

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 11. KVĚTNA 2026

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

ÚLOHA 1.

- (a) Nechtě a , b , c jsou kladná celá čísla. Ukažte, že alespoň jedno z čísel $a^2 + b + c$, $a + b^2 + c$, $a + b + c^2$ není druhou mocninou kladného celého čísla. (2 BODY)
- (b) Mějme pravidelnou trojúhelníkovou mřížku tvořenou rovnostrannými trojúhelníky. Z trojúhelníků je složen souvislý obrazec¹ bez děr s obvodem 2026. Dokažte, že v obrazci je nějaký vnitřní úhel roven 120° nebo 240° . (3 BODY)

ÚLOHA 2.

- (a) Pro kladné celé pěticiferné číslo n označme $\sigma(n)$ čtyřciferné číslo, které vznikne odstraněním prostřední cifry z ciferového zápisu n v desítkové soustavě. Nalezněte všechna n taková, že $\sigma(n) \mid n$. (2 BODY)
- (b) Lucka řešila domácí úkol. Měla zadané dvě soustředné kružnice se středem A . Na kružnici s menším poloměrem Lucka vyznačila bod B , na druhé bod vyznačila C . Pak ještě do obrázku dorysovala dvě další kružnice se shodnými poloměry, první z nich se dotýkala úsečky AB v bodě B a druhá se dotýkala úsečky AC v bodě C . Tyto kružnice se navíc dotýkaly v bodě K . Určete množinu všech možných bodů K , které takto mohla Lucka získat. (3 BODY)

ÚLOHA 3.

- (a) Máme čtvercový papír o straně délky 1. Dokažte, že pouze pomocí jeho přehýbání na něm lze naměřit vzdálenost $\frac{1}{3}$. (2 BODY)
- (b) Káťa si hrála s kružnicí, na níž umisťovala oranžové a fialové body. Na začátku na ni umístila dva oranžové. V každém dalším kroku mohla udělat jedno z následujících
- (a) Přidat oranžový bod a změnit barvu obou sousedních;
 - (b) Někjaký oranžový bod odstranit a tím opět změnit barvu jeho sousedů. Toto může udělat, jen pokud se na kružnici nachází alespoň tři body.

Rozhodněte, zda může Káťa po konečném počtu kroků mít na kružnici právě dva fialové body a žádné oranžové. (3 BODY)

ÚLOHA 4.

- (a) Máme krabičky očíslované číslly $1, 2, \dots, 2n$ a čísla $1, 2, \dots, 2n$. Do každé krabičky vložíme jedno číslo a spočítáme součet krabičky a čísla v něm. Ukažte, že mezi těmito součty se alespoň jeden zbytek po dělení $2n$ zopakuje. (2 BODY)
- (b) Je dána neprázdná podmnožina A množiny $\{2, 3, \dots, 28\}$ taková, že když $a \in A$, tak zbytek po dělení čísla a^2 číslem 29 opět leží v množině A . Najděte nejmenší možnou hodnotu $|A|$. (3 BODY)

¹Trojúhelníky v obrazci spolu sousedí stranami.

ÚLOHA 5.

(a) Pizza je rozdělena na klasických 2026 dílků, které jsou očíslovány čísly $0, 1, \dots, 1012$. Každé číslo je právě na dvou dílcích. Pizzu označíme jako *dobrou*, pokud pro každé $i \in \{0, 1, \dots, 1012\}$ je mezi dílky s číslem i právě i jiných dílků. Může tato pizza být dobrá? (2 BODY)

(b) Po obvodu kulatého stolu je prostřeno $k \geq 3$ talířů a na každém je nějaký počet brambor. José chodí okolo stolu a čas od času aktivuje nějaký talíř (jsou-li na něm alespoň dvě brambory), což způsobí, že se z něj přesune jedna brambora o talíř doleva a jedna brambora o talíř doprava. Po několika aktivacích se stalo, že bylo na každém talíři stejně brambor jako na začátku. Dokažte, že počet aktivací byl násobek k . (3 BODY)

ÚLOHA 6.

(a) Na stole leží několik stříbrných mincí spolu se zlatým a stříbrným seznamem (oba jsou na začátku prázdné). Orgové chodí postupně ke stolu a každý buď přidá na stůl zlatou minci a připiše na stříbrný seznam počet stříbrných mincí na stole, nebo odebere jednu stříbrnou minci a připiše na zlatý seznam počet zlatých mincí na stole. Po vystřídání všech orgů nezbyla na stole žádná stříbrná mince. Dokažte, že součet čísel na zlatém seznamu je stejný jako součet čísel na stříbrném seznamu. (2 BODY)

(b) Markét má v řadě za sebou položeno 2345 mincí, přičemž pouze n -tá mince je otočena rubem vzhůru, kdežto ostatní jsou otočeny rubem dolů. Jeden Markétin tah spočívá v tom, že zvolí nějakou minci, která je rubem vzhůru, a otočí její bezprostřední sousedy (či souseda, jde-li o krajní minci). Určete všechna n taková, že Markét může po konečném počtu tahů docílit stavu, kdy budou všechny mince otočeny rubem vzhůru. (3 BODY)

ÚLOHA 7.

(a) Pro posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že a_{n+1} je rovno součtu druhých mocnin cifer čísla a_n . Dokažte, že pro všechna a_1 existují k a N takové, že pro $n \geq N$ je $a_n = a_{n+k}$. (2 BODY)

(b) Nechtě a, b, c, d jsou kladná reálná čísla splňující $a + b + c + d = 4$. Dokažte, že pak platí

$$ab + bc + cd + da \geq ab^2c + bc^2d + cd^2a + da^2b.$$

(3 BODY)

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(a) Necht' a, b, c jsou kladná celá čísla. Ukažte, že alespoň jedno z čísel $a^2 + b + c$, $a + b^2 + c$, $a + b + c^2$ není druhou mocninu kladného celého čísla.

(b) Mějme pravidelnou trojúhelníkovou mřížku tvořenou rovnostrannými trojúhelníky. Z trojúhelníků je složen souvislý obrazec¹ bez děr s obvodem 2026. Dokažte, že v obrazci je nějaký vnitřní úhel roven 120° nebo 240° .

ŘEŠENÍ:

(a) Jelikož je tvrzení, které dokazujeme, symetrické v proměnných a, b, c (záměna libovolných dvou proměnných znění tvrzení nezmění), tak můžeme BÚNO předpokládat, že $a \geq b \geq c$. Potom platí:

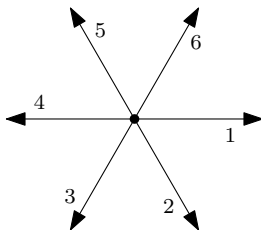
$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 > a^2 + 2a \geq a^2 + b + c > a^2,$$

tedy $a^2 + b + c$ je ostře mezi po sobě jdoucími druhými mocninami, tedy nemůže být sama druhou mocninou.

(b) Pro spor předpokládejme, že obrazec nemá úhly 120° nebo 240° . Ukážeme, že jeho obvod je dělitelný třemi, což bude spor.

Vybereme si libovolný vrchol obrazce² a označíme ho O . Budeme uvažovat uzavřenou lomenou čáru složenou z jednotkových (orientovaných) úseček vedoucí z bodu O do bodu O po hranici obrazce, orientovanou po směru hodinových ručiček (tím myslíme, že vnitřek bude napravo a vnějšek nalevo).

Směry v trojúhelníkové mřížce očíslovujeme jako na obrázku:



BÚNO začíná lomená čára jednotkovou orientovanou úsečkou ve směru 1 (v jiných případech můžeme celý obrazec otočit kolem bodu O a dostaneme se na tentýž stav).

¹Trojúhelníky v obrazci spolu sousedí stranami.

²Ve skutečnosti můžeme vybrat libovolný bod mřížky na hranici obrazce a důkaz projde úplně stejně.

Všimneme si, že potom se lomená čára může skládat jen z orientovaných úseček, které vedou ve směru 1, 3 nebo 5. To platí, protože po orientované úsečce ve směru 1 může následovat pouze orientovaná úsečka ve směru 1, 3 a 5, jelikož jediné povolené vnitřní úhly jsou 60° , 180° a 300° . Analogický rozbor se provede pro směr 3 a 5.

Nyní ukážeme, že jednotkových orientovaných úseček daného směru 1, 3 nebo 5 musí být v lomené čáře stejný počet. To lze dokázat například tak, že budeme uvažovat klasickou pravouhlou souřadnicovou soustavu tak, aby vektor, který odpovídá jednotkové úsečce ve směru 1 měl souřadnice $(1, 0)$, pro směr 3 souřadnice $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ a pro směr 5 souřadnice $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Jelikož je křivka uzavřená, tak součet všech vektorů, které odpovídají úsečkám v lomené čáře, musí být nula. To platí, protože přesně lomená čára z orientovaných úseček se používá v geometrické představě sčítání vektorů, kde výsledný vektor je vektor vedoucí z počátku do konce lomené čáry, což je v našem případě nulový vektor. Když si a, b, c označíme počty orientovaných úseček v lomené čáře postupně ve směrech 1, 3 a 5, tak z předchozí úvahy dostaneme soustavu dvou lineárních rovnic o třech neznámých

$$a(1, 0) + b\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (0, 0).$$

Tu můžeme jinak zapsat takto:

$$\begin{aligned} a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c &= 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}c &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení právě $a = k$, $b = k$, $c = k$ pro libovolné k , tedy skutečně $a = b = c$.

Nyní již vidíme, že obvod obrazce, který je rovný $a + b + c$, musí být dělitelný třemi, čímž jsme dostali spor, protože 3 nedělí 2026.

POZNÁMKY:

Všechna došlá řešení úlohy (a) byla správně. V úloze (b) postupovala všechna správná řešení stejně jako to vzorové. Některá z nich ale moc podrobně nezduvodňovala, proč jednotkových orientovaných úseček daného směru 1, 3 nebo 5 musí být v lomené čáře stejně, za což jsem ale nakonec body nestrhával.

(Ivan Žemlička)

Úloha 2.

(a) Pro kladné celé pěticiferné číslo n označme $\sigma(n)$ čtyřciferné číslo, které vznikne odstraněním prostřední cifry z ciferého zápisu n v desítkové soustavě. Nalezněte všechna n taková, že $\sigma(n) \mid n$.

(b) Lucka řešila domácí úkol. Měla zadané dvě soustředné kružnice se středem A . Na kružnici s menším poloměrem Lucka vyznačila bod B , na druhé bod vyznačila C . Pak ještě do obrázku dorýsovala dvě další kružnice se shodnými poloměry, první z nich se dotýkala úsečky AB v bodě B a druhá se dotýkala úsečky AC v bodě C . Tyto kružnice se navíc dotýkaly v bodě K . Určete množinu všech možných bodů K , které takto mohla Lucka získat.

ŘEŠENÍ:

(a) Ze zadání víme, že n je přirozené pětimístné číslo, můžeme si ho proto pomocí výčtu cifer zapsat jako $n = \overline{abcde}$, z toho pak $\sigma(n) = \overline{abde}$. Hledáme taková n , kde $\sigma(n) \mid n$, ekvivalentně $\overline{abde} \mid \overline{abcde}$.

Zkoumanou nerovnost rozepíšeme pomocí mocnin desítky

$$\sigma(n) \mid n \implies \overline{abde} \mid \overline{abcde} \implies (10^3a + 10^2b + 10d + e) \mid (10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e),$$

a upravíme

$$\begin{aligned} (10^3a + 10^2b + 10d + e) \mid (10 \cdot (10^3a + 10^2b + 10d + e) + 10^2c - 90d - 9e), \\ (10^3a + 10^2b + 10d + e) \mid (100c - 90d - 9e). \end{aligned}$$

Začneme zavedením značení. Označme poloměry menší a větší soustředné kružnice se středem v A jako r, R . Dále máme kružnice, které se dotýkají úseček AB, AC v bodech B, C . Označme tyto kružnice jako k_b, k_c a jejich středy jako S_b, S_c . Kružnice k_b, k_c mají dle zadání shodný poloměr, označme ho jako x . Dle zadání se tyto dvě kružnice dotýkají v bodě K .

Podívejme se na trojúhelník ABS_b . Aby se kružnice k_b dotýkala úsečky AB v bodě B , musí být úsečka S_bB kolmá na AB . Tedy trojúhelník ABS_b je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B . Použijme pro tento trojúhelník Pythagorovu větu. Dostáváme

$$|AS_b| = \sqrt{|AB|^2 + |BS_b|^2} = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

Podobně když se podíváme na pravoúhlý trojúhelník ACS_c , dostaneme vztah $|AS_c| = \sqrt{R^2 + x^2}$.

Podívejme se nyní na trojúhelník AS_bS_c . Z dotyku kružnic k_b, k_c víme, že body S_b, K, S_c leží na jedné přímce. Navíc $|S_bK| = |KS_c|$, tedy K je středem úsečky S_bS_c a tedy také AK těžnicí trojúhelníku AS_bS_c . Pokusme se délku této těžnice vyjádřit.

Z kosinové věty plyne vzorec pro výpočet délky těžnice v trojúhelníku. Konkrétně pro trojúhelník s délkou stran a, b, c platí, že délka těžnice na stranu a je rovna $t_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$, tento vztah si dokažme.

Uvažujme trojúhelník ABC se standardním značením stran a středů stran. Označme úhel $\sphericalangle AS_aB$ jako φ , pak $\sphericalangle AS_aC = 180^\circ - \varphi$. Nyní aplikujeme kosinovou větu $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$ na dva menší trojúhelníky. V trojúhelníku ABS_a pro stranu c

$$c^2 = t_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot t_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \varphi,$$

$$c^2 = t_a^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot t_a \cdot \cos \varphi$$

a v trojúhelníku ACS_a pro stranu b

$$b^2 = t_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot t_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(180^\circ - \varphi),$$

$$b^2 = t_a^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot t_a \cdot \cos(180^\circ - \varphi).$$

Z vlastností funkce kosinus platí $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$, z čehož dostáváme:

$$b^2 = t_a^2 + \frac{a^2}{4} + a \cdot t_a \cdot \cos \varphi.$$

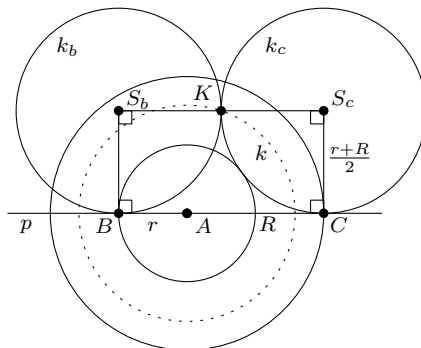
Nyní rovnice pro c^2 a b^2 sečteme. Členy s kosinem se vzájemně odečtou a dostaneme $b^2 + c^2 = 2t_a^2 + \frac{a^2}{2}$. Z této rovnice již snadno vyjádříme $t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$. Odmocněním dostáváme výsledný vzorec pro délku těžnice $t_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$.

Právě tento vztah použijme na výpočet těžnice AK z trojúhelníku AS_bS_c . Dostáváme

$$|AK| = \sqrt{\frac{2(r^2 + x^2) + 2(R^2 + x^2) - (2x)^2}{4}} = \sqrt{\frac{2r^2 + 2R^2}{4}} = \sqrt{\frac{r^2 + R^2}{2}}.$$

Jak vidíme, délka těžnice AK je v obecném případě rovna $\sqrt{\frac{r^2 + R^2}{2}}$. To vlastně znamená, že bod K musí být ve vzdálenosti $\sqrt{\frac{r^2 + R^2}{2}}$ od středu A , tedy na kružnici se středem v A o tomto poloměru. Označme tuto kružnici jako k . Vidíme, že nutně $K \in k$.

Teď se ale musíme zeptat, můžeme takto získat jakýkoliv bod kružnice k ? Odpověď je, že ano. Ukažme to tak, že si vybereme libovolný bod kružnice k a ukážeme, že pro něj existují body B, C takové, že výsledná konfigurace odpovídá zadání (vlastně jdeme tak trošku pozpátku).



Začneme tím, že ukážeme, že existuje alespoň jeden bod K , kterého takto můžeme dosáhnout. Mějme tedy střed A a soustředné kružnice s tímto středem a poloměry r, R . Proložme středem A vodorovnou přímkou, která protne kružnici s menším poloměrem „nalevo“ od středu A v bodě B a kružnici s větším poloměrem „napravo“ v bodě C . Body B, A, C jsou tedy v tomto pořadí na jedné přímce (označme ji p , přičemž vzdálenost mezi body B, C je rovna $r + R$). Dále sestrojme shodné kružnice k_b, k_c a to tak, aby se tyto kružnice dotýkaly a zároveň aby se dotýkaly přímky p . Za tímto účelem bude poloměr těchto kružnic roven $\frac{r+R}{2}$ a jejich středy S_b, S_c budou v této vzdálenosti postupně kolmo nad body B, C . Budou takovéto kružnice mít bod dotyku? Vzdálenost jejich středů je stejná jako vzdálenost jejich pat kolmic na přímce p , a tak $|BC| = r + R = |S_b S_c|$. Zároveň součet jejich poloměrů se rovná přesně tomu stejnému výrazu, aneb

$$|BS_b| + |CS_c| = \frac{r+R}{2} + \frac{r+R}{2} = r + R = |S_b S_c|,$$

tyto kružnice se tedy jistě dotýkají, označme tento bod dotyku jako K . Tento bod splňuje všechny vlastnosti bodu K z první části důkazu, tedy jistě leží na zmíněné kružnici k .

Vezměme si nyní nějaký klidně odlišný bod K' na kružnici k a ukažme, že pomocí právě popsané konstrukce umíme najít i takovou konstrukci, kde je bodem dotyku právě bod K' . Intuitivně vlastně stačí, když naši konstrukci tak trochu „pootočíme“. Doplňme si do obrázku spojnice AK, AK' a konvexní úhel, který odpovídající přímky svírají, označme jako α . Označme B' bod menší kružnice takový, že úhel $BAB' = \alpha$ a C' bod větší kružnice takový, že úhel $CAC' = \alpha$ a zároveň body A, B', C' leží na jedné přímce (v podstatě otáčíme úsečku BC kolem vrcholu A o úhel α .) Rozložení bodů B, A, C, K je shodné (akorát pootočené) rozložení bodů B', A, C', K' , tedy K' bude dotykem kružnic nad B', C' . Ukázali jsme, že z původní konstrukce umíme vyrobit kružnice k_b, k_c pro libovolný bod kružnice k , tedy skutečně kterýkoliv bod této kružnice je možné získat.

Ukázali jsme, že každý popsaný bod dotyku nutně musí ležet na kružnici k . Poté jsme ukázali, že pro každý z bodů této kružnice existují body B, C , které zajistí, aby daný bod byl právě dotykem kružnic nad nimi. Dostáváme tedy kýžený závěr, že množinou bodů, které se takto dají získat, je právě kružnice k se středem v A a poloměrem $\sqrt{\frac{r^2+R^2}{2}}$.

POZNÁMKY:

K úloze (a) většina řešitelů postupovala dle vzorového řešení, ale objevily se i nějaké originálnější, i když o něco pracnější postupy. Všechny ale využívaly stejného zápisu čísla pomocí cifer a mocnin desítek, a následného dokazování, že poslední tři cifry musí být nulové. K úloze (b) nám přišlo jen několik řešení. Ta, která byla správně, postupovala stejně jako ve vzoráku, přičemž někteří řešitelé zapomněli ukázat, že každého bodu na kružnici je možné dosáhnout (druhou stranu inkluze).

(Lenka Poljaková)

Úloha 3.

(a) Máme čtvercový papír o straně délky 1. Dokažte, že pouze pomocí jeho přehýbání na něm lze naměřit vzdálenost $\frac{1}{3}$.

(b) Káťa si hrála s kružnicí, na ní umisťovala oranžové a fialové body. Na začátku na ni umístila dva oranžové. V každém dalším kroku mohla udělat jedno z následujících

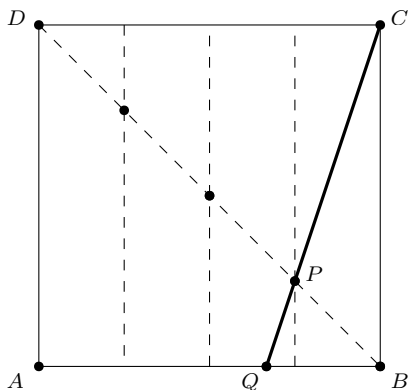
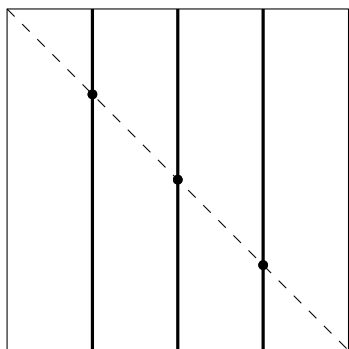
- (a) Přidat oranžový bod a změnit barvu obou sousedních;
- (b) Nějaký oranžový bod odstranit a tím opět změnit barvu jeho sousedů. Toto může udělat, jen pokud se na kružnici nachází alespoň tři body.

Rozhodněte, zda může Káťa po konečném počtu kroků mít na kružnici právě dva fialové body a žádné oranžové.

ŘEŠENÍ:

(a) Přeložme papír po diagonále a rozložme. Dále jej poskládáme svisle na čtvrtiny a opět rozložme. Nyní vedme sklad jedním rohem čtverce a bodem ve $\frac{3}{4}$ diagonály (vizte obrázek). Tento sklad vytne na protější straně délku $\frac{1}{3}$, protože vzniklé trojúhelníky (na obrázku $\triangle PBQ$ a $\triangle PDC$) jsou si podobné s koeficientem podobnosti 3 (podle věty uu – sdílí vrcholový úhel, příslušné úhly diagonála-strana jsou 45° , poměr je daný rozdělením diagonály).

Kromě řešení úlohy, tak stejně lze konstruovat zlomky tvaru $\frac{2^n - k}{k}$ (rozdělením diagonály na 2^n kusů a volbou P jako k -tého bodu na ní). Lze rozmyslet i konstrukci všech zlomků z intervalu $(0, 1)$ pomocí rovnoběžek vedených body na diagonále a jiné volby podobných trojúhelníků.



(b) Prvně si nastíníme, jakými myšlenkami půjde řešení a poté si ukážeme, že všechny kroky fungují tak, jak bychom chtěli. Vše se bude točit kolem interpretace jednotlivých bodů pomocí skládání zobrazení v rovině. Oranžové body interpretujeme jako otočení o 120 stupňů po směru hodinových ručiček (budeme značit jako zobrazení r) a fialové body jako překlopení podél osy y (zobrazení budeme značit y).

Poté každé konfiguraci bodů přiřadíme zobrazení, které odpovídá složení všech zobrazení určených body po sobě, když procházíme kružnicí po směru hodinových ručiček. To sice bude záviset na tom, kde začneme, ale ukážeme, že pro každý začátek dostaneme pouze nějakou třídu zobrazení. Na závěr ukážeme, že přidání/odebrání bodu toto zobrazení nezmění, a tedy mezi jednotlivými třídami zobrazení nedokážeme přecházet, takže odpověď na otázku ze zadání je negativní.

Pro jednoduchost budeme používat zkrácené značení pro skládání zobrazení. Často se používá značení $f(g)$, nebo $f \circ g$, použijeme zkrácenou verzi, kde budeme psát jen fg (skládání zobrazení se píše v neintuitivním pořadí první vpravo). V počátečním stavu s dvěma oranžovými body získáme rr zatímco s dvěma fialovými získáme $yy = \text{id}$.

První vyřešíme, co se stane, když změníme počáteční bod. Představme si, že první akce, kterou vykonáme je α a zbytek se složí na A , takže dohromady máme αA . Pokud bychom začali o jeden bod dále, získáme αA . Můžeme si všimnout, že zobrazení αA je stejné jako bychom vykonali α^{-1} , poté αA a na závěr α , písmenkami $\alpha A = \alpha(\alpha A)\alpha^{-1}$. Dále uvidíme, že zobrazení, která spolu mají takovýto vztah tvoří jisté skupiny. Odborně se zobrazením v tomto vztahu říká, konjugovaná zobrazení a skupinám se říká konjugací třídy.

Rozmyslíme si, že identita splňuje $\alpha^{-1}\text{id}\alpha = \text{id}$, takže ta se zachová ať začneme kdekoliv. Pokud toto uděláme s rotací o nenulový úhel x , tak pokud α je rotace r , dostaneme původní rotaci $r\alpha r^{-1} = x$ a pokud α je překlopení p podél nějaké osy, získáme rotaci o stejný úhel v opačném směru, tedy $p\alpha p^{-1} = x^{-1}$. Dále pokud máme překlopení podél nějaké osy, tak analogicky získáme překlopení kolem nějaké osy. Změna počátečního bodu tedy zachovává tři skupiny zobrazení: překlopení, identitu a rotaci o nenulový úhel.

Další krok je ověřit, jak přidání/odebrání bodu změní skupinu celkového složeného zobrazení. Budeme řešit pouze přidání bodu, protože odebrání je stejné jako stav před přidáním. Ukážeme, že změněný úsek se složí na stejné zobrazení jako původní úsek, takže celkové zobrazení před/po změně je ve stejné skupině. Nechť α' značí zobrazení odpovídající bodu s opačnou barvou než odpovídá α (tedy z $r' = y$ a $y' = r$), pak chceme ukázat, že pokud máme za sebou dva body se zobrazeními α a β , tak platí $\alpha\beta = \alpha'r\beta'$.

To dokážeme aplikováním zleva α^{-1} a zprava β^{-1} , takže chceme ukázat $(\alpha^{-1}\alpha')r(\beta'\beta^{-1}) = \text{id}$. Rozmyslíme si, jak vypadají levé a pravé členy. Pokud $\alpha = r$, dostaneme $r^2y = yr$ (z geometrického pohledu) přičemž, když $\alpha = y$, dostaneme přímo yr . Analogicky v pravé závorce vždy vyjde ry . Dohromady složíme na $(yr)r(ry) = y(rrr)y = yy = \text{id}$, což jsme chtěli.

Tím tedy máme hotovo, protože dva fialové se složí na identitu zatímco dva oranžové se složí na otočení o 240 stupňů, což jsou zobrazení v jiných třídách. Na závěr bych dodal, že jsme ukázali i třetí konfiguraci, na kterou se nelze dostat a to jeden fialový a jeden oranžový, které se složí na překlopení, což tvoří třetí třídu zobrazení. S trochou úvah o odebrání oranžových bodů se dá rozmyslet, že vždy se dá dostat do stavu, který obsahuje dva body a pokryli jsme všechny tři konfigurace.

POZNÁMKY:

U úlohy (a) někteří řešitelé postupovali podobně, jiní využívali hezkých vlastností těžnic.

Úloha (b) byla těžká, přišla pouze dvě správná řešení. Jedno řešení od Alexe Dacharyho, které inspirovalo vzorové, a druhé od Jakuba Hřibala, které si všímá jiného invariantu týkajícího se rozdělení bodů na úseky ohraničené fialovými body. V obou případech je invariant zvláštní tím, že nejde o nějaký konkrétní invariant, ale že jsou to nějaké skupiny, uvnitř kterých se může měnit. Tady jsou to rotace o nenulový úhel versus rotace o nulový. U druhého řešení jde o dělitelnost nějakého výrazu třemi, ale zbytek po dělení třemi se může měnit mezi 1 a 2, ale z nuly nemůže jít pryč.

(Bára Klusáková (a), Patrik Štencel (b))

Úloha 4.

(a) Máme krabičky očíslované čísly $1, 2, \dots, 2n$ a čísla $1, 2, \dots, 2n$. Do každé krabičky vložíme jedno číslo a spočítáme součet krabičky a čísla v něm. Ukažte, že mezi těmito součty se alespoň jeden zbytek po dělení $2n$ opakuje.

(b) Je dána neprázdná podmnožina A množiny $\{2, 3, \dots, 28\}$ taková, že když $a \in A$, tak zbytek po dělení čísla a^2 číslem 29 opět leží v množině A . Najděte nejmenší možnou hodnotu $|A|$.

ŘEŠENÍ:

(a) Součet všech součtů čísel a jejich krabiček označme S . Pro spor budeme předpokládat, že se mezi součty žádný zbytek po dělení $2n$ neopakuje a podíváme se na S modulo $2n$. Na jednu stranu při sčítání čísel a krabiček přičteme každé číslo dvakrát, proto

$$S = 2(1 + 2 + \dots + 2n) = 2 \cdot \frac{(2n+1)2n}{2} = 2n(2n+1) \equiv 0 \pmod{2n}.$$

Zároveň ale máme dle předpokladu různé zbytky modulo $2n$. Jelikož krabiček je $2n$, musí se každý zbytek vyskytovat v součtu právě jednou, tedy

$$S \equiv 0 + 1 + 2 + \dots + 2n - 1 = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) \equiv -n \equiv n \pmod{2n},$$

což je spor. Někjaký zbytek po dělení $2n$ se tak musí opakovat.

(b) Pro libovolný prvek $a \in A$ platí, že v A bude i a^2, a^4, a^8 atd., to vše modulo 29. Tato řada se někdy musí zacyklit. Kdyby A obsahovala nějaké prvky mimo tento cyklus, byly by tam navíc a jejich odstraněním by se zachovala požadovaná vlastnost, ale zmenšila velikost (prvky musíme odstranit všechny zároveň). Efektivně tedy hledáme minimální délku takového cyklu.

Při hledání nám pomůže fakt, že 29 je prvočíslo. Pokud víme, že dělí nějaký součin celých čísel, musí nutně potom dělit alespoň jednoho z činitelů. Když máme nějaký výraz kongruentní nule, můžeme postupovat jako v reálných číslech a vyšetřovat kongruenci s nulou „po závorkách“.

Začneme tedy od nejkratších cyklů. Co kdyby $|A| = 1$? Jediný prvek by musel splňovat $a^2 \equiv a$, ekvivalentně $a(a-1) \equiv 0$, což splňuje pouze 0 a 1, které nemáme na výběr.

Co $|A| = 2$? Muselo by platit $a^4 \equiv a$, ekvivalentně $a(a^3-1) \equiv 0$. Tuto kongruenci opět splňuje jenom 0 a 1, jak se můžeme přesvědčit buď vyzkoušením všech možností, nebo například následovně: Zabývejme se jen kongruencí $a^3 \equiv 1$, jelikož výsledek $a = 0$ nás nezajímá. Protože 29 je prvočíslo, z malé Fermatovy věty víme, že $a^{28} \equiv 1$. Za předpokladu $a^3 \equiv 1$ potom platí

$$a^{28} \equiv a^4 \cdot (a^3)^8 \equiv a^4 \equiv 1.$$

Pokud je ale a^3 i a^4 kongruentní s 1, musí vskutku platit $a = 1$.

Přichází na řadu $|A| = 3$. Cykly délky 3 už existují dva, jsou to

$$7 \longrightarrow 20 \longrightarrow 23 \longrightarrow 7,$$

$$16 \longrightarrow 24 \longrightarrow 25 \longrightarrow 16.$$

Nejmenší možná hodnota $|A|$ je tedy 3.

POZNÁMKY:

V druhé úloze spousta řešitelů tvrdila nějaké věci, na které nejspíš přišla vyzkoušením všech možností, ale nic takového tam nenapsala. Za tvrzení co jen tak spadla z nebe jsem strhávala body.

(Anna Trnková)

Úloha 5.

(a) Pizza je rozdělena na klasických 2026 dílků, které jsou očíslovány číslly $0, 1, \dots, 1012$. Každé číslo je právě na dvou dílcích. Pizzu označíme jako dobrou, pokud pro každé $i \in \{0, 1, \dots, 1012\}$ je mezi dílky s číslem i právě i jiných dílků. Může tato pizza být dobrá?

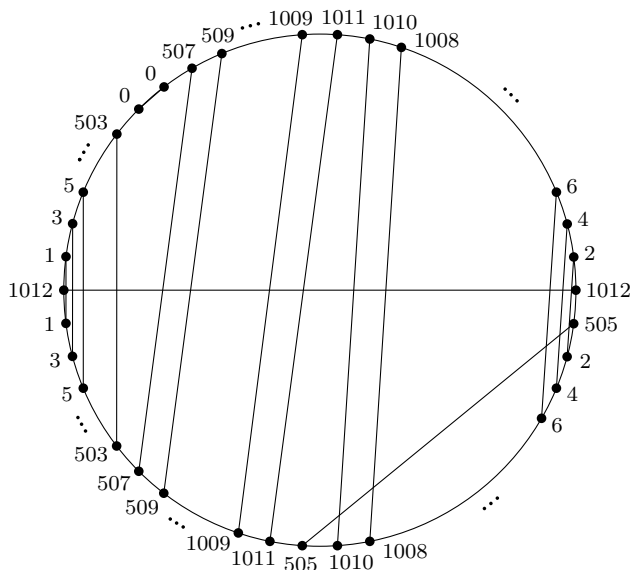
(b) Po obvodu kulatého stolu je prostřeno $k \geq 3$ talířů a na každém je nějaký počet brambor. José chodí okolo stolu a čas od času aktivuje nějaký talíř (jsou-li na něm alespoň dvě brambory), což způsobí, že se z něj přesune jedna brambora o talíř doleva a jedna brambora o talíř doprava. Po několika aktivacích se stalo, že bylo na každém talíři stejně brambor jako na začátku. Dokažte, že počet aktivací byl násobek k .

ŘEŠENÍ:

(a) Ano, pizza může být dobrá. Dále popíšeme konstrukci, pro kterou platí vlastnosti ze zadání a která je znázorněna na obrázku níže (body na kružnici označují dílky pizzy, dílky se stejným číslem jsou spojené úsečkou). Konstrukci získáme následovně (sledujte obrázek níže):

- (1) Dílky s číslem 1012 dáme na opačnou stranu pizzy. Dílky 1012 tedy dělí pizzu na dvě poloviny.
- (2) Pak budeme pokládat postupně dílky s čísly $1, 3, 5, \dots, 503$ tak, že dílky se stejným číslem nachází na opačné straně dílku s číslem 1012 (na obrázku v horní a dolní polovině).
- (3) Následně u jednoho dílku s číslem 503 položíme dva dílky s čísly 0
- (4) Pokládáme dál čísla $507, 509, \dots, 1011$ stejně jako v kroku 2
- (5) Na druhé půlce pizzy, než jsou dílky s číslem 0, položíme dílek s číslem 505 vedle dílku s číslem 1012.
- (6) Následně budeme pokládat čísla $2, 4, 6, \dots, 1010$ podobně jako lichá čísla v kroku dva, jen na opačné straně pizzy. Všimněte si, že sudých čísel od 2 do 1010 je $\frac{1010}{2} = 505$.
- (7) Mezi dva dílky s čísly 1011 a 1010 v dolní polovině položíme dílek 505.

Takto dostaneme pizzu, která splňuje vlastnosti ze zadání, jak lze snadno ověřit.



(b) Očíslujme talíře indexy $0, 1, 2, \dots, k-1$. Budeme uvažovat indexy modulo k , tedy k -tý talíř je stejný jako nultý talíř, $(k+1)$ -ní talíř jako první talíř atd. Označme si $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ počet aktivací talíře 0, 1, 2 atd. Ukážeme, že pokud provedeme sérii aktivací, po které se počet brambor na každém talíři vrátí do původního stavu, tak počty aktivací jednotlivých talířů jsou si rovny, tedy $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1}$. Z toho pak jasně plyne, že celkový počet aktivací je dělitelný k .

Víme, že při aktivaci talíře i ubyde z talíře i dvě brambory, při aktivaci talíře $i-1$ nebo $i+1$ přibude na talíř i jedna brambora a aktivace zbývajících talířů neovlivní počet brambor na talíři i . Aby se počet brambor na každém talíři vrátil do původního stavu, nesmí se na žádném talíři změnit počet brambor, tedy musí pro každý talíř platit rovnice:

$$a_{i-1} + a_{i+1} - 2a_i = 0.$$

To upravíme do tvaru

$$a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i,$$

z něhož už vidíme, že posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ je aritmetická, a proto $a_i = a_0 + d \cdot i$ pro každé $i \in \mathbb{Z}_0^+$ a pro nějaké $d \in \mathbb{Z}_0^+$. Zároveň protože indexujeme modulo k , tak $a_0 = a_k$, proto

$$a_0 = a_0 + d \cdot k,$$

$$d \cdot k = 0.$$

Protože číslo k je nutně nenulové, musí $d = 0$. Z toho už plyne, že pro každý talíř i platí $a_i = a_0$, a proto $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1}$, jak jsme chtěli ukázat.

POZNÁMKY:

Většina správných řešení úlohy (a) si ulehčila práci tím, že si všimli, že posloupnosti tohoto typu již byly zkoumané a převedli posloupnost ze zadání na Skolemovu nebo Langfordovu posloupnost. Pokud se ale někdo vydával cestou konstrukce, tak často jsem musel strhnout bod za to, že se v konstrukci nalézala chyba, která ke smůle řešitele šla snadno opravit.

Většina správných řešení úlohy (b) postupovala podobně jako vzorák, jen rovnice pro počet aktivací byla vyjádřena v jiném tvaru či z ní pak induktivně odvozovali nějaký vztah pro a_i . Typicky ale řešení, kde se nepoužilo ani trochu algebry, důkaz moc odmávala.

(Ondřej Sedláček)

Úloha 6.

(a) Na stole leží několik stříbrných mincí spolu se zlatým a stříbrným seznamem (oba jsou na začátku prázdné). Orgové chodí postupně ke stolu a každý buď přidá na stůl zlatou minci a připiše na stříbrný seznam počet stříbrných mincí na stole, nebo odebere jednu stříbrnou minci a připiše na zlatý seznam počet zlatých mincí na stole. Po vystřídání všech orgů nezbyla na stole žádná stříbrná mince. Dokažte, že součet čísel na zlatém seznamu je stejný jako součet čísel na stříbrném seznamu.

(b) Markét má v řadě za sebou položeno 2345 mincí, přičemž pouze n -tá mince je otočena rubem vzhůru, kdežto ostatní jsou otočeny rubem dolů. Jeden Markétin tah spočívá v tom, že zvolí nějakou minci, která je rubem vzhůru, a otočí její bezprostřední sousedy (či souseda, jde-li o krajní minci). Určete všechna n taková, že Markét může po konečném počtu tahů docílit stavu, kdy budou všechny mince otočeny rubem vzhůru.

ŘEŠENÍ:

(a) BÚNO si označme $s_1, s_2, \dots, s_n$ stříbrné mince v pořadí, v jakém jsou odebrány. Necht' z_1 je počet zlatých mincí na stole předtím, než je sebrána s_1 . Tedy z_1 orgů muselo přijít, položit na stůl zlatou minci a na stříbrný seznam připsat celkový počet stříbrných mincí. Na stříbrném seznamu se tedy ocitne z_1 krát číslo n . V okamžiku, kdy je mince s_1 sebrána, bude na zlatý seznam zapsáno číslo z_1 .

Označme si dále počty zlatých mincí přidaných mezi odebráním mincí s_{i-1} a s_i jako z_i (uvědomme si, že zlaté mince pokládáme po odebrání všech stříbrných mincí nám už nic nezmění). Pak tedy podobně, po odebrání mince s_2 bude na stříbrném seznamu navíc z_2 -krát číslo $n - 1$ a na zlatém navíc $z_1 + z_2$.

Podívejme se na to, kolikrát je která stříbrná mince započítána do stříbrného seznamu – mince s_1 je započítána pouze v prvních z_1 krocích, mince s_2 v prvních $z_1 + z_2$ a tak dále, až minci s_n započítáme $(z_1 + z_2 + \dots + z_n)$ -krát. Tedy v celkovém součtu se z_i objeví $(n - i + 1)$ -krát.

Oproti tomu prvních z_1 zlatých mincí započítáme do zlatého seznamu při odběru každé mince stříbrné, tedy n -krát, z_2 dalších při všech kromě odběru s_1 , tedy $(n - 1)$ -krát a tak dále, až z_n

započítáme pouze jednou. Opět tedy z_i započítáme $(n - i + 1)$ -krát a na seznamech jsou skutečně stejné součty.

(b) Dokážeme, že to jde jenom pro $n = 1173$, tedy pro prostřední minci. Chtěli bychom si pořídit nějaký invariant, který se zachovává při každém Markétině tahu. Nejprve si přidejme jednu minci otočenou rubem dolů na každý kraj, aby bylo na každé z 2345 původních mincí možné provádět operaci, která ovlivní okolí stejně. Markét krajní mince nevidí, takže na nich tahy provádět nebude. Ovšem mince se vlivem dalších operací otáčet budou.

Pořídme si funkci $V(x) = -x$ pro každou minci položenou rubem vzhůru a funkci $D(x) = x + 1$ pro každou minci otočenou rubem dolů. Bude nás zajímat výsledek, jaký dostaneme složením všech funkcí mincí v tom pořadí, jak jdou za sebou. Tedy, pokud bychom třeba měli jenom pět mincí, z nichž druhá by byla rubem vzhůru a ostatní dolů, získali bychom výraz

$$D(V(D(D(D(x)))))) = -x - 2.$$

Na začátku má náš výraz i s okrajovými mincemi (označme jej M) hodnotu

$$M(x) = D(\dots V(\dots D(x) \dots) = -x - (2347 - (n + 1)) + ((n + 1) - 1) = -x - 2346 + 2n.$$

Zkoumejme, co s výrazem dělá operace na mincích. Máme-li původní rozložení mincí $D(V(D(y))) = -y$, kde y je hodnota získaná složením funkcí zbývajících mincí doprava od trojice, na níž Markét provádí tah, získáme výsledek $V(V(V(y))) = -y$, neboť Markét otočila bezprostřední sousedy mince, která je rubem vzhůru. Tedy, když jsou oba sousedé stejně orientováni, výsledek to nezmění. Podobně pro $D(V(V(y))) = y + 1$ získáme $V(V(D(y))) = y + 1$. Tudíž žádným svým tahem Markét situaci nezmění a hodnota M bude po libovolném množství tahů stále $-x - 2346 + 2n$.

Na konci bychom se chtěli dostat do situace, kdy všech 2345 mincí bude rubem vzhůru, na okrajových nám nezáleží – máme tedy 4 situace, kdy krajní mince budou VV , VD , DV nebo DD . Jelikož ve dvou prostředních případech máme celkem sudý počet mincí otočených rubem vzhůru, bude mít výsledek kladné znaménko u x , ačkoliv jsme začínali s $-x$, tedy tyto dva musíme vyloučit. Ve zbylých dvou případech krajní mince nijak neovlivňují hodnotu M , získáme tedy, že na konci bude M rovno $-x$ (skládáme 2345 funkcí, které pouze převrací znaménko). To ovšem platí pouze pro $2n = 2346$, tedy pro $n = 1173$.

Zbývá ukázat, že pro $n = 1173$ opravdu zvládneme kýženeho výsledku dosáhnout. Povšimněme si, že 2345 je kongruentní s 1 modulo 4. Konstrukce bude fungovat dokonce pro všechna taková čísla. Provedeme ji indukcí – pokud umíme konstrukci pro $4k + 1$ mincí, umíme ji pro $4k + 5$. Máme-li mincí pět, přičemž prostřední je lícem vzhůru, ostatní lícem dolů, pak táhnutím s mincemi 3, 2, 4 získáme všechny mince rubem vzhůru.

Nyní nechť umíme konstrukci pro $4k + 1$ a snažíme se sestojit konstrukci pro $4k + 5$. Chtěli bychom se dostat do situace, kdy máme otočené dvě mince na obou krajích rubem vzhůru, stejně tak tu prostřední, ale ostatní rubem dolů, pak můžeme z indukčního předpokladu tvrdit, že konstrukce existuje. Pokud budeme provádět tahy (na obě strany) od prostřední mince až k minci druhé od kraje, otočíme každou minci dvakrát (za jejího pravého i levého souseda), kromě dvou a dvou krajních mincí, které otočíme právě jednou. Tím jsme získali kýženou situaci a máme vyhráno.

POZNÁMKY:

Podúloha (a) byla vesměs řešená dvojím počítáním, našly se zajímavé interpretace a hezké vizualizace, například pomocí grafu. Většina řešitelů se s ní poprala úspěšně. U podúlohy (b) mnozí dorazili ke správnému výsledku (i s konstrukcí), problémem ovšem bylo vyřazování ostatních možností. Vzorové řešení bylo bohužel poměrně trikové a valná většina řešitelů tak jenom mávala, za což jsem body udělit nemohla.

(Adéla Karolína „Áda“ Žáčková)

Úloha 7.

(a) Pro posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že a_{n+1} je rovno součtu druhých mocnin cifer čísla a_n . Dokažte, že pro všechna a_1 existují k a N takové, že pro $n \geq N$ je $a_n = a_{n+k}$.

(b) Necht' a, b, c, d jsou kladná reálná čísla splňující $a + b + c + d = 4$. Dokažte, že pak platí

$$ab + bc + cd + da \geq ab^2c + bc^2d + cd^2a + da^2b.$$

ŘEŠENÍ:

(a) Stačí nám ukázat, že vždy existují dvě různá čísla $x < y$ taková, že $a_x = a_y$. Pak protože následující člen posloupnosti závisí jen na jednom předchozím, tak $a_{x+1} = a_{y+1}$. Indukcí získáme $a_{x+i} = a_{y+i}$ pro libovolné $i \in \mathbb{N}_0$. Pak ale pro $n \geq x$ a $k = y - x$ získáváme $a_n = a_{n+k}$, což po nás přesně chce zadání.

Nejprve ukážeme, že pokud $a_n \geq 1000$, tak $a_{n+1} < a_n$. Označme jako p počet cifer čísla a_n , pak $a_n \geq 10^{p-1}$. Ze zadání je a_{n+1} součet druhých mocnin cifer a_n , ale každá cifra může být nanejvýš 9, tím pádem $a_{n+1} \leq 9^2 \cdot p = 81p$. Protože $a_n \geq 1000$, tak $p \geq 4$. Pro taková p ale platí nerovnost $81p < 10^{p-1}$, z čehož získáváme

$$a_n \geq 10^{p-1} > 81p \geq a_{n+1},$$

a tedy $a_n > a_{n+1}$, což jsme chtěli. (Nerovnost $81p < 10^{p-1}$ lze dokázat například indukcí. Pro $p = 4$ zjevně platí $81 \cdot 4 < 10^{4-1}$. Nyní pokud platí pro nějaké p , tak máme $81(p+1) < 10^{p-1} + 81 < 10^{p-1} + 9 \cdot 10^{p-1} = 10^p$, tedy nerovnost i pro $p+1$.)

Máme tak, že pokud je nějaký člen posloupnosti alespoň 1000, tak následující členy posloupnosti klesají, dokud se nedostanou na číslo, které je menší než 1000.

Pokud je $a_n < 1000$, tak je nanejvýš třiciferné. Tím pádem a_{n+1} je součet nanejvýš tří druhých mocnin nějakých cifer, tedy nanejvýš $3 \cdot 9^2 = 243 < 1000$. Indukcí tak máme, že jakmile posloupnost má člen menší jak 1000, tak i všechny následující členy jsou menší než 1000.

Dohromady ať je a_1 jakékoliv, tak od nějaké chvíle jsou členy posloupnosti menší než 1000. Posloupnost je ale nekonečná, takže se nějaké z čísel menších než 1000 musí zopakovat, a to jsme přesně chtěli.

(b) Pravou stranu nerovnosti ze zadání můžeme rozložit jako $(ab + cd)(ad + bc)$. Z AG-nerovnosti platí

$$\sqrt{(ab + cd)(ad + bc)} \leq \frac{(ab + cd) + (ad + bc)}{2} \implies (ab + cd)(ad + bc) \leq \frac{(ab + bc + cd + da)^2}{4}.$$

Výraz $ab + bc + cd + da$ v čitateli posledního zlomku můžeme rozložit na $(a + c)(b + d)$. Opět z AG-nerovnosti a využitím podmínky $a + b + c + d = 4$ máme

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} \leq \frac{(a + c) + (b + d)}{2} = \frac{4}{2} \implies (a + c)(b + d) \leq 4.$$

Dosazením do předchozího odhadu získáme

$$(ab + cd)(ad + bc) \leq \frac{(ab + bc + cd + da)^2}{4} \leq ab + bc + cd + da,$$

což jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

Všechna došlá řešení obou částí se ubírala velmi podobným směrem jako vzorová řešení. Nejčastější chyby v první části byly chybné odhady týkající se počtu cifer. (David Hromádka)