

Cyklovýlet

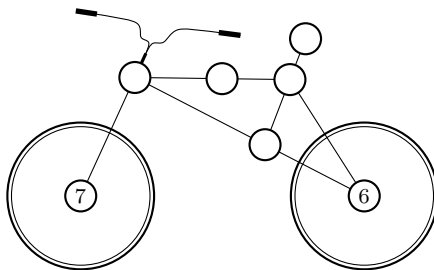
3. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. DUBNA 2026

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Anička má na svém jízdním kole matematickou hádanku, aby zabavila přihlízející. Ondra ji právě viděl projet kolem a chce hádanku vyluštit. Musí do každého volného políčka doplnit jedno z čísel 1 až 5 (přičemž se nesmí opakovat) tak, aby políčka na každé z pěti přímek měla stejný součet. Ukažte Ondrovi řešení.



ÚLOHA 2.

(3 BODY)

Pro která reálná nenulová x, y, z, w je splněna soustava rovnic:

$$x = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right), \quad w = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)?$$

ÚLOHA 3.

(3 BODY)

Markét se chystá na cyklovýlet, ale když po dlouhé době vytáhla zámek na kolo, zjistila, že už si nepamatuje jeho čtyřmístný kód. Naštěstí má ale ráda čísla, a proto si pamatuje některé jejich vlastnosti. O tomto kódu $k = \overline{abcd}$ si pamatuje, že všechny jeho (ne nutně různé) cifry jsou liché, a také, že čísla $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ i $\overline{cd}$ dělí k . Jaké všechny kombinace musí Markét vyzkoušet? Všechna čísla jsou brána v desítkové soustavě.

ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic pro a, b, c, d :

$$(b + c + d)^{2026} = 3a,$$

$$(c + d + a)^{2026} = 3b,$$

$$(d + a + b)^{2026} = 3c,$$

$$(a + b + c)^{2026} = 3d.$$

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Petr jel na výlet k prarodičům a našel u nich na půdě starou cyklickou deskovku. Hrací deska je tvořena očíslovanými políčky ležícími na kružnici. Políček je dohromady $n \geq 2$ a jsou v nějakém pořadí očíslována 1 až n . Petr může na libovolné políčko umístit figurku. Nyní kdykoliv se nachází na políčku s číslem i , posune se o i políček dál ve směru hodinových ručiček. Petr vyhraje, pokud na začátku umístí figurku tak, že po nějakém počtu kroků navštíví všech n políček. Pro která n existuje takové očíslování desky, že Petr může vyhrát?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Mějme reálná čísla a, b, c , pro která platí $a + b + c = 1$. Dokažte, že

$$3(a + bc)^2(b + ca)^2 + 3(b + ca)^2(c + ab)^2 + 3(c + ab)^2(a + bc)^2 \geq 4(a + bc)(b + ca)(c + ab).$$

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Máme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ takový, že AD není rovnoběžná s BC . Jeho úhlopříčky se protínají v bodě E . Kružnice určená body A, D, E protíná přímku AB v bodě $P \neq A$ a kružnice určená body B, C, E protíná přímku AB v bodě $Q \neq B$. Dále kružnice určená body A, C, P protíná přímku AD v bodě $R \neq A$ a kružnice určená body B, D, Q protíná přímku BC v bodě $S \neq B$. Dokažte, že body A, B, S, R leží na jedné kružnici.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Najdi všechny funkce¹ $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ splňující následující rovnost pro všechna $m, n \in \mathbb{Z}^+$:

$$f^{f(m)}(n) + n = f^m(n) + f(n).$$

¹Horní index u funkce f značí skládání, takže např. $f^3(x) = f(f(f(x)))$.

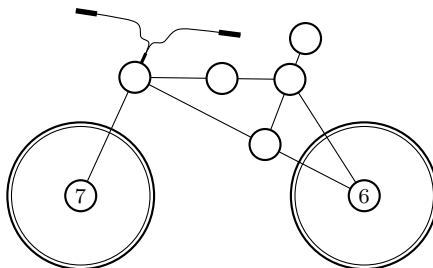
Cyklovýlet

3. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

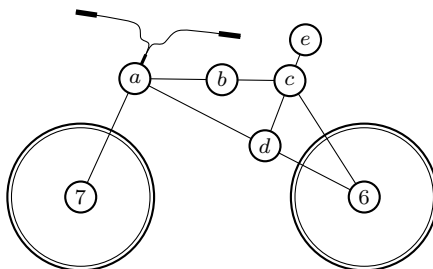
Úloha 1.

Anička má na svém jízdním kole matematickou hádanku, aby zabavila přihlízející. Ondra ji právě viděl projet kolem a chce hádanku vyluštit. Musí do každého volného políčka doplnit jedno z čísel 1 až 5 (přičemž se nesmí opakovat) tak, aby políčka na každé z pěti příemek měla stejný součet. Ukažte Ondrovi řešení.



ŘEŠENÍ:

Označme si prázdná políčka písmeny tak, jako je na obrázku:



Nyní sestavíme několik rovnic, pomocí kterých hádanku vyřešíme. Políčka na každé z příemek mají dávat stejný součet, má tedy platit

$$7 + a = a + d + 6,$$

odkud dostáváme $d = 1$. Stejně tak má být

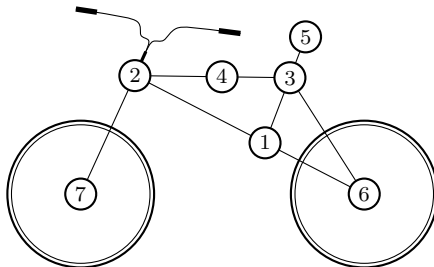
$$6 + c = c + d + e,$$

$$6 = d + e,$$

kde po dosazení d získáváme $e = 5$. Zbývá zjistit, která z čísel 2, 3, 4 patří neznámým a, b, c . Tyto neznámé spolu leží na jedné přímce, proto součet, kterému se mají čísla na přímkách rovnat, je $2 + 3 + 4 = 9$. Díky tomu už dokážeme dopočítat zbytek:

$$\begin{aligned}7 + a &= 9, \\ c + d + e &= 9.\end{aligned}$$

Z první rovnice dostáváme $a = 2$, z druhé po dosazení d, e máme $c = 3$. Pro b zbývá číslo 4. Zjistili jsme, že hádanka má následující a zároveň i jediné řešení:



POZNÁMKY:

Téměř všechna řešení byla správná. Někteří odevzdali pouze obrázek, jiní popsali i postup, jak na čísla přijít. (Markéta Honsejková)

Úloha 2.

Pro která reálná nenulová x, y, z, w je splněna soustava rovnic:

$$x = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right), \quad w = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)?$$

ŘEŠENÍ:

Soustava rovnic je cyklická, to znamená, že při cyklické záměně proměnných ($x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow w \rightarrow x$) dostaneme opět tu samou soustavu. BÚNO si tedy můžeme zvolit x jako největší proměnnou. Budeme nejprve uvažovat kladná čísla, protože si můžeme všimnout, že pokud jedna proměnná je kladná, jsou kladné i ostatní.

Naším cílem teď bude pomocí nerovností ukázat, že si jsou všechny proměnné rovny. Když je tedy x největší, platí $2x = y + \frac{1}{y}$ a zároveň $x \geq y$, takže $x \leq \frac{1}{y}$, z čehož máme $xy \leq 1$. Také $2w = x + \frac{1}{x}$ a $w \leq x$, takže $w \geq \frac{1}{x}$, $wx \geq 1$. Z $wx \geq 1$ platí, že $x \geq 1$, známe $xy \leq 1$, takže i $y \leq 1$ a $2y \leq 2$. Zároveň $2y = z + \frac{1}{z}$. Z AG nerovnosti platí $z + \frac{1}{z} \geq 2$, takže dostáváme

$$2 \leq z + \frac{1}{z} = 2y \leq 2.$$

Tady už je vidět, že musí platit rovnost. Pak už jen dopočítáme řešení $x = y = z = w = 1$.

Jak jsme na začátku řekli, soustavu jsme řešili pro kladná čísla. Co kdyby ale byla nějaká proměnná záporná? Všimněme si, že proměnné musí mít vždy stejné znaménko, protože pokud je jedna z nich záporná, jsou záporné i ostatní. Platí, že pokud je (x, y, z, w) řešením, je jím i $-(x, y, z, w) = (-x, -y, -z, -w)$. Nalézáme tak druhé řešení, a to $x = y = z = w = -1$. Nakonec dosadíme a ověříme, že $(1, 1, 1, 1)$ i $(-1, -1, -1, -1)$ jsou skutečně řešeními zadané soustavy.

POZNÁMKY:

Všechna řešení, která dorazila, byla správně.

(Lucka Zůnová)

Úloha 3.

Markét se chystá na cyklovýlet, ale když po dlouhé době vytáhla zámek na kolo, zjistila, že už si nepamatuje jeho čtyřmístný kód. Naštěstí má ale ráda čísla, a proto si pamatuje některé jejich vlastnosti. O tomto kódu $k = \overline{abcd}$ si pamatuje, že všechny jeho (ne nutně různé) cifry jsou liché, a také, že čísla $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ i $\overline{cd}$ dělí k . Jaké všechny kombinace musí Markét vyzkoušet? Všechna čísla jsou brána v desítkové soustavě.

ŘEŠENÍ:

Mějme $k = \overline{abcd}$, neboli $k = 1000a + 100b + 10c + d$, kde $\{a, b, c, d\} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Navíc ze zadání víme, že $\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{bc} = 10b + c$, $\overline{cd} = 10c + d$ jsou děliteli k .

Začneme tím, že prozkoumáme vztah $\overline{ab} \mid k$. Po rozepsání k a $\overline{ab}$ dostáváme

$$\overline{ab} \mid k \iff (10a + b) \mid (1000a + 100b + 10c + d) = 100(10a + b) + (10c + d).$$

Vidíme, že nutně musí platit $(10a + b) \mid (10c + d) \iff \overline{ab} \mid \overline{cd}$. Tím pádem existuje nějaké přirozené x takové, že $\overline{ab} \cdot x = \overline{cd}$.

Pokračujeme podobně prozkoumáním vztahu $\overline{cd} \mid k$. Dostáváme

$$\overline{cd} \mid k \iff (10c + d) \mid 100 \cdot (10a + b) + (10c + d) \implies (10c + d) \mid 100 \cdot (10a + b).$$

Tedy musí existovat nějaké přirozené y takové, že $\overline{cd} \cdot y = 100 \cdot \overline{ab}$. Dosazením za $\overline{cd}$ z dříve získané rovnice dostáváme $\overline{ab} \cdot x \cdot y = 100 \cdot \overline{ab} \implies xy = 100$.

Jaká by mohla být hodnota proměnné x ? Víme, že se jedná o dělitele stovky, musí to tedy rozhodně být hodnota z množiny $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$. Vzhledem k tomu, že $\overline{ab} \cdot x = \overline{cd}$ platí pro dvojmístná $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, proměnná x jistě nemůže být větší rovna 10. Navíc x musí být liché, protože kdyby bylo sudé, i součin $\overline{cd}$ by byl sudý, což neodpovídá zadání. Stačí nám proto uvažovat dvě varianty a to $x = 1$, $x = 5$.

Pro $x = 1$ dostáváme $k = \overline{abab}$. Zde platí $\overline{ab} \mid k$, jelikož $k = \overline{ab} \cdot 101$. Zároveň platí i $\overline{cd} \mid k$, jelikož $\overline{cd} = \overline{ab}$. Stačí nám otestovat, kdy platí podmínka $\overline{bc} \mid k \implies \overline{ba} \mid \overline{ab} \cdot 101$. Jelikož 101 je prvočíslo, jistě platí, že $\overline{ba}$ a 101 jsou nesoudělná čísla. Nutně proto platí $\overline{ba} \mid \overline{ab}$. Jaké dvojice čísel tomu vyhovují? Kromě triviálních případů $\overline{ba} = \overline{ab}$, který vede ke $k = \overline{aaaa}$ žádné další možnosti nemáme (jednalo by se pak alespoň o trojnásobek, tedy $b \leq 33$ a těchto několik zbývajících možností se dá snadno zkontrolovat a vyvrátit). Při $x = 1$ tedy dostáváme řešení $k \in \{1111, 3333, 5555, 7777, 9999\}$.

Pro $x = 5$ pak nutně $d = 5$, tedy $k = \overline{abc5}$ a samozřejmě $\overline{ab} \mid \overline{c5}$. Jaké dvojice čísel $\overline{ab}$, $\overline{c5}$ to splňují? Kdyby $\overline{ab}$ bylo větší než 19, platilo by $\overline{bc} = 5 \cdot \overline{ab} \geq 5 \cdot 20 = 100$, což je spor. Stačí nám proto zkontrolovat dvojice (11, 55), (13, 65), (15, 75), (17, 85), (19, 95).

Pro $\overline{ab} \in \{13, 17\}$ by muselo být c sudé, ty tedy nevyhovují. Stačí nám zkontrolovat, jestli v případech $\overline{ab} \in \{11, 15, 19\}$ platí podmínka $\overline{bc} \mid k$. V prvním případě je podíl $1155/15 = 77$ celý, v druhém případě $1575/57 = 27,63$ ne a ve třetím případě $1995/99 = 20,15$ také ne. Dostáváme zde tedy jediné řešení $k = 1155$.

Pro provedení kontroly už můžeme jasně říct, že Markét stačí vyzkoušet kombinace

$$k \in \{1111, 3333, 5555, 7777, 9999, 1155\}.$$

POZNÁMKY:

Většina řešitelů postupovala stejně jako ve vzoráku. V některých řešeních začalo rozebírání dříve, místo dalšího omezování případů, což ale převážně (ale s větší prací) také vedlo ke správnému řešení. (Lenka Poljaková)

Úloha 4.

Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic pro a, b, c, d :

$$(b + c + d)^{2026} = 3a,$$

$$(c + d + a)^{2026} = 3b,$$

$$(d + a + b)^{2026} = 3c,$$

$$(a + b + c)^{2026} = 3d.$$

ŘEŠENÍ:

Díky tomu, že na levé straně jsou vždy sudé mocniny, tak $a, b, c, d \geq 0$. Protože rovnice jsou cyklické, můžeme si říct, že a je největší z čísel. Z nerovnosti $a \geq b$ dostaneme, že $3a \geq 3b$ a tedy

$$(b + c + d)^{2026} = 3a \geq 3b = (a + c + d)^{2026}.$$

Protože $(b + c + d) \geq 0$ a $(a + c + d) \geq 0$, můžeme odmocnit a po odmocnění dostaneme $(b + c + d) \geq (a + c + d)$. Po odečtení $(b + c)$ nám vyjde $b \geq a$ a tedy $a = b$. Poté, protože b je rovné největšímu z a, b, c, d , bude $b \geq c$, z toho obdobným postupem dostaneme $b = c$ a pokud to zopakujeme i pro c a d získáme $a = b = c = d$.

Tedy už nám stačí pouze vyřešit rovnici $(3a)^{2026} = 3a$. To si upravíme na $3a((3a)^{2025} - 1) = 0$, z toho už vidíme naše dvě řešení $a = b = c = d = 0$ a $a = b = c = d = \frac{1}{3}$. Pokud obě tyto hodnoty dosadíme, zjistíme, že rovnosti ze zadání platí.

POZNÁMKY:

Valná většina řešení postupovala podobně jako vzorové řešení a skoro všechny byla správně.

(Lukáš Trojan)

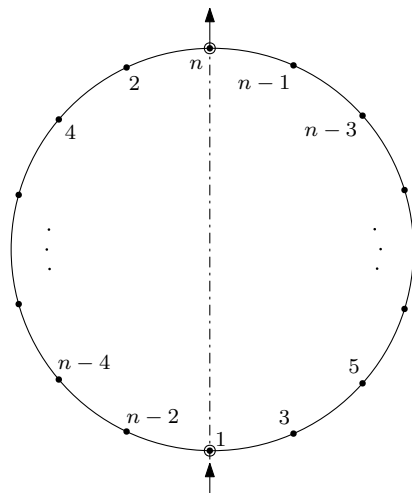
Úloha 5.

Petr jel na výlet k prarodičům a našel u nich na půdě starou cyklickou deskovku. Hrací deska je tvořena očíslovanými políčky ležícími na kružnici. Políček je dohromady $n \geq 2$ a jsou v nějakém pořadí očíslována 1 až n . Petr může na libovolné políčko umístit figurku. Nyní kdykoliv se nachází na políčku s číslem i , posune se o i políček dál ve směru hodinových ručiček. Petr vyhraje, pokud na začátku umístí figurku tak, že po nějakém počtu kroků navštíví všech n políček. Pro která n existuje takové očíslování desky, že Petr může vyhrát?

ŘEŠENÍ:

Dokážeme, že to jde pouze pro sudá n . Pro ty existuje hned několik konstrukcí, jak čísla na kružnici umístit. Nejprve si musíme uvědomit, že skončit máme na políčku s číslem n . To vede samo na sebe, takže pokud bychom na něj skočili dříve, ocitneme se v nekonečném cyklu a na žádné další nové políčko už nespočítáme.

Číslo n dáme na 12. hodinu a číslo 1 na 6. hodinu, tedy přímo naproti. Poté všechna sudá čísla sestupně umístíme ve směru hodinových ručiček mezi 1 a n (při standardním rozložení nalevo), zatímco všechna lichá čísla umístíme vzestupně od 1 proti směru hodinových ručiček (napravo).



A proč to funguje? Čísla jsme si vlastně rozdělili do dvojic se součtem $n+1$. Z počátečního políčka skočíme na $n-2$. Poté si další skok můžeme představit jako skok o dva proti směru hodinových ručiček, což nás umístí na trojku, z které se posuneme na pole o jedno po směru hodinových ručiček od $n-2$. Takto vždy projdeme dvojici, a protože součet dvojic je $n+1$, posuneme se na další sudé číslo. Proiterujeme až do dvojčky 2 a $n-1$, a jelikož $n-1$ leží o jedno pole po směru hodinových ručiček od n , tak se konečně dostaneme do n . Tímto jsme prošli všechna políčka.

Nyní si ukážeme, že pro lichá n takové očíslování neexistuje. Opět využijeme úvahy, že máme skončit na políčku s číslem n . Pokud chceme vyhrát, musíme předtím projít všechna ostatní pole. V tom případě ujdeme před vstupem na pole n přesně $1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$ kroků, kde za jeden krok počítáme jedno posunutí se o políčko po směru hodinových ručiček. Pro lichá n je toto číslo ovšem násobkem n , tedy jsme udělali několik koleček kolem hrací plochy a skončili tam, kde jsme začali. To je problém, protože jsme zatím neskočili na n a už se na něj nikdy nedostaneme, jelikož skákání je deterministické – jakmile se dostaneme podruhé na pole, které jsme už navštívili, skončíme v cyklu.

POZNÁMKY:

Naprostá většina řešitelů si s úlohou poradila, některé popisy konstrukce byly trochu zmatečné, ale body jsem většinou nestrhával. (Mára Valkovič)

Úloha 6.

Mějme reálná čísla a, b, c , pro která platí $a+b+c=1$. Dokažte, že

$$3(a+bc)^2(b+ca)^2+3(b+ca)^2(c+ab)^2+3(c+ab)^2(a+bc)^2 \geq 4(a+bc)(b+ca)(c+ab).$$

ŘEŠENÍ:

Provedeme několik ekvivalentních úprav dokazované nerovnosti, abychom ji dostali do tvaru, ve kterém bude důkaz jednoduchý.

Nejprve si upravme výrazy typu $a+bc$ pomocí $a+b+c=1$ na:

$$a+bc=1-b-c+bc=(1-b)(1-c),$$

$$b+ca=1-a-c+ca=(1-a)(1-c),$$

$$c+ab=1-a-b+ab=(1-a)(1-b),$$

odkud bude dokazovaná nerovnost po vytknutí a drobných úpravách vypadat takto:

$$3(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2((1-c)^2 + (1-a)^2 + (1-b)^2) \geq 4(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2.$$

Všimneme si stejných nezáporných výrazů na obou stranách: $(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2$. Pokud je tento výraz roven 0, nerovnost triviálně platí, jinak jím můžeme dělit (nebo převést vše nalevo, vytknout ho a ignorovat ho, protože je kladný). Po vydělení dostaneme:

$$3((1-c)^2 + (1-a)^2 + (1-b)^2) \geq 4,$$

což ještě upravíme (roznásobením, použitím $a+b+c=1$ a přepsáním):

$$\begin{aligned} 3(3-2(a+b+c)+a^2+b^2+c^2) &\geq 4, \\ (1+a^2+b^2+c^2) &\geq 4, \\ 3(a^2+b^2+c^2) &\geq 1. \end{aligned}$$

Tato nerovnost je už přímo známá Cauchyho–Schwarzova nerovnost pro trojčky (a, b, c) a $(1, 1, 1)$, explicitněji takto:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1) = 1,$$

tedy jistě platí a s ní i dokazovaná nerovnost.

POZNÁMKY:

Většina řešení postupovala podobně jako vzorové řešení, jen s různými přeznačeními a občasným nahrazením Cauchy–Schwarze AK nerovností nebo třeba hezkými úpravami na čtverce.

(Bára Klusáková)

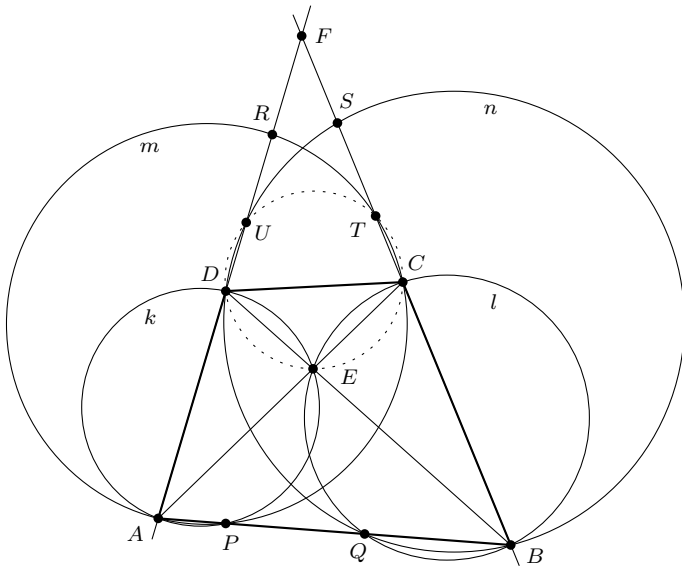
Úloha 7.

Máme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ takový, že AD není rovnoběžná s BC . Jeho úhlopříčky se protínají v bodě E . Kružnice určená body A, D, E protíná přímkou AB v bodě $P \neq A$ a kružnice určená body B, C, E protíná přímkou AB v bodě $Q \neq B$. Dále kružnice určená body A, C, P protíná přímkou AD v bodě $R \neq A$ a kružnice určená body B, D, Q protíná přímkou BC v bodě $S \neq B$. Dokažte, že body A, B, S, R leží na jedné kružnici.

ŘEŠENÍ:

Úlohu budeme řešit pomocí mocnosti bodu ke kružnici.¹ Jelikož jsou strany AD a BC různoběžné, protínají se v nějakém bodě, označme si ho F . Existují dvě možnosti, kde může F ležet. Podle konfigurace původního čtyřúhelníku $ABCD$ leží F buď na polopřímkách AD a BC , nebo na polopřímkách DA a CB . Protože však úlohu řešíme mocnostmi, není nutné řešit konfigurace, oba případy se budou chovat stejně. Dále si označme kružnici určenou body A, D, E jako k , kružnici určenou body B, C, E jako l , kružnici určenou body A, C, P jako m a kružnici určenou body B, D, Q jako n . Nakonec označme T druhý průsečík kružnice m s přímkou BC a U druhý průsečík kružnice n s přímkou AD .

¹O mocnosti si můžete přečíst zde: <https://prase.cz/library/MocnostVH/MocnostVH.pdf>



Kružnice k a m se protínají v bodech A a P , takže přímka procházející těmito body je jejich chordálou. Všechny body, které na ní leží, mají stejnou mocnost ke kružnicím k a m . Z toho plyne, že bod B má stejnou mocnost k oběma kružnicím, a tak platí rovnost $|BE||BD| = |BC||BT|$. Odtud vyplývá, že body D, E, C, T leží na téže kružnici, označme si ji o . Obdobně přímka BQ je chordálou kružnic l a n , a proto bod A má vůči těmto kružnicím stejnou mocnost. Platí tedy rovnost $|AE||AC| = |AD||AU|$, z čehož plyne, že body U, D, E, C leží na jedné kružnici, takže bod U leží na o .

Body U, D, C, T leží všechny na téže kružnici, a proto $|FU||FD| = |FT||FC|$. Navíc z mocnosti bodu F ke kružnici m platí $|FR||FA| = |FT||FC|$ a z mocnosti bodu F ke kružnici n zas $|FU||FD| = |FS||FB|$. Dohromady dostáváme $|FR||FA| = |FT||FC| = |FU||FD| = |FS||FB|$. Z toho již plyne $|FR||FA| = |FS||FB|$, a tudíž body A, B, S, R leží na jedné kružnici, jak jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů řešila úlohu správně přes mocnost, případně s menšími úpravami. Za taková řešení jsem udělovala plný počet bodů. Našli se řešitelé, kteří úlohu řešili přes počítání úhlů. V takovém případě je potřeba si pohlídat, že to nerozbijí konfigurace. Pokud u nějakého řešení takový problém nastal, strhávala jsem za to 1 bod.

(Tereza Matějková)

Úloha 8.

Najdi všechny funkce² $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ splňující následující rovnost pro všechna $m, n \in \mathbb{Z}^+$:

$$f^{f(m)}(n) + n = f^m(n) + f(n).$$

²Horní index u funkce f značí skládání, takže např. $f^3(x) = f(f(f(x)))$.

ŘEŠENÍ:

Nechť f je nějaká funkce splňující podmínky ze zadání. Nejprve ukážeme, že pro všechna n platí $f(n) \geq n$. Předtím ale ještě indukci ukážeme, že pro všechna přirozená k, n platí

$$f^{f^k(1)}(n) = f(n) + k(f(n) - n).$$

Pro $k = 1$ se jedná o jednoduchou úpravu zadání po dosazení $m = 1$. Předpokládejme, že toto platí pro nějaké k , dosazením $m = f^k(1)$ do zadání a využitím indukčního předpokladu získáme

$$\begin{aligned} f^{f^{k+1}(1)}(n) + n = f^{f^k(1)}(n) + f(n) &\implies f^{f^{k+1}(1)}(n) + n = f(n) + k(f(n) - n) + f(n), \\ &\implies f^{f^{k+1}(1)}(n) = f(n) + (k+1)(f(n) - n), \end{aligned}$$

což jsme chtěli. Můžeme si ale všimnout, že pokud by pro nějaké a platilo, že $f(a) - a < 0$, tak volbou dostatečně velkého k bychom měli

$$k(f(a) - a) < -f(a) \implies 0 < f^{f^k(1)}(a) = f(a) + k(f(a) - a) < 0,$$

kde nerovnost $0 < f^{f^k(1)}(a)$ plyne z toho, že naše funkce je do kladných celých čísel. To je ale zjevný spor, tedy $f(a) - a \geq 0 \implies f(a) \geq a$ pro všechna a .

Dále se podíváme na případ, kde platí $f(a) = a$ pro nějaké a . Pak po dosazení $m = a$ do zadání dostaneme

$$f^a(n) + n = f^a(n) + f(n) \implies f(n) = n$$

pro všechna n . Máme tak první řešení $f(n) = n$ pro každé n . Předpokládejme dále, že pro každé n je $f(n) \neq n$, tedy $f(n) \geq n + 1$.

Zvolme a takové, že $f(a) - a$ je nejmenší možné. (To umíme, protože $f(n) - n$ nabývá pouze celých čísel a zároveň už máme dokázané, že $f(n) \geq n + 1$, tj. $f(n) - n$ je zdola omezené.) Pak ale $f(n) - n \geq f(a) - a$ pro každé n . Po dosazení $n = a$ do zadání získáme

$$f(a) - a = f^{f(m)}(a) - f^m(a) = \sum_{i=m}^{f(m)-1} (f(f^i(a)) - f^i(a)) \geq \sum_{i=m}^{f(m)-1} (f(a) - a) = (f(m) - m)(f(a) - a).$$

(Druhá rovnost platí, protože se napravo jedná o teleskopický součet a následná nerovnost využívá $f(n) - n \geq f(a) - a$ pro $n = f^i(a)$ na každý člen součtu.) Protože $f(a) \geq a + 1$, tak $f(a) - a \geq 1$, tedy můžeme výrazem $f(a) - a$ nerovnost vydělit, čímž získáme $f(m) - m \leq 1 \implies f(m) \leq m + 1$. Dohromady s $f(m) \geq m + 1$ máme $f(m) = m + 1$ pro všechna m .

Ještě zbývá ověřit, že oba kandidáti na řešení $f(n) = n$ a $f(n) = n + 1$ vyhovují zadání. V prvním případě vyjde na obou stranách rovnosti ze zadání $2n$ a v druhém $2n + m + 1$, tedy se opravdu jedná o řešení.

POZNÁMKY:

V řešení byly v podstatě dvě obtížnější části, ukázání, že $f(n) \geq n$, a vyřešení případu $f(n) \neq n$. Většina řešení se s první částí popasovala velmi podobně jako to vzorové. Nemálo řešení v druhé části nejprve zjistilo hodnotu $f(1)$ a poté už jednoduchou indukcí ukázala, že $f(n) = n + 1$.

(David Hromádka)