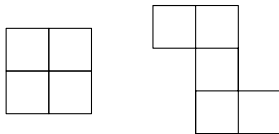


Skládání

3. PODZIMNÍ SÉRIE

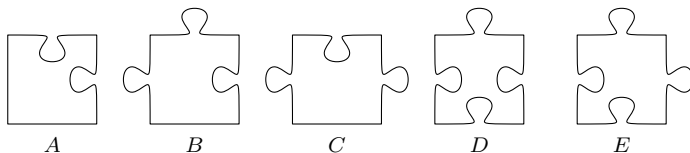
TERMÍN ODESLÁNÍ: 8. PROSINCE 2025

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Dlaždič Dláža dláždí tabulku 8×8 , přičemž má pouze dlaždičky níže vyobrazených tvarů (dlaždičky může otáčet i překlápět). Každý tvar použije alespoň jednou. Nakreslete, jak může Dlážovo vydíždění tabulky vypadat.



ÚLOHA 2. (3 BODY)
Najděte všechna prvočísla p , q taková, že $p^2 + q^2 + 2044$ je složené číslo.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Anička dostala obdélníkové puzzle. Když jej otevřela, s úžasem zjistila, že každý z 851 dílků má jeden z následujících tvarů. Kolik je dílků typu E ?



ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Věhlasný skladatel Ivan rád skládá funkce. Najděte pro něj všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

$$f(f(x) + y) = x + f(f(y))$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Mějme tabulku $n \times n$ a obdélníky $1 \times k$ pro nějaké přirozené $k \geq 2$, kterými je tato tabulka vydížděna¹. Řekneme, že řádek či sloupec tabulky je *vyvážený*, pokud do něj zasahuje stejný počet vodorovně a svisle orientovaných obdélníků. Dokažte, že vyvážených řádků a sloupců bude v součtu maximálně $\frac{3}{2}n$.

¹Tím myslíme, že každé políčko tabulky je zakryto právě jedním obdélníkem a každý z použitých obdélníků leží celý v tabulce.

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

Markét si na papír nakreslila ostroúhlý trojúhelník ABC , nad jehož stranami zkonstruovala půlkružnice tak, že všechny leží vně trojúhelníku. Průsečík výšky z vrcholu A a půlkružnice nad stranou BC označila D . Obdobně zkonstruovala body E, F po řadě naproti bodům B, C . Lucka pak přišla a chtěla z šestiúhelníku $AFBDCE$ složit jehlan se základnou ABC . Dokažte, že se jí to mohlo povést.

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Pašík Vašík přes rok hodně zlobil. Proto na něj přišel čert a řekl: „Najdi všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

$$f(xy + f(f(x))) = yf(x) + x$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.“ Zachraňte pašíka před čertem a najděte je.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Terka na stole tvaru nekonečné roviny hraje hru s figurkami A, B, C, D . Jeden tah figurkou A vypadá tak, že její nová pozice je obrazem její staré pozice v osové souměrnosti podle úsečky BD . Obdobně, figurka D se při svém tahu přesune na místo, které je obrazem její stávající pozice v osové souměrnosti podle úsečky AC . Figurky B, C se nepohybují a ve hře není povoleno dvakrát po sobě táhnout stejnou figurkou. Na začátku byly figurky umístěny tak, že $|AB| = |BC| = |CD|$. Dokažte, že po odehrání konečně mnoha tahů budou obě figurky A, D stát na své počáteční pozici.

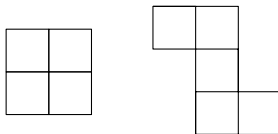
Skládání

3. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

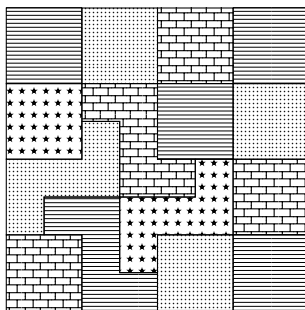
Úloha 1.

Dlaždič Dláža dláždí tabulku 8×8 , přičemž má pouze dlaždičky níže vyobrazených tvarů (dlaždičky může otáčet i překlápět). Každý tvar použije alespoň jednou. Nakreslete, jak může Dlážovo vydláždění tabulky vypadat.



ŘEŠENÍ:

Dláža mohl tabulku vydláždit například takto:



POZNÁMKY:

Většina došlých řešení byla správně. Některým řešitelům se zřejmě zdálo poslat jen výsledek moc skromné, a tak přidávali různá pozorování nebo postupy, což také není špatně. (Ondřej Vočka)

Úloha 2.

Najděte všechna prvočísla p , q taková, že $p^2 + q^2 + 2044$ je složené číslo.

ŘEŠENÍ:

Rozdělíme si úlohu na dva případy. Nejprve předpokládejme, že p a q jsou lichá. Pak jejich druhé mocniny jsou také liché, to lze snadno ověřit:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

V našem výrazu pak sčítáme dvě tyto mocniny, neboli dvě lichá čísla, a přičítáme k nim 2044. Celkovým součtem proto bude sudé, tudíž určitě složené číslo, které je větší než dva.

V druhém případě je alespoň jedno z prvočísel sudé, řekněme tedy $p = 2$. Výraz upravíme na

$$4 + q^2 + 2044 = q^2 + 2048,$$

a zkoumáme, zda je číslem složeným. V úlohách jako je tato se nám nabízí takový trik – modulení. Můžeme výraz zkoumat, nejčastěji modulo 3 nebo 4, a dívat se, jestli náhodou není něčím dělitelný. Zkoumejme výraz modulo 3. Protože $2048 \equiv 2 \pmod{3}$, zbývá nám podívat se na zbytky, které dává q^2 .

Zbytek po dělení třemi druhé mocniny libovolného celého čísla může být pouze 0 nebo 1. To se dá ukázat tím, že umocníme q , které zapíšeme ve tvaru $3k$, $3k+1$ a $3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$. Zbytek nula pak nastane pouze pro $q = 3k$ a jediné takové prvočíslo je trojka. Pro $q = 3$ a $p = 2$ má výraz hodnotu 2057, což je složené číslo. Jestliže $q \neq 3k$, máme $q^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Pak jsme vyhráli, protože celý výraz bude dělitelný třemi (a určitě větší než tři):

$$q^2 + 2048 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

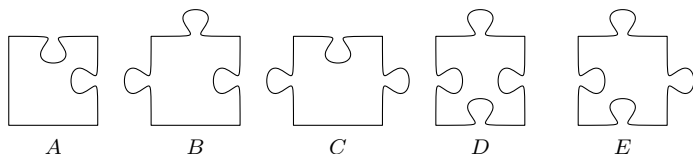
Závěrem je, že výraz $p^2 + q^2 + 2044$ je složené číslo pro všechny dvojice prvočísel p, q .

POZNÁMKY:

Došlá řešení byla vesměs správně, pochvalu mají ti, kteří v řešení dokázali, že množina kvadratických zbytků po dělení třemi je opravdu $\{0, 1\}$. (Lucka Zůnová)

Úloha 3.

Anička dostala obdélníkové puzzle. Když jej otevřela, s úžasem zjistila, že každý z 851 dílků má jeden z následujících tvarů. Kolik je dílků typu E ?



ŘEŠENÍ:

Obdélník z 851 dílků má jenom 2 možnosti na délky hran. Obdélník 1×851 z možných dílků nejde složit, takže musí být 23×37 .

Označme počet dílků typu A až E postupně písmeny a až e . V rozích obdélníku mohou být jen dílky typu A , které jsou tedy 4. V hranách obdélníku je $2(21 + 35) = 112$ dílků. Tyto dílky musí mít rovnou stěnu a musí tedy být buď B , nebo C , takže platí $b + c = 112$. Uvnitř obdélníku je $21 \cdot 35 = 735$ dílků. Tyto dílky nemají žádnou rovnou stěnu a jsou tedy D , nebo E , takže platí $d + e = 735$.

Bez ohledu na to, jak se puzzle složí, musí každý výstupek dílku zapadat do nějakého zářezu, takže musí být stejně výstupků jako zářezů. Spočítání počtu zářezů a výstupků v každém typu puzzlíku dá následující rovnici:

$$2a + b + c + 3d + 2e = 2b + 2c + d + 2e,$$

$$2a + 2d = b + c,$$

$$d = \frac{b + c - 2a}{2}.$$

Dosazením za $b+c$ a a dostaneme $d = \frac{112-8}{2} = 52$. Potom už spočítáním dílků uvnitř obdélníku dostaneme

$$d + e = 735,$$

$$52 + e = 735,$$

$$e = 683.$$

Z tohoto plyne, že puzzle musí mít 683 dílků typu E .

POZNÁMKY:

Mnoho řešení postupovala podobně jako vzorové řešení. Většina řešitelů se ale nejdříve snažilo postavit okraj a poté přijít na to jak ho vyplnit. Zadání bylo trochu nejasné ohledně toho, jestli se smí překlápět dílky typu B . Na výsledek to nemělo vliv, takže jsem uznával obě možnosti.

Někteří řešitelé se snažili počet dílků E spočítat nalezením nějaké konstrukce a spočítání počtů dílků v ní. Nikdo, kdo toto dělal, ale neukázal, že pokud puzzle přeskládám, tak počet dílků různých typů zůstane stejný, za což jsem strhával bod. Do konstrukce se také dalo jednoduše zamotat a napočítat špatný počet dílků. (Richard Dobíšek)

Úloha 4.

Věhlasný skladatel Ivan rád skládá funkce. Najděte pro něj všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

$$f(f(x) + y) = x + f(f(y))$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

ŘEŠENÍ:

Funkcionální rovnice musí platit pro všechny uspořádané dvojice (x, y) . Můžeme tedy dosazovat konkrétní hodnoty a rovnost musí stále platit.

Dosadíme-li $(x, y) = (x, 0)$, dostaneme

$$f(f(x)) = x + f(f(0)).$$

Tento vztah využijeme, když do původní rovnice dosadíme $(x, -f(x))$, z toho vyplývá

$$f(f(x) - f(x)) = f(0) = x + f(f(-f(x))) = x + f(f(0)) - f(x).$$

Z toho nám stačí vyjádřit

$$f(x) = x - f(0) + f(f(0)),$$

přičemž druhý a třetí člen jsou jen konstanty, takže jsme dokázali, že řešení bude ve tvaru $f(x) = x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$. To ještě zkusíme dosadit do původní rovnice, abychom ověřili, jestli to skutečně platí pro všechna c :

- Levá strana: $f(f(x) + y) = f(x + c + y) = x + y + 2c$.
- Pravá strana: $x + f(f(y)) = x + f(y + c) = x + y + 2c$.

Zkouška nám vyšla, tedy víme, že řešením je $f(x) = x + c$ pro všechna $c \in \mathbb{R}$.

POZNÁMKY:

Našlo se několik způsobů řešení, ať už různá chytrá dosazení či důkaz o injektivitě nebo surjektivitě funkce. Našli se bohužel i takoví, kteří tyto vlastnosti používali bez důkazu, ti dostali většinou jeden bod za správný výsledek. (Mára Valkovič)

Úloha 5.

Mějme tabulku $n \times n$ a obdélníky $1 \times k$ pro nějaké přirozené $k \geq 2$, kterými je tato tabulka vydlážděna¹. Řekneme, že řádek či sloupec tabulky je *vyvážený*, pokud do něj zasahuje stejný počet vodorovně a svisle orientovaných obdélníků. Dokažte, že vyvážených řádků a sloupců bude v součtu maximálně $\frac{3}{2}n$.

ŘEŠENÍ:

Zvolíme si nějaké k a zvolíme nějaké vydláždění tabulky. Označíme si počet vyvážených sloupců s a počet vyvážených řádků r . Poté víme, že ve vyvážených sloupcích bude $\frac{k s n}{k+1}$ políček součástí svislých obdélníků. To proto, že každý svislý obdélník v něm zabírá k políček, každý vodorovný zabírá právě jedno a každý řádek obsahuje n políček. Symetricky, políček ve vodorovných obdélnících ve vyvážených řádcích bude $\frac{k r n}{k+1}$. Protože jsme každý čtvereček z tabulky započítali maximálně jednou, tak musí platit, že

$$\frac{kn(s+r)}{k+1} \leq n^2$$

$$(s+r) \leq \frac{n(k+1)}{k}.$$

A protože k je nejméně 2 a $\frac{k+1}{k}$ je od 2 klesající, tak z toho dostaneme $(s+r) \leq \frac{3n}{2}$, což jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správně a postupovala podobně jako vzorové řešení.

(Lukáš Trojan)

Úloha 6.

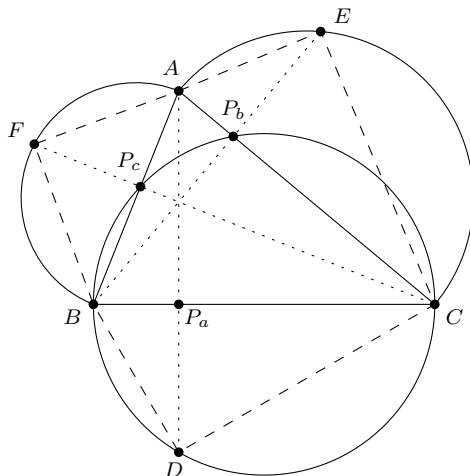
Markét si na papír nakreslila ostroúhlý trojúhelník ABC , nad jehož stranami zkonstruovala půlkružnice tak, že všechny leží vně trojúhelníku. Průsečík výšky z vrcholu A a půlkružnice nad stranou BC označila D . Obdobně zkonstruovala body E, F po řadě naproti bodům B, C . Lucka pak přišla a chtěla z šestiúhelníku $AFBDCE$ složit jehlan se základnou ABC . Dokažte, že se jí to mohlo povést.

ŘEŠENÍ:

Nejprve ukážeme, že $|AE| = |AF|$. Označme si P_b a P_c paty výšek z vrcholů B a C . Poté díky kolmosti $BP_b \perp AC$ je i $EP_b \perp AC$, tedy EP_b je výškou v trojúhelníku ACE . Ten je ale zároveň pravoúhlý s přeponou AC , neboť E leží na Thaletově kružnici nad AC . Z Euklidovy věty o odvěsné tak víme, že $|AE|^2 = |AP_b||AC|$. Obdobně z trojúhelníku ABF získáme $|AF|^2 = |AP_c||AB|$.

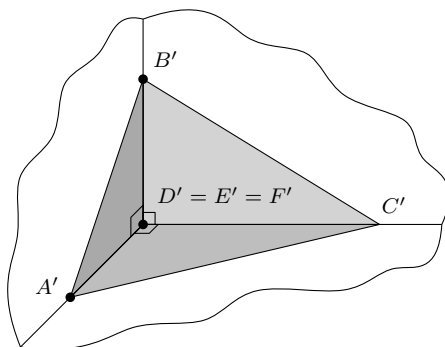
Jelikož platí rovnost úhlů $\angle BP_bC = \angle BP_cC = 90^\circ$, body B, C, P_b, P_c leží na kružnici. Z mocnosti bodu A k této kružnici víme $|AP_b||AC| = |AP_c||AB|$, pak díky předchozím rovnostem máme $|AE|^2 = |AF|^2$, neboli $|AE| = |AF|$, jak jsme chtěli.

¹Tím myslíme, že každé políčko tabulky je zakryto právě jedním obdélníkem a každý z použitých obdélníků leží celý v tabulce.



Obdobně si lze odvodit i $|BD| = |BF|$ a $|CD| = |CE|$. Ještě ale musíme ukázat, že z šestiúhelníku opravdu lze složit jehlan. Uvědomme si, že nemusíme začínat s podstavou ABC a přehýbat zbylé trojúhelníky, ale můžeme s těmito trojúhelníky začít. Poté k nim stačí jen přidat podstavu, pokud si dáme pozor, abychom k sobě přiložili příslušné úsečky, a to otočené správným směrem.

Trojúhelníky ABF , ACE a BCD k sobě umíme poskládat, díky pravým úhlům při vrcholech D , E , F , velice jednoduše. Vezmeme si tři na sebe navzájem kolmé roviny a do každé z nich dáme jeden z našich trojúhelníků. Uděláme to způsobem vyobrazeným na obrázku. Strany, které mají stejné délky a mají k sobě přiléhat, budou ležet v průsečnicích našich rovin a vrcholy s pravými úhly budou všechny v průsečíku těchto tří rovin. Trojúhelníky k sobě přiložíme odpovídajícími stranami.



Tímto nám vznikne trojúhelník $A'B'C'$, který je shodný s naším trojúhelníkem ABC , ten tak můžeme k našim složeným trojúhelníkům jednoduše přiložit, čímž jsme hotovi. (Zároveň si můžeme uvědomit, že jsme žádné trojúhelníky „neotočili“, tj. při rozložení námi vytvořeného jehlanu opravdu získáme původní šestiúhelník.)

POZNÁMKY:

Téměř všechna řešení úspěšně dokázala první část, tj. rovnost délek stran šestiúhelníku. Mylně pak tvrdila, že jehlan už musí jít poskládat. Existují totiž šestiúhelníky, které rovnosti stran splňují, ale jehlan z nich složit nelze. Druhou část pak zvládla pouze hrstka řešitelů, kde za mě nejelegantnější

postup byl ten od *Michala Ročka*, který jsme si předvedli ve vzorovém řešení. Alternativně šlo dokázat jisté nerovnosti velikostí úhlů nebo úseček, ze kterých už vyplynulo, že jehlan složit lze.
(David Hromádka)

Úloha 7.

Pašík Vašík přes rok hodně zlobil. Proto na něj přišel čert a řekl: „Najdi všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

$$f(xy + f(f(x))) = yf(x) + x$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.“ Zachraňte pašíka před čertem a najděte je.

ŘEŠENÍ:

Rovnice ze zadání musí platit pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, speciálně tedy musí platit pro volbu $x = 1$, $y = t - f(f(1))$ (kde t je proměnná, která může nabývat libovolné hodnoty z $\mathbb{R}$). Dosazením dostáváme, že $\forall t \in \mathbb{R}$ platí

$$f(t) = (t - f(f(1))) \cdot f(1) + 1 = t \cdot f(1) - f(1)f(f(1)) + 1,$$

čili jakákoli vyhovující funkce je tvaru $f(t) = at + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Dosazením do rovnice ze zadání dostaneme

$$\begin{aligned} a(xy + a(ax + b) + b) + b &= y(ax + b) + x \\ axy + a^3x + a^2b + ab + b &= axy + by + x \\ x(a^3 - 1) - by + a^2b + ab + b &= 0. \end{aligned}$$

Tato rovnost musí platit pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Volbou $x = 0$ obdržíme rovnost (reálných) polynomů v proměnné y , přičemž polynom napravo je nulový polynom. Aby rovnost platila, musí být i polynom nalevo nulový, neboli musí platit $b = 0$. Dosazením do rovnice výše dostáváme, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $x(a^3 - 1) = 0$, z čehož ihned plyne $a = 1$.

Jediným potenciálním řešením zadané funkcionální rovnice je tudíž identická funkce $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Přímým dosazením zjistíme, že tato funkce rovnici skutečně splňuje.

POZNÁMKY:

Mnoho došlých řešení postupovalo obdobně jako vzorové, nebo začali dosazením $y = 0$ a odvozením, že f je bijekce. Bohužel také mnohá řešení zapoměla provést zkoušku (nebo alespoň napsat, že tak udělala), že nalezený kandidát $f(x) = x$ skutečně rovnici splňuje (odvodili jsme podmínku nutnou, a priori ale nemusí být postačující). Nakonec jsem se ale rozhodl být milý a body za to nestrhávat (ale pozor na to).
(Josef „José“ Soural)

Úloha 8.

Terka na stole tvaru nekonečné roviny hraje hru s figurkami A, B, C, D . Jeden tah figurkou A vypadá tak, že její nová pozice je obrazem její staré pozice v osové souměrnosti podle úsečky BD . Obdobně, figurka D se při svém tahu přesune na místo, které je obrazem její stávající pozice v osové souměrnosti podle úsečky AC . Figurky B, C se nepohybují a ve hře není povoleno dvakrát po sobě táhnout stejnou figurkou. Na začátku byly figurky umístěny tak, že $|AB| = |BC| = |CD|$. Dokažte, že po odehrání konečně mnoha tahů budou obě figurky A, D stát na své počáteční pozici.

ŘEŠENÍ:

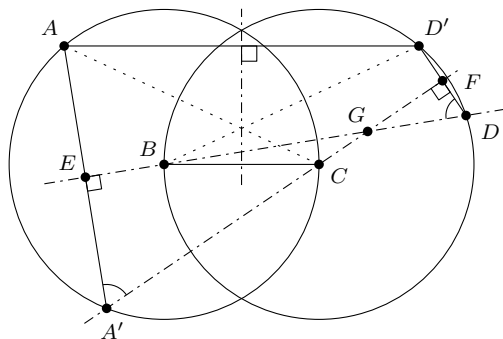
Uvědomme si, že osová souměrnost je hodně hezké zobrazení. Přesně toho budeme využívat. K řešení nám postačí si všimnout (a dokázat), že v určitých okamžicích budou figurky svými obrazy v nějaké osově souměrnosti. Dokážeme pak, že po šesti tazích se figurky dostanou opět do stejné pozice. BÚNO nechť začíná figurka A .

Oproti zadání si zaznačíme pozice figurky A bezprostředně po nultém, druhém, čtvrtém, ... tahu jako $A, A', A'', \dots$, obdobně $D, D', D'', \dots$ budou pozice figurky D bezprostředně po prvním, třetím, pátém, ... tahu.

Dokážeme, že body A a D' jsou své obrazy podle osy úsečky BC , a totéž dokážeme i pro body A'' a D .

Poznamenejme, že osová souměrnost zachovává vzdálenosti k bodům na ose, tudíž podmínka rovnosti úseček bude platit po každém tahu. Figurka A tak bude skákat po kružnici se středem v B a poloměrem $|AB|$ (příčmež na této kružnici leží i bod C), obdobně figurka D bude skákat po kružnici se středem v C a stejným poloměrem.

Nejprve dokážeme, že $ABCD'$ je rovnoramenný lichoběžník. Pak budou jistě A i D' souměrné podle osy úsečky BC . Víme, že $|AB| = |CD'|$.



Označme střed úsečky AA' jako E , střed úsečky DD' jako F a průsečík přímk BD a $A'C$ jako G . Jelikož u E, F jsou kvůli osovým souměrnostem pravé úhly, jsou trojúhelníky GEA' a GFD podobné podle věty *uu*. Tím získáme rovnost úhlů $|\angle AA'C| = |\angle EA'G| = |\angle GDF| = |\angle BDD'|$. Připomeňme si, že tyto úhly leží v dříve zmíněných kružnicích se středy v B a C . A jelikož stejné velké obloukové úhly v kružnicích o stejném poloměru přísluší stejně dlouhým tětivám, získáme, že $|AC| = |BD'|$. Z toho už plyne, že je skutečně $ABCD'$ rovnoramenný lichoběžník.

Provedme jeden tah s figurkou A . Pak si můžeme všimnout, že čtveřice D, C, B, A' splňuje stejné vlastnosti, jako původní A, B, C, D . Pak jelikož víme, že $ABCD'$ je rovnoramenný lichoběžník, musí jím být i $DCB(A')' = DCBA''$, D a A'' jsou tedy také souměrné podle osy úsečky BC .

Nyní už jenom skládáme zobrazení podle osy úsečky BC : $A \rightarrow D', D' \rightarrow A''$, tedy $A = A''$, $D \rightarrow A'', A'' \rightarrow D''$, tedy i $D = D''$. A tím máme vyhráno.

POZNÁMKY:

Klíčovým bodem v řešení bylo všimnout si oné osově souměrnosti a pak ji nějak odúhlit. Všichni řešitelé, kteří ji objevili, se zdárně dobrali k cíli. Někteří se však zamotali v nějakém odůvodňování pomocí konečného počtu možností, kam figurky skočí, což ovšem troskotá na tom, že na kružnici je nekonečně mnoho bodů.

(Adéla Karolína „Áda“ Žáčková)