

Metrické prostory 3

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. DUBNA 2026

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a necht pro každá reálná $a < b$ splňující $f(a) = f(b)$ existuje $s \in (a, b)$ takové, že $f(s) = f(a) = f(b)$. Dokažte, že pak je již f monotónní¹ na $\mathbb{R}$.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Nechť $A \subseteq \mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$ je množina polynomů mající člen u x^2 nulový neboli

$$A = \{a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_2 = 0\}.$$

Rozhodněte, zda je uzávěr A roven celému $\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$, tj. jestli je A v $\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$ hustá.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Nalezněte všechny spojitě funkce $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ rovnost

$$x^3 f(x^2) - x^2 f(x) - x f(x^2) + f(x) = 1.$$

¹Tedy že je f nerostoucí nebo neklesající.

Metrické prostory 3

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a necht' pro každá reálná $a < b$ splňující $f(a) = f(b)$ existuje $s \in (a, b)$ takové, že $f(s) = f(a) = f(b)$. Dokažte, že pak je již f monotónní¹ na $\mathbb{R}$.

ŘEŠENÍ:

Pro každou spojitou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a uzavřenou množinu A platí, že $\forall y \in \mathbb{R}$ je množina $B = \{x \in A : f(x) = y\}$ uzavřená. V prvním díle seriálu se ukázalo, že množina je uzavřená právě tehdy když limitní body konvergentních posloupností leží v této množině. To tady platí, protože pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou x^* máme z Heineho věty $f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y = y$, tedy B je uzavřená.

Ukážeme, že pokud pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ platí $f(a) = f(b)$, pak je funkce $f(x)$ konstantní na (a, b) . Předvedeme to sporem. Necht' $c \in (a, b) : f(c) \neq (f(a) = f(b))$. Necht'

$$A = \{x \in \langle a, c \rangle : f(x) = f(a)\} \quad \text{a} \quad B = \{x \in \langle c, b \rangle : f(x) = f(a)\}.$$

Víme, že obě množiny jsou omezené, takže mají supremum/infimum. Dále jsou uzavřené, takže tyto body obsahují a proto můžeme psát $\alpha = \max A$ a $\beta = \min B$. Protože $(f(\alpha) = f(\beta)) \neq f(c)$ jsou obě čísla různá od c , což v kombinaci s $\alpha \leq c \leq \beta$ dává, že jsou navzájem různá.

Ze zadání existuje bod $x \in (\alpha, \beta)$ takový, že $f(x) = f(a)$. Víme však, že $\max A < x < \min B$, neleží tedy ani v jedné z množin. Leží však na jednom z intervalů $\langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle$ a splňuje $f(x) = f(a)$, takže v jedné z těchto množin být musí, což je spor.

Nyní použijeme dokázanou vlastnost k ukázání monotonie f . Pro spor předpokládáme, že f není monotónní. Pro nemonotónní funkce platí, že existuje $x_1 < x_2 < x_3$ takové, že $f(x_2) > \max\{f(x_1), f(x_3)\}$, nebo analogicky s opačnou nerovností a minimem. V tomto případě na intervalech $\langle x_1, x_2 \rangle$ a $\langle x_2, x_3 \rangle$ nalezneme z Weierstrassovy věty o nabývání mezihodnot body y_1, y_2 splňující $f(y_1) = f(y_2) = \max(f(x_1), f(x_3))$. Z předchozího odstavce víme, že f je na intervalu (y_1, y_2) konstantní, takže by muselo platit $f(x_2) = \max(f(x_1), f(x_3))$, což je spor a funkce musí být monotónní.

POZNÁMKY:

Většina správných řešení postupovala analogicky jako vzorové. Někteří řešitelé se snažili dokázat konstantnost na intervalu se stejnými konci pomocí posloupností zkracujících se vnořených intervalů. Ta ale ne vždy musí konvergovat k jednomu bodu, jako například posloupnost intervalů $(-1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n})$. (Patrik Štencel)

¹Tedy že je f nerostoucí nebo neklesající.

Úloha 2.

Nechť $A \subseteq C(\langle 0, 1 \rangle)$ je množina polynomů mající člen u x^2 nulový neboli

$$A = \{a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_2 = 0\}.$$

Rozhodněte, zda je uzávěr A roven celému $C(\langle 0, 1 \rangle)$, tj. jestli je A v $C(\langle 0, 1 \rangle)$ hustá.

ŘEŠENÍ:

Pro připomenutí: $C(\langle 0, 1 \rangle)$ je prostor spojitých funkcí definovaných na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ se supremovou metrikou.

Budeme chtít využít Weierstrassovu větu o aproximaci spojitých funkcí, která říká, že množina $P = \{a_n x^n + \dots + a_0 \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq C(\langle 0, 1 \rangle)$ je v $C(\langle 0, 1 \rangle)$ hustá. Hodilo by se nám tedy z P vyrobit nějakou jinou množinu. Pojdme se podívat, co se stane, když budeme skládat spojitě funkce.

Všimněme si, že pro spojitou funkci $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ máme, že pro $g \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ platí $g(f) \in C(\langle 0, 1 \rangle)$, protože f je spojitá a zobrazuje do $\langle 0, 1 \rangle$ a g je spojitá definovaná na $\langle 0, 1 \rangle$. Co stojí za zmínku, je, že pokud f je bijekce, máme pro všechna $g_1, g_2 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$:

$$\rho(g_1, g_2) = \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |g_1(x) - g_2(x)| = \sup_{f(x) \in \langle 0, 1 \rangle} |g_1(f(x)) - g_2(f(x))| = \rho(g_1 \circ f, g_2 \circ f),$$

což platí, neboť stále děláme suprema stejných množin, jen jsme si přejmenovali jednotlivé vstupy do funkcí g_1 a g_2 . Pojmenujme toto zobrazení $C : C(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow C(\langle 0, 1 \rangle)$, které g zobrazí na $g(f)$.

Co jsme tímto vlastně získali? Zobrazení z C , které zachovává vzdálenosti, a tedy je spojitě a prostě (protože pokud se rovnají dva obrazy, tak mají nulovou vzdálenost, takže i vzory mají nulovou vzdálenost).

K čemu to je dobré? Zatím to není jasné, ale co kdybychom si přidali požadavek, že f^{-1} je spojitě? Pak se stane zajímavá věc, protože pak pro $g \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ platí, že $g(f^{-1}) \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ a zároveň $C(g(f^{-1})) = g$, takže C bude na.

Funkce f má v našem případě zvláštní jméno a říká se jí homeomorfismus. Ve zkratce se dá říct, že homeomorfismus je obousměrně spojitá bijekce. Taková funkce je užitečná, protože pokud se nějaká vlastnost prostoru zachovává při zobrazení spojitou funkcí, zařídí nám homeomorfismus, že ta vlastnost buď platí nebo neplatí v obou prostorech, mezi kterými vede.

Naprosto stejně si všimneme, že C je také homeomorfismus, protože je to bijekce a zachovává vzdálenosti v jednom směru, takže i v druhém. Jedna z vlastností, které homeomorphy zachovávají, je, že zobrazují husté množiny na husté. Jednoduchý důkaz spočívá v tom, že pokud $f : C \rightarrow D$ je homeomorfismus, vezmeme otevřenou $U \subseteq D$, její vzor $f^{-1}(U)$ je otevřený, a protože f je na, je vzor dokonce i neprázdný. Pokud C' je hustá v C , pak nějaký její prvek je v $f^{-1}(U)$, a tedy v U je nějaký prvek z $f(C')$, tedy je hustá.

To konečně vysvětluje naši konstrukci C a k čemu je dobrá. Umožňuje nám vytvořit z husté množiny jinou hustou množinu! Takže nám stačí najít f homeomorfismus, který zobrazí P na nějakou podmnožinu A ze zadání, a jsme hotovi. Triviální příklad je $f(x) = x^3$, který zobrazí P na polynomy s nenulovými koeficienty jen u mocnin dělitelných třemi, tedy na podmnožinu A . Triviálně jak $f(x)$, tak $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ jsou spojitě a všechny naše předešlé úvahy se dají aplikovat. Máme tedy hotovo.

POZNÁMKY:

Některá řešení postupovala stejně jako vzorové, ostatní řešitelé použili více přímý způsob a ukázali, že posloupnost $f_n(x) = x^2 - x^2(1 - x^2)^n$ leží v A a má limitu x^2 , takže pak mohou aproximovat libovolnou spojitou funkci polynomem, a poté jeho kvadratický člen aproximují vhodným členem posloupnosti f_n . U tohoto postupu však většina řešitelů vůbec nedokázala, proč jim stačí dokázat, že umí aproximovat x^2 . Na druhou stranu jednoduchou úpravou vzorového řešení získáme mnohem zajímavější fakt, že nám stačí polynomy s mocninami x , které jsou násobky libovolného n , takže můžeme mít libovolný pevný počet koeficientů nulových a tvrzení stále platí. (Patrik Štencel)

Úloha 3.

Nalezněte všechny spojité funkce $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ rovnost

$$x^3 f(x^2) - x^2 f(x) - x f(x^2) + f(x) = 1.$$

ŘEŠENÍ PEVNÝM BODEM:

Rovnici upravíme jako

$$(1 - x^2)f(x) - x(1 - x^2)f(x^2) = 1.$$

Tu na $\langle 0, 1 \rangle$ řeší spojitá funkce

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle,$$

což lze uhodnout z tvaru rovnice nebo nějakou metodou² spočítat. Dále už jen budeme ukazovat, že jiné řešení než φ neexistuje, k čemuž využijeme Banachovu větu o kontrakci.

Protože uvažujeme body $x \in \langle 0, 1 \rangle$, můžeme ekvivalentně řešit rovnici

$$f(x) = x f(x^2) + \frac{1}{1-x^2},$$

neboť $1 - x^2 \neq 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$.

Množina $\langle 0, 1 \rangle$ není vzhledem ke standardní metrice na $\mathbb{R}$ kompaktní, takže na $\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$ není dobře definovaná supremová metrika ρ_∞ . Proto se pro přirozené n omezíme na kompaktní interval $I_n = \langle 0, 1 - 1/n \rangle$. Množina $\mathcal{C}(I_n)$ spojitých funkcí na I_n již tvoří vzhledem k supremové metrice ρ_∞ metrický prostor, který je navíc dle věty 19 třetího dílu seriálu úplný.

Dále definujeme zobrazení

$$T_n : \mathcal{C}(I_n) \rightarrow \mathcal{C}(I_n),$$

které funkci $f \in \mathcal{C}(I_n)$ přiřadí funkci $T_n(f)$ definovanou jako

$$T_n(f)(x) = x f(x^2) + \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in I_n.$$

Pro f spojitou na $I_n = \langle 0, 1 - 1/n \rangle$ je vždy i $T_n(f)$ spojitá na tomto intervalu, neboť $T_n(f)$ je dána součty, součiny a složením spojitých funkcí.

Ukážeme, že T_n je kontrakcí: Pro $f, g \in \mathcal{C}(I_n)$ a libovolný bod $x \in I_n$ platí

$$|T_n(f)(x) - T_n(g)(x)| = \left| x f(x^2) + \frac{1}{1-x^2} - x g(x^2) - \frac{1}{1-x^2} \right| = \left| x(f(x^2) - g(x^2)) \right| = x |f(x^2) - g(x^2)|$$

díky nezápornosti x . Pro libovolné $x \in I_n = \langle 0, 1 - 1/n \rangle$ platí, že $x^2 \in \langle 0, x \rangle \subseteq I_n$. Tudíž

$$|f(x^2) - g(x^2)| \leq \max_{t \in I_n} |f(t) - g(t)| = \rho_\infty(f, g).$$

Zároveň $0 \leq x \leq 1 - 1/n$, takže použitím těchto dvou nerovností dostáváme

$$|T_n(f)(x) - T_n(g)(x)| = x |f(x^2) - g(x^2)| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \rho_\infty(f, g).$$

²Například předpokládat řešení ve tvaru řady $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a zjistit, že vyhovující řada je geometrická se součtem $1/(1-x)$ pro $|x| < 1$.

Protože tato nerovnost platí pro všechna $x \in I_n$, platí již také

$$\rho_\infty(T_n(f), T_n(g)) = \max_{t \in I_n} |T_n(f)(t) - T_n(g)(t)| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \rho_\infty(f, g).$$

Odtud plyne, že zobrazení T_n je kontrakce na metrickém prostoru $\mathcal{C}(I_n)$ s koeficientem $1 - 1/n < 1$.

Spolu s úplností prostoru $\mathcal{C}(I_n)$ z tohoto plyne díky Banachově větě o pevném bodě, že rovnice $T_n(f) = f$ má na $\mathcal{C}(I_n)$ právě jedno řešení.

Nakonec předpokládejme pro spor, že zadaná rovnice má i jiné spojitě řešení $\omega : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ různé od již nalezeného $\varphi(x) = 1/(1-x)$. Pak se tyto funkce musí v alespoň jednom bodě lišit, označme tento bod jako $a \in \langle 0, 1 \rangle$. Nalezneme k přirozené takové, že $a \in I_k$ – to lze, neboť pravé krajní body intervalů I_n konvergují k jedničce (tj. $\lim(1 - 1/n) = 1$), ale a je ostře pod 1. Pokud nyní uvažujeme funkce ω a φ jen jako funkce definované na I_k , pak jsou tyto funkce spojitě, různé a obě řeší původní rovnici. To je ale spor s tím, že rovnice $T_k(f) = f$ má na $\mathcal{C}(I_k)$ právě jedno řešení.

ŘEŠENÍ KONVERGENCÍ:

Z předchozího řešení víme, že můžeme ekvivalentně pracovat s rovnicí

$$f(x) = xf(x^2) + \frac{1}{1-x^2},$$

kteřá má řešení $\varphi(x) = 1/(1-x)$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Všimněme si dosazením $x = 0$, že libovolné řešení f musí splňovat $f(0) = 1$.

Předpokládejme, že $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je nějaké spojitě řešení dané rovnice a definujme funkci δ předpisem $\delta(x) = f(x) - \varphi(x)$. Pak je δ spojitá funkce na $\langle 0, 1 \rangle$ a platí $\delta(0) = 1 - 1 = 0$.

Protože f a φ na $\langle 0, 1 \rangle$ splňují

$$f(x) = xf(x^2) + \frac{1}{1-x^2}, \quad \varphi(x) = x\varphi(x^2) + \frac{1}{1-x^2},$$

musí δ splňovat

$$\delta(x) = f(x) - \varphi(x) = xf(x^2) - x\varphi(x^2) = x\delta(x^2)$$

pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Navíc $x^2 \in \langle 0, x \rangle \subseteq \langle 0, 1 \rangle$, takže dosazením platí také $\delta(x^2) = x^2\delta(x^4)$, tj. $\delta(x) = x\delta(x^2) = x \cdot x^2\delta(x^4)$. Induktivně obecně pro přirozené n platí

$$\delta(x) = x^{2^n-1}\delta(x^{2^n}).$$

Pevně zvolme nějaké $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak posloupnosti $(x^{2^n})_{n=1}^\infty$ a $(x^{2^n-1})_{n=1}^\infty$ mají v $\langle 0, 1 \rangle$ limitu 0. Ze spojitosti δ musí $(\delta(x^{2^n}))_{n=1}^\infty$ konvergovat k $\delta(0) = 0$, a tedy

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2^n-1}\delta(x^{2^n}) = 0.$$

Tudíž pro libovolné x je $\delta(x) = 0$, odkud již plyne, že $f = \varphi$, neboli φ je jediné řešení dané rovnice.

POZNÁMKY:

Většina došlých řešení se ubírala jedním ze dvou zde uvedených postupů. Některá řešení postupující metodou pevného bodu nebyla úplně správně, protože pracovala přímo na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, pro který netvoří $(\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle), \rho_\infty)$ metrický prostor. Jiná řešení s využitím zadané rovnice vyjadřovala f pomocí nekonečné řady. Tento postup v principu vedl ke správnému řešení včetně jednoznačnosti, ale dalo docela práci ho udělat korektně. (Matěj „Pan G“ Gajdoš)