o něco nepříjemnější, ale alespoň víme, že pokud označíme

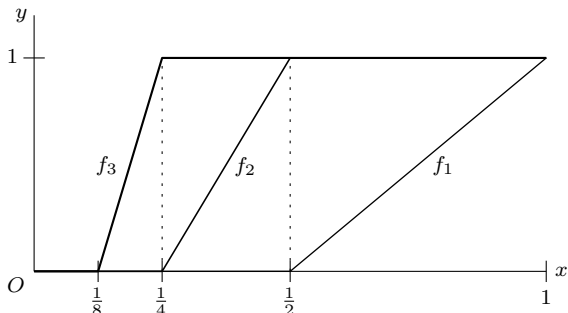
$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{x}{2}\right) + x^{2026} + \sin(6x^3 + 7x) - 2^x \right),$$

tak posloupnost definovaná volbou  $f_0 \in \mathcal{C}(K)$  a  $f_{n+1} = T(f_n)$  konverguje k řešení vzhledem k metrice  $\rho_\infty$ .

Jako předzvěst další kapitoly se podíváme na to, že uzavřené koule v  $\mathcal{C}(K)$  nemusí být kompaktní.

**Příklad 21.** Dokaž, že v metrickém prostoru  $(C(\langle 0, 1 \rangle), \rho_\infty)$  koule  $B_1(0)$  není kompaktní navzdory tomu, že je uzavřená a omezená.

*Řešení.* Uzavřenost i omezenost koule  $B_1(0)$  je jasná, platí to pro všechny uzavřené koule ve všech metrických prostorech. Její nekompaktnost ukážeme jako obvykle tak, že najdeme nekonečnou posloupnost prvků, které jsou od sebe všechny daleko alespoň 1.



Provedeme to třeba volbou  $n$ -té funkce jako na obrázku, které jsou dány předpisy  $f_n(x) = 0$  pro  $x \in \langle 0, 1/2^n \rangle$ , dále  $f_n(x) = 2^n(x - 1/2^n)$  pro  $x \in \langle 1/2^n, 1/2^{n-1} \rangle$ , a nakonec  $f_n(x) = 1$  pro  $x \in \langle 1/2^{n-1}, 1 \rangle$ . Předpisy ale ve výsledku nejsou tak důležité, hlavní je myšlenka s tím, že chceme spojitě funkce takové, že dvě různé se vždy v nějakém bodě liší o 1.

Každá takováto funkce je spojitá na  $\langle 0, 1 \rangle$ , neboť na vnitřku intervalů  $\langle 0, 1/2^n \rangle$ ,  $\langle 1/2^n, 1/2^{n-1} \rangle$ ,  $\langle 1/2^{n-1}, 1 \rangle$  se jedná o jednoduché spojitě konstantní nebo lineární části a v krajních bodech těchto intervalů se tyto části spojitě napojují. Navíc supremová vzdálenost každé této funkce od nulové funkce 0 je přesně 1, takže  $f_n \in B_1(0)$ .

Podívejme se na vzdálenost funkcí  $f_n$  a  $f_m$ , kde  $n > m$ . Funkce  $f_m$  má v bodě  $a = 1/2^m$  hodnotu  $f_m(a) = 0$ . Zato funkce  $f_n$  splňuje  $f_n(a) = 1$ , neboť  $a = 1/2^m \geq 1/2^{n-1}$ , takže  $a \in \langle 1/2^{n-1}, 1 \rangle$ . Tudíž  $\rho_\infty(f_n, f_m) \geq |f_n(a) - f_m(a)| = 1$ .

Žádná podposloupnost posloupnosti  $(f_n)_{n=1}^\infty$  „bodů“ v  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  tak není cauchyovská, takže ani nemůžeme vybrat konvergentní podposloupnost. Tedy  $B_1(0)$  není kompaktní.

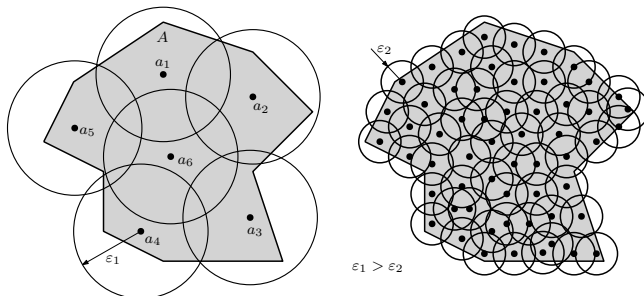
## Intermezzo: Kompakty jsou malé podruhé

Ve druhém dílu seriálu jsme naznačili, že bychom se chtěli dívat na kompakty jako na úplné a „malé“ množiny. Heineova–Borelova věta nám něco takového umožnila v prostorech  $\mathbb{R}^n$  pomocí omezenosti. Nicméně příklad 21 ukazuje, že v jiných metrických prostorech klidně můžou úplné a omezené množiny být nekompaktní. Omezené množiny nemusí být v  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  „dostatečně malé“. Pojem omezenosti proto vylepšíme, abychom opravdu dostali charakterizaci kompaktnosti.

**Definice 22.** Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$ . Řekneme, že  $A$  je *totálně omezená*, pokud pro libovolné  $\varepsilon > 0$  umíme najít konečně bodů<sup>3</sup>  $a_1, \dots, a_n \in A$  takových, že kuličky  $U_\varepsilon(a_i)$  pokrývají celé  $A$ , tj.  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(a_i)$ .

<sup>3</sup>Pro dané  $\varepsilon > 0$  se takovým bodům  $a_1, \dots, a_n$  říká  $\varepsilon$ -síť. Tento pojem nebudeme potřebovat, ale je celkem názorný – alespoň intuitivně si lze představovat rybářskou síť s pevnými body  $a_1, \dots, a_n$ , která je s menším  $\varepsilon$  jemnější (tj. má menší oka) a zvládne zachytávat menší objekty (třeba v  $\mathbb{R}^2$  libovolná kulička o poloměru alespoň  $\varepsilon$  musí obsahovat alespoň jeden z bodů  $a_1, \dots, a_n$ , tj. neproklouzne sítí).





Totální omezenost množiny je silnější vlastnost než pouhá omezenost. Je to jednoduše proto, že pokud lze množinu pokrýt konečně kuličkami, pak lze tyto kuličky uzavřít do větší koule, a ta pak dokazuje omezenost původní množiny. Klíčový je zde ovšem konečný počet kuliček (jinak totiž lze každý prostor pokrýt kuličkami se středy ve všech bodech, ale pak takových kuliček snadno může být nekonečno).

**Tvrzení 23.** *Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$  je totálně omezená. Pak je  $A$  také omezená.*

*Důkaz.* Nalezneme body  $a_1, \dots, a_n \in A$  takové, že  $A$  je pokryta kuličkami  $U_1(a_1), \dots, U_1(a_n)$  o poloměru 1. Zvolme pevně nějaké  $s \in A$  a položíme

$$r = \max\{\rho(s, a_1) + 1, \dots, \rho(s, a_n) + 1\}.$$

Pokud je nyní  $x \in A$  libovolné, tak lze díky pokrytí  $A$  kuličkami najít index  $k \in \{1, \dots, n\}$  takový, že  $x$  leží v kuličce  $U_1(a_k)$ . Pak je z trojúhelníkové nerovnosti

$$\rho(s, x) \leq \rho(s, a_k) + \rho(a_k, x) < \rho(s, a_k) + 1 \leq r.$$

Tedy  $x$  leží v  $U_r(s)$ . Protože  $x$  byl libovolný bod  $A$ , platí  $A \subseteq U_r(s)$ , takže  $A$  je omezená.  $\square$

Dostáváme se ke slibovanému popisu kompaktních množin. Všimni si, že pokud je  $(M, \rho)$  úplný prostor, pak víme z druhého dílu seriálu, že každá uzavřená množina  $F \subseteq M$  je také úplná, takže kompaktnost takové  $F$  je ekvivalentní totální omezenosti  $F$ . Přitom definice kompaktnosti mluví o konvergentních podposloupnostech, zatímco totální omezenost o pokrývání  $F$  konečným počtem kuliček, což jsou zdánlivě dost odlišné věci. Obě ale popisují stejný typ množin, kompakty.

**Věta 24.** *Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$ . Pak  $A$  je kompaktní právě tehdy, když je  $A$  úplná a totálně omezená.*

*Důkaz.* Nechť je nejdříve  $A$  kompaktní. Již víme, že pak musí být  $A$  úplná. Kdyby nebyla totálně omezená, tak by existovalo  $\varepsilon > 0$  takové, že žádný konečný počet  $\varepsilon$ -kuliček  $A$  nepokryje. V tu chvíli lze postupně volit  $a_1 \in A$ ,  $a_2 \in A \setminus U_\varepsilon(a_1)$ ,  $a_3 \in A \setminus (U_\varepsilon(a_1) \cup U_\varepsilon(a_2))$  a tak dále, čímž vytvoříme posloupnost  $(a_n)_{n=1}^\infty$  bodů v  $A$ . Všechny její body jsou ale navzájem od sebe alespoň  $\varepsilon$  daleko – pro  $n > m$  bylo  $a_n$  voleno tak, aby neleželo v  $U_\varepsilon(a_m)$ . To znamená, že tato posloupnost nemůže mít konvergentní podposloupnost, protože žádná podposloupnost není cauchyovská. To je spor s kompaktností  $A$ . Tedy  $A$  musela být totálně omezená.

Nechť je nyní naopak  $A$  úplná a totálně omezená. Nechť je  $(x_n)_{n=1}^\infty$  posloupnost bodů v  $A$ , ze které chceme vybrat konvergentní podposloupnost. Myšlenka je podobná důkazu Bolzanovy-Weierstrassovy věty, ve kterém jsme vždycky rozpílili interval a hledali tu půlku, ve které leží nekonečno bodů posloupnosti. Tentokrát  $A$  vždy pokryjeme konečně kuličkami, vybereme tu s nekonečným bodů posloupnosti, tu zase pokryjeme konečným počtem menších kuliček, vybereme tu s nekonečným bodů posloupnosti, a tak dále.

Konkrétně nejdřív z totální omezenosti nalezneme body (pozor, horní index je index, ne mocnina)  $a_1^1, \dots, a_{n(1)}^1$  takové, že  $A$  je pokryta kuličkami  $U_1(a_i^1)$ . Pak alespoň v jedné z nich musí ležet nekonečno bodů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , tu označme jako  $G_1$ .

Nyní nalezneme body  $a_1^2, \dots, a_{n(2)}^2$  takové, že  $A$  je pokryta kuličkami  $U_{1/2}(a_i^2)$ . Pak musí platit

$$G_1 = A \cap G_1 = \bigcup_{i=1}^{n(2)} (U_{1/2}(a_i^2) \cap G_1).$$

Levá množina obsahuje nekonečně bodů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , zatímco pravá strana je sjednocení konečně mnoha množin, takže existuje  $i$  takové, že  $U_{1/2}(a_i^2) \cap G_1$  obsahuje nekonečně bodů z  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Tuto množinu označme jako  $G_2$ .

Obecně, pokud již máme množiny  $G_k \subseteq G_{k-1} \subseteq \dots \subseteq G_1$  obsahující nekonečně bodů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , pak z totální omezenosti nalezneme  $a_1^{k+1}, \dots, a_{n(k+1)}^{k+1}$  takové, že  $U_{1/(k+1)}(a_i^{k+1})$  pokrývají  $A$ , dále zvolíme jednu z těchto kuliček, která v průniku s  $G_k$  obsahuje nekonečno bodů dané posloupnosti, a tento průnik označíme  $G_{k+1}$ . Takto umíme vytvořit nekonečnou posloupnost množin  $(G_k)_{k=1}^\infty$ .

Nyní budeme podobně jako v Bolzanově-Weierstrassově větě vybírat podposloupnost tak, že  $x_{n_1}$  vybereme z  $G_1$ , následně  $x_{n_2}$  vybereme z  $G_2$  tak, aby  $n_2 > n_1$ , a tak dále. Obecně,  $x_{n_k}$  vybíráme z  $G_k$ , aby zároveň  $n_k > n_{k-1}$  – to lze, neboť v  $G_k$  leží nekonečno bodů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , takže lze vybrat bod s libovolně velkým indexem. Takto vybereme podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ .

Dále ukážeme, že  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  je cauchyovská. Buď  $\varepsilon > 0$  libovolné, pak lze najít  $n_0$  takové, že pro  $n \geq n_0$  již je  $1/n < \varepsilon/2$ . Buďte  $k > \ell \geq n_0$  libovolná. Pak  $x_{n_k} \in G_k \subseteq G_\ell$  a  $x_{n_\ell}$  také leží v  $G_\ell$ . Ale množina  $G_\ell$  byla zkonstruována jako průnik  $G_{\ell-1}$  s nějakou kuličkou  $U_{1/\ell}(a_i^\ell)$  o poloměru  $1/\ell$ , takže vzdálenost  $x_{n_k}$  od  $x_{n_\ell}$  je nanejvýš  $2/\ell < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$ , neboť leží ve stejné kuličce. Tím jsme ověřili cauchyovskost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ .

Nakonec využijeme předpokládané úplnosti  $A$ , která nám říká, že cauchyovská  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  již musí být konvergentní. Díky libovolnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$  jsme ukázali, že  $A$  je kompaktní. □

Existuje spousta dalších popisů kompaktnosti. Například vlastnost, že spojitě funkce na kompaktu nabývají svého maxima, je ve skutečnosti jiná charakterizace kompaktnosti – pokud  $(M, \rho)$  je metrický prostor, pak  $M$  je kompaktní právě tehdy, když každá spojitá  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  nabývá svého maxima. Neboli na nekompaktním prostoru vždy musí existovat spojitá funkce, která svého maxima nenabývá.

Ještě jiný popis kompaktnosti prostoru  $(M, \rho)$  je tento: Pokud zvolíme libovolný systém otevřených množin  $\mathcal{G}$  pokrývajících  $M$ , tj.  $M \subseteq \bigcup \mathcal{G}$ , pak vždy musí existovat konečný podsystém  $\mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{G}$  stále pokrývajících  $M$ . Často je toto ten způsob, jak se kompaktnost definuje, protože se dobře chová i při zobecňování metrických prostorů. Nicméně tento popis umí být poněkud nepřehledný.

Přesto dává nový užitečný pohled na to, co kompaktnost umí. Celkem často se totiž stává, že něco platí na každé kuličce – okolíčku – kolem každého bodu. Takových kuliček je bohužel typicky příliš mnoho a špatně se s nimi pracuje. Ovšem takové kuličky kolem všech bodů prostoru jistě prostor pokrývají, takže pokud je prostor kompaktní, lze z nich vybrat nějaký konečný počet speciálních kuliček, které ho stále pokrývají. Z nekonečna jsme udělali konečný počet, se kterým se mnohem lépe zachází!

Například totální omezenost kompaktního plyne z tohoto popisu kompaktnosti ihned: Pokud je  $K$  kompaktní a  $\varepsilon > 0$  libovolné, tak nejdříve pokryjeme  $K$  všemi možnými kuličkami  $U_\varepsilon(x)$ ,  $x \in K$  – ty tvoří náš systém  $\mathcal{G}$ . Z kompaktnosti existuje jeho konečný podsystém, tj. konečný počet bodů  $x_1, \dots, x_n \in K$  takových, že  $K \subseteq U_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup U_\varepsilon(x_n)$ . Tedy  $K$  je totálně omezená.

## Aproximace spojitých funkcí

Na závěr seriálu si zmíníme bez důkazu Weierstrassovu větu, podle které lze každou spojitou funkci na omezeném intervalu libovolně přesně polynomiálně aproximovat.

**Věta 25.** (Weierstrassova) *Nechť  $a < b$  jsou reálná čísla a nechť  $f \in C(\langle a, b \rangle)$ . Pak existuje posloupnost polynomů  $(P_n)_{n=1}^\infty$ , která v supremové metrice  $\rho_\infty$  konverguje k  $f$  na  $\langle a, b \rangle$ .*

Ekvivalentně lze říct, že pro každou toleranci  $\varepsilon > 0$  existuje polynom  $P$  takový, že se v libovolném bodě  $x \in \langle a, b \rangle$   $P$  od  $f$  liší jako  $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ . Ještě jinak můžeme o Weierstrassově větě přemýšlet takto: Každý polynom na  $\langle a, b \rangle$  je spojitý, takže pokud označíme jako  $A = \{P \mid P \text{ je polynom na } \langle a, b \rangle\}$ , pak  $A$  je podmnožinou  $C(\langle a, b \rangle)$ . Weierstrassova věta říká, že  $A$  je *hustá* v  $C(\langle a, b \rangle)$ , neboli že uzávěr  $A$  dá celý prostor  $C(\langle a, b \rangle)$ .

Z Weierstrassovy věty plyne, že polynomy jsou dostatečně flexibilní typ funkcí, kterými lze až na (libovolně) malou chybu nahrazovat komplikovanější spojitě funkce. Navíc jeden z důkazů Weierstrassovy věty přímo ukazuje, jak vhodné aproximující polynomy hledat, takže je jsme schopni i přímo konstruovat a pracovat s nimi.

**Cvičení 15.** Najdi nespojitou funkci na uzavřeném intervalu, kterou nejde libovolně přesně aproximovat polynomem.

**Úloha 4.** Nechť  $f \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ . Lze  $f$  v supremové metrice libovolně přesně aproximovat polynomem, který má pouze sudé exponenty, tj. tvaru  $a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_2x^2 + a_0$ ? Co kdyby  $f$  ležela v  $C(\langle -1, 1 \rangle)$ ?

## Rozloučeníčko

Tak jsme na konci. Děkujeme, že sis náš seriál přečetl(a), a moc doufáme, že sis z něj něco užitečného odnesl(a), a snad že Tě i místy bavil. Přejeme hodně štěstí v řešení nejen seriálové série a měj se krásně!

### Návody k úlohám

1. Přirozeným kandidátem je 1, protože  $\sin(\pi/2) = 1$  je maximální hodnota sinu. Ukaž, že se lze přirozeným  $n$  přiblížit libovolně blízko hodnotě  $\pi/2 + 2k\pi$  pro nějaké  $k$  celé – je užitečné se dívat na  $n$  „modulo  $2\pi$ “ a použít Dirichletův princip na spoustu hodnot  $(n \bmod 2\pi)$ .

2. Vhodně přímku parametrizuj, abys mohl(a) pracovat na prostoru parametrů. Omez se jen na takové parametry, které nedávají přímku úplně daleko od zadaných bodů  $A_1, \dots, A_n$ .

3. Inspiruj se příkladem s AG nerovností. Zvol pevně  $a, b \in \mathbb{R}^n$  a definuj funkci  $R(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Ukaž, že na vhodné množině  $R$  nabývá minima. Dále ukaž, že pokud  $x$  není skalárním násobkem  $a$ , tj.  $x \neq \xi \cdot a$  pro číslo  $\xi \in \mathbb{R}$ , pak lze vhodnou perturbací  $x$  snížit hodnotu  $R$ .

4. Využij toho, že  $f(t) = t^2$  je bijekce na  $\langle 0, 1 \rangle$ . To nicméně na  $\langle -1, 1 \rangle$  neplatí a mělo by být vidět, že na  $\langle -1, 1 \rangle$  půjde takto aproximovat  $f$  polynomem se sudými exponenty pouze tehdy, když  $f$  bude sudá, tj.  $f(x) = f(-x)$  pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ . V tomto případě tedy záleží na tom, jaký uzavřený interval prostoru  $C(\langle a, b \rangle)$  uvažujeme.

## Řešení cvičení

1. Zvolme libovolný prvek  $a_0$  z  $A$ . Předpokládejme, že nejde o maximum, pak musí existovat nějaký větší prvek  $a_1 \in A$ . Pokud stále nejde o maximum, musí existovat ještě větší prvek  $a_2 \in A$ . Protože má  $A$  jen konečně mnoho prvků, časem se nám některý prvek zopakuje. Tím pádem je ale tento prvek větší než on sám, což je spor.

2. Jednička je zřejmě horní mezí  $A$ . Nechť  $x < 1$ . Pak je  $1 - x > 0$ , takže lze nalézt  $n$  přirozené splňující  $n > 1/(1 - x)$ . Pak ale  $1 - x > 1/n$ , neboli  $x < 1 - 1/n \in A$ , tedy  $x$  není horní mezí  $A$ . Protože je 1 nejnižší horní mezí, jedná se o supremum  $A$ .

3. Lze to, jen musíme volit body  $x_n$  trochu opatrněji. Konkrétně každý bod  $x_n$  chceme stále  $\frac{1}{n}$ -blízko k supremu, ale navíc chceme, aby byl k supremu blíže než předchozí bod  $x_{n-1}$ .

Nejdříve se podíváme na  $\sup A - 1$ , a protože to už není horní mezí  $A$ , nalezneme  $x_1 \in A$  splňující  $x_1 > \sup A - 1$ . Následně označíme  $r_1 = \min\{1/2, \sup A - x_1\} > 0$ , podíváme se na  $\sup A - r_1$  a nalezneme  $x_2 \in A$  splňující  $x_2 > \sup A - r_1$ . Obecně pokud máme bod  $x_n > \sup A - r_{n-1}$  z  $A$  a  $r_n = \min\{1/(n+1), \sup A - x_n\}$ , tak v  $A$  nalezneme  $x_{n+1} > \sup A - r_n$  a položíme  $r_{n+1} = \min\{1/(n+2), \sup A - x_{n+1}\}$ .

Tímto způsobem máme posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  bodů z  $A$ , které jednak splňují

$$\sup A \geq x_n > \sup A - r_{n-1} \geq \sup A - 1/n,$$

takže konvergují k  $\sup A$ , a jednak splňují

$$x_n > \sup A - r_{n-1} \geq \sup A - (\sup A - x_{n-1}) = x_{n-1},$$

takže tvoří rostoucí posloupnost.

4. Označme  $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Nechť nejdříve existuje supremum  $A$ . Nechť je  $\varepsilon > 0$  libovolné. Z definice suprema již  $\sup A - \varepsilon$  není horní mezí  $A$ , takže lze nalézt  $n_0$  takové, že  $x_{n_0} > \sup A - \varepsilon$ . Protože je  $(x_n)_{n=1}^\infty$  neklesající, platí pro  $n \geq n_0$ , že  $x_n > \sup A - \varepsilon$ . Zároveň díky tomu, že  $\sup A$  je horní mezí  $A$ , platí  $\sup A \geq x_n$ . Celkem tak pro  $n \geq n_0$  je  $|\sup A - x_n| < \varepsilon$ , takže  $(x_n)_{n=1}^\infty$  má limitu  $\sup A$ .

Nechť naopak existuje  $\lim x_n = s$ . Kdyby existovalo  $n_0$  takové, že  $x_{n_0} > s$ , pak by již pro všechny  $n \geq n_0$  bylo  $x_n \geq x_{n_0} > s$ , takže  $|x_n - s| \geq x_{n_0} - s > 0$ , body posloupnosti by se k  $s$  nepřibližovaly blíže jak  $\varepsilon = x_{n_0} - s$  a  $s$  by nemohlo být limitou  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Tedy musí být  $x_n \leq s$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , tj. limita  $s$  je horní mezí množiny  $A$ . Nechť je dále  $s' < s$ . Píšme  $s' = s - \varepsilon$  pro  $\varepsilon = s - s'$  kladné. Protože  $\lim x_n = s$ , nalezneme  $n_0$  takové, že  $|x_{n_0} - s| < \varepsilon$ . Pak ale je  $x_{n_0} > s - \varepsilon = s'$ , takže  $s'$  není horní mezí  $A$ . Tím jsme dokázali, že  $s$  je supremem  $A$ , tj.  $\sup A = s = \lim x_n$ .

6. Označme  $c = \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x)$ , které podle předpokladu existuje. Pak  $c$  je horní mezí funkce  $f + g$  na  $A$ : Pro libovolné  $a \in A$  je  $f(a) \leq \sup_{x \in A} f(x)$  a  $g(a) \leq \sup_{x \in A} g(x)$ , takže

$$f(a) + g(a) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x) = c.$$

Tím pádem je množina  $\{f(x) + g(x) \mid x \in A\}$  shora omezená hodnotou  $c$ , a jakožto podmnožina  $\mathbb{R}$  má proto supremum, tedy  $\sup_{x \in A} (f(x) + g(x))$  existuje. Navíc  $c$  je horní mezí  $\{f(x) + g(x) \mid x \in A\}$ , takže

$$\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq c = \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x),$$

neboť supremum je nejmenší horní mez.

7. V případě (1) lze volit třeba již diskutovanou funkci  $f(x) = x$  na  $M = \mathbb{R}$ . Tato funkce je spojitá na  $\mathbb{R}$ , ale nenabývá svého maxima, dokonce ani  $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$  neexistuje. V případě (2) buď třeba  $M = \langle 0, 1 \rangle$  a  $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná jako  $f(x) = x$  pro  $x \neq 1$  a  $f(1) = 0$ . Taková funkce má supremum 1, ale této hodnoty nenabývá, neboť  $f$  není spojitá zrovna v tom podstatném bodě 1.

8. Pro  $x > 1$  je  $f(x) = x + 1/x > x > 1$ , takže opravdu funkční hodnoty  $f$  leží v  $(1, \infty)$ . Pro  $x, y \in (1, \infty)$  platí

$$|f(x) - f(y)| = \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = \left| x - y + \frac{y - x}{xy} \right| = |x - y| \frac{xy - 1}{xy} < |x - y|,$$

neboť pro  $x, y > 1$  je  $xy > 1$ , takže  $|xy - 1| = xy - 1 > 0$ .

Na druhou stranu  $f$  není kontrakcí, což se intuitivně děje proto, že ve výpočtu  $|f(x) - f(y)| = |x - y| \frac{xy - 1}{xy}$  může být hodnota  $\frac{xy - 1}{xy}$  pro velká  $x$  a  $y$  libovolně blízko 1. Spočítejme to: Nechť  $\lambda \in (0, 1)$  a zkusme najít  $z > 1$  takové, že  $(z - 1)/z > \lambda$ . To odpovídá nerovnici  $z - 1 > \lambda z$ , neboli  $z > 1/(1 - \lambda)$ . Zvolme nyní různá  $x, y$ , která převyšují 1 a jejichž součin splňuje  $xy > 1/(1 - \lambda)$  – pro dost velká  $x$  a  $y$  toho vždy půjde dosáhnout,  $\lambda \neq 1$ . Pak z předchozích výpočtů platí

$$\frac{xy - 1}{xy} > \lambda,$$

ale zároveň

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \frac{xy - 1}{xy} > \lambda |x - y|,$$

takže  $\lambda$  nemůže být koeficientem kontrakce. Tím jsme vyřadili všechny možné koeficienty  $\lambda \in (0, 1)$ , a tudíž  $f$  nemůže být kontrakcí.

9. Vezmeme třeba otevřenou kouli  $U_1(0)$  a bod o souřadnicích  $a = (2, 0, 0, \dots, 0)$ . Pak vzdálenost  $a$  od  $U_1(0)$  je 1, neboť se dá  $k$  a přibližovat pomocí bodů  $x_n = (1 - 1/n, 0, 0, \dots, 0) \in U_1(0)$ , platí  $\rho(a, x_n) = 1 + 1/n$ . Přitom ale v  $U_1(0)$  neexistuje bod, který by měl od  $a$  vzdálenost přesně 1.

10. V eukleidovské metrice existuje pouze jeden nejbližší bod ke kouli, je to bod  $a/|a|$ , kde  $|a|$  značí velikost bodu  $a$ , neboli jeho vzdálenost od 0. Je to vidět z geometrického náhledu. Stejně tak je vidět, že v maximové metrice nejbližší bod nemusí být určen jednoznačně – například bod  $a = (2, 0)$  má za nejbližší body v  $B_1(0)$  všechny body tvaru  $p = (1, t)$ ,  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ .

11. Jakožto spojitá funkce nabývá  $f$  kladného minima  $m$  na kompaktním intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Neboli  $f(x) \geq m > 0$ , a invertováním každé strany máme  $\frac{1}{f}(x) \leq \frac{1}{m}$  pro libovolné  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ . Zároveň  $\frac{1}{f}$  je omezená zdola hodnotou 0, protože  $f$  je kladná.

13. Pro funkce  $f, g \in \mathcal{C}(K)$  je  $\rho_\infty(f, g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|$  nezáporné. Přitom  $\rho_\infty(f, g) = 0$  právě tehdy, když v každém  $x \in K$  platí  $|f(x) - g(x)| = 0$ , což platí tehdy, když v každém  $x$  je  $f(x) = g(x)$ , což nastane pro  $f = g$ . Zřejmě je také  $\rho_\infty$  symetrická, neboť  $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ .

Zbývá ukázat trojúhelníkovou nerovnost. Pro  $f, g, h \in \mathcal{C}(K)$  platí

$$\begin{aligned} \rho_\infty(f, h) &= \max_{x \in K} |f(x) - h(x)| \leq \max_{x \in K} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \\ &\leq \max_{x \in K} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in K} |g(x) - h(x)| = \rho_\infty(f, g) + \rho_\infty(g, h). \end{aligned}$$

Přitom první nerovnost plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu a z toho, že pokud zvětšíme každý prvek množiny, tak zvětšíme i maximum (v tomto případě z  $F(x) \leq G(x)$  pro dvě funkce vypočítáme  $\max F \leq \max G$ ). Druhá nerovnost pak plyne z analogie cvičení 6 pro maxima, případně zde lze přímo využít, že maxima se rovnají supremům, a přímo se odvolat na cvičení 6.

14. Protože je  $\{1, 2\}$  konečná množina, je kompaktní. Prvky prostoru  $\mathcal{C}(K)$  jsou v tomto případě spojitě funkce  $f : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Požadavek na spojitost vzhledem k diskrétnímu prostoru ale není vůbec omezující, protože každá funkce  $f : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  je automaticky spojitá – stačí k libovolnému  $\varepsilon$  volit  $\delta = 1/2$ , aby platilo  $U_\delta(x) = \{x\}$  a kuličky byly nezajímavé.

Funkce  $f : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  je jednoznačně určena svými hodnotami na číslech 1 a 2, takže je lze chápat jako dvojici  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , kde  $x_1$  odpovídá  $f(1)$  a  $x_2$  odpovídá  $f(2)$ . Nakonec vzdálenost dvou funkcí  $f, g : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  je definována jako

$$\rho_\infty(f, g) = \max_{n \in \{1, 2\}} |f(n) - g(n)| = \max \{|f(1) - g(1)|, |f(2) - g(2)|\},$$

což je totožné s maximovou vzdáleností bodů  $(f(1), f(2))$  a  $(g(1), g(2))$  v rovině  $\mathbb{R}^2$ .

**15.** Např. pracujme na  $\langle -1, 1 \rangle$  a zvolme  $f(x) = 0$  pro  $x \in \langle -1, 0 \rangle$  a  $f(x) = 1$  pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ . Pro spor předpokládejme, že umíme najít polynom  $P$  takový, že  $\rho_\infty(f, P) < 1/4$ . Speciálně musí  $|1 - P(0)| = |f(0) - P(0)| < 1/4$ , takže  $P(0) \in (3/4, 5/4)$ . Ze spojitosti  $P$  existuje  $\delta > 0$  takové, že na kuličce  $U_\delta(0)$  se  $P$  od  $P(0)$  vzdálí nejvýše o  $1/4$ . Speciálně pro  $x \in (-\delta, 0)$  platí  $|P(x) - P(0)| < 1/4$ , takže  $P(x) \in (2/4, 6/4) = (1/2, 3/2)$  (např.  $P(0)$  musí být větší než  $3/4$ , takže  $P(x)$  musí být větší než  $1/2$ , aby bylo od  $P(0)$  vzdáleno méně než  $1/4$ ). Ale  $f(x) = 0$ , neboť  $x$  je záporné, takže  $|f(x) - P(x)| > 1/2$ , a tedy  $\rho_\infty(f, P) > 1/2$ , což je spor s předpokladem  $\rho_\infty(f, P) < 1/4$ .