

Středy

2. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. LISTOPADU 2025

ÚLOHA 1. (3 BODY)
V rovině jsou vyznačeny vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Ondra má nepopsané pravítko, takže pomocí něj může jen narýsovat přímkou procházející dvěma různými vyznačenými body. Navíc může vyznačit průsečík dvou narýsovaných různoběžných přímek. Poradte mu, jak sestavit střed pětiúhelníku.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Mějme trojúhelník ABC s nejdelší stranou BC . Na straně BC si vyznačíme body P a Q tak, že $|BP| = |BA|$ a $|CQ| = |CA|$. Dokažte, že střed kružnice vepsané ABC a střed kružnice opsané PQA splývají.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Nechť v trojúhelníku ABC bod D různý od A leží na ose úhlu BAC . Buďte O , O_1 , O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC , ABD , ACD . Dokažte, že $|OO_1| = |OO_2|$.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Je dán pravoúhlý trojúhelník a tři kružnice, které mají středy v jeho vrcholech a mají každá s každou vnější dotyk. Dokažte, že střed kružnice, která má se všemi třemi danými kružnicemi vnitřní dotyk, leží na opsané kružnici tohoto trojúhelníku.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Mějme v trojúhelníku ABC střed I kružnice vepsané, bod dotyku D kružnice vepsané se stranou BC a střed M strany BC . Dokažte, že přímka MI prochází středem úsečky AD .

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Buď ABC trojúhelník se středem kružnice vepsané I . Buďte P , Q , R po řadě průsečíky přímek AI , BI , CI s kružnicí opsanou k ABC . Dokažte, že

$$\frac{|AI| \cdot |AP|}{|AB| \cdot |CA|} + \frac{|BI| \cdot |BQ|}{|BC| \cdot |AB|} + \frac{|CI| \cdot |CR|}{|CA| \cdot |BC|} = 2.$$

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Jsou dány trojúhelník ABC a čtverec $PQRS$ tak, že body P , Q leží na straně BC , bod R leží na CA a bod S leží na AB . Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží uvnitř $PQRS$.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Matěj má rovinu a osoúhlítko. S pomocí osoúhlítka lze provádět následující dvě operace:

- Zvolit tři vyznačené body X , Y , Z , které neleží na jedné přímce, a nakreslit osu vnitřního úhlu XYZ .
- Vyznačit průsečík dvou různoběžných nakreslených přímek.

Na začátku jsou v rovině vyznačeny pouze vrcholy nedegenerovaného trojúhelníku ABC . Dokažte, že Matěj dovede v konečné mnoha krocích pouze používáním osoúhlítka vyznačit střed kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Středy

2. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

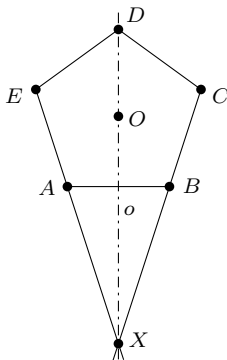
Úloha 1.

V rovině jsou vyznačeny vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Ondra má nepopsané pravítko, takže pomocí něj může jen narýsovat přímku procházející dvěma různými vyznačenými body. Navíc může vyznačit průsečík dvou narýsovaných různoběžných přímek. Poradte mu, jak sestrojít střed pětiúhelníku.

ŘEŠENÍ:

Víme, že střed pětiúhelníku je i středem kružnice mu opsané. Stačí tedy najít osu dvou stran pětiúhelníku a následně jejich průsečík, který bude hledaným středem.

Ukažme konstrukci osy o pro stranu AB . Bod D bude určitě ležet na o . Dále si zkonstruujeme bod X jako průsečík přímek BC a AE , čímž získáme rovnoramenný trojúhelník ABX se základnou AB , tedy X také musí ležet na o . Přímka DX je tedy ona hledaná osa o . Analogicky zkonstruujeme osu i pro libovolnou jinou hranu, čímž jsme úlohu vyřešili.



POZNÁMKY:

Většina řešení byla správně.

(Vojta „Dlážka“ Gadurek)

Úloha 2.

Mějme trojúhelník ABC s nejdelší stranou BC . Na straně BC si vyznačme body P a Q tak, že $|BP| = |BA|$ a $|CQ| = |CA|$. Dokažte, že střed kružnice vepsané ABC a střed kružnice opsané PQA splývají.

ŘEŠENÍ:

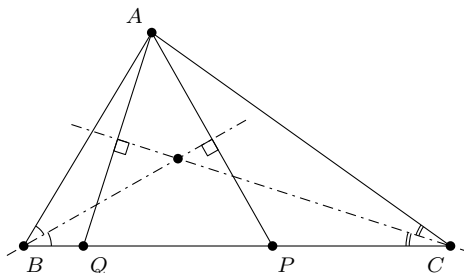
Připomeňme si, že střed kružnice vepsané je průsečíkem os úhlů. Podobně, střed kružnice opsané je průsečíkem os stran. Navíc si rozmysleme, že k určení obou středů nám stačí vždy dvě ze tří os, jelikož třetí osa prochází již známým průsečíkem první dvojice os.

Zadání nám prozrazuje, že body P, Q splňují rovnosti $|BP| = |BA|$ a $|CQ| = |CA|$. Z těchto rovností můžeme snadno usoudit, že trojúhelníky ABP a ACQ jsou rovnoramenné postupně se základnami AP a AQ . Každý rovnoramenný trojúhelník je osově symetrický podle osy své základny. Jinými slovy, v rovnoramenném trojúhelníku splývá osa základny s osou úhlu u hlavního vrcholu, což je pro naše řešení klíčovým faktem.

Podívejme se na osy úhlů $|\angle ABP| = |\angle ABC|$ a $|\angle ACQ| = |\angle ACB|$. Jedná se o osy úhlů trojúhelníku ABC , jejich průsečík je tedy jistě středem kružnice vepsané tohoto trojúhelníku. Podobně se podívejme na osy stran AP a AQ , které se dříve zmíněnými osami úhlů splývají, jak jsme si vysvětlili v předchozím odstavci. Jedná se o osy stran trojúhelníku PQA , jejich průsečík je tedy jistě středem kružnice opsané tohoto trojúhelníku.

Ukázali jsme, že průsečík daných dvou přímek musí být jak středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC , tak středem kružnice opsané trojúhelníku PQA . Tyto body tedy splývají.

Dostáváme kýžený závěr a to, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC splývá se středem kružnice opsané trojúhelníku PQA .



POZNÁMKY:

Většina řešitelů postupovala uvedeným způsobem. Další oblíbený postup byl takový, kde se pro střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC ukázalo, že má stejnou vzdálenost ke všem vrcholům A, Q, P , což z daného bodu dělá zároveň střed kružnice opsané trojúhelníku AQP .

(Lenka Poljaková)

Úloha 3.

Nechť v trojúhelníku ABC bod D různý od A leží na ose úhlu BAC . Buďte O, O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, ABD, ACD . Dokažte, že $|OO_1| = |OO_2|$.

ŘEŠENÍ:

Tuto úlohu řešíme pro danou konfiguraci z obrázku. Ostatní konfigurace se dokazují obdobně jako tato. Velikost úhlu $|\angle BAC|$ označíme 2α , pak $|\angle BAD| = |\angle CAD| = \alpha$. Po řadě označíme středy hran AB, AC a AD jako S_{AB}, S_{AC} a S_{AD} .

Protože $S_{AB}O_1$ a $S_{AD}O_1$ jsou osy stran AB a AD , tak platí

$$|\angle AS_{AB}O_1| = |\angle AS_{AD}O_1| = 90^\circ.$$

Tedy body A, S_{AB}, S_{AD} a O_1 leží na kružnici a úhly $\angle S_{AD}O_1S_{AB}$ a $\angle S_{AD}AS_{AB}$ jsou obvodové, tedy

$$|\angle S_{AD}O_1S_{AB}| = |\angle S_{AD}AS_{AB}| = \alpha.$$

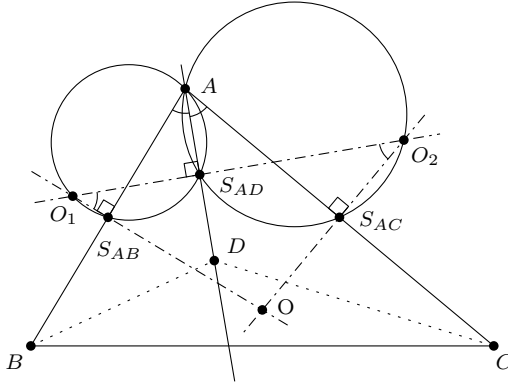
Obdobně body A , S_{AC} , S_{AD} a O_2 leží na kružnici a úhly $\angle S_{AD}O_2S_{AC}$ a $\angle S_{AD}AS_{AC}$ jsou obvodové, takže

$$|\angle S_{AD}O_2S_{AC}| = |\angle S_{AD}AS_{AC}| = \alpha.$$

Body O_1 , S_{AD} a O_2 leží na ose úsečky AD . Obdobně body O_1 , S_{AB} a O leží na ose úsečky AB a body O_2 , S_{AC} a O leží na ose úsečky AC . Protože

$$|O_1O_2O| = |\angle S_{AD}O_2S_{AC}| = \alpha = |\angle S_{AD}O_1S_{AB}| = |\angle O_2O_1O|,$$

tak trojúhelník OO_1O_2 je rovnoramenný a $|OO_1| = |OO_2|$.



POZNÁMKY:

Většina řešitelů dokázala $|OO_1| = |OO_2|$ tím, že ukázala, že trojúhelník OO_1O_2 je rovnoramenný. K důkazu rovnoramennosti hodně řešitelů pouze úhlilo, další oblíbený postup byl přes podobnosti trojúhelníků.
(Petr Hladík)

Úloha 4.

Je dán pravouhlý trojúhelník a tři kružnice, které mají středy v jeho vrcholech a mají každá s každou vnější dotyk. Dokažte, že střed kružnice, která má se všemi třemi danými kružnicemi vnitřní dotyk, leží na opsané kružnici tohoto trojúhelníku.

ŘEŠENÍ:

Označme vrcholy zadaného trojúhelníku A, B, C tak, že úhel u vrcholu A je pravý. Dále necht kružnice se středy ve vrcholech A, B, C mají postupně poloměry r_a, r_b, r_c . Konečně označme střed úsečky BC jako S_{BC} a obraz vrcholu A ve středové souměrnosti se středem S_{BC} , tedy doplnění trojúhelníku ABC na obdélník, jako S . Ukážeme, že S je středem zkoumané kružnice.

Platí, že kružnice s vnějším dotykem mají vzdálenost středů rovnou součtu svých poloměrů, tedy $|AB| = r_a + r_b$, $|BC| = r_b + r_c$, $|AC| = r_a + r_c$. V případě kružnic s vnitřním dotykem je poloměr větší kružnice roven součtu poloměru menší kružnice a vzdálenosti jejich středů. Díky tomu, že $ABSC$ je obdélník, ovšem platí

$$|SA| + r_a = |BC| + r_a = r_a + r_b + r_c,$$

$$|SB| + r_b = |AC| + r_b = r_a + r_b + r_c,$$

$$|SC| + r_c = |AB| + r_c = r_a + r_b + r_c,$$

čímž jsme ukázali, že kružnice se středem S a poloměrem $r_a + r_b + r_c$ má vnitřní dotyk se třemi zadanými kružnicemi. Jelikož zkoumaná kružnice existuje právě jedna (viz Apolloniovy úlohy), stačí

Většina řešitelů si s úlohou hravě poradila. Pochvalu zaslouží ti, již zdůvodnili či alespoň zmínili, že kružnice ze zadání existuje právě jedna (ať už odkazem na Apolloniovy úlohy či například důkazem pomocí protínajících se hyperbol). (Štěpán Varhaník)

Mějme v trojúhelníku ABC střed I kružnice vepsané, bod dotyku D kružnice vepsané se stranou BC a střed M strany BC . Dokažte, že přímka MI prochází středem úsečky AD .

Označme E druhý průsečík přímky DI s kružnicí vepsanou $\triangle ABC$ a F bod dotyku kružnice připsané ke straně BC s přímkou BC . Dále si označme po řadě body dotyku kružnice připsané ke straně BC s polopřímkami AB a AC jako X a Y , podobně body dotyku kružnice vepsané se stranami AB a AC jako K a L .

$$|KX| = |AX| - |AK| = |AY| - |AL| = |LY|,$$

$$|BD| + |BF| = |CD| + |CF|,$$

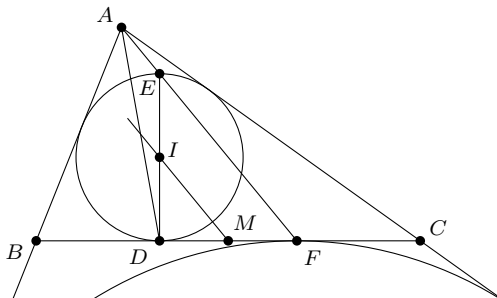
$$2|BD| = 2|CF|,$$

$$|BD| = |CF|.$$

$$|CF| + |FM| = |CM| = |BM| = |BD| + |DM| = |CF| + |DM|$$

4

Dále dokážeme, že body A, E, F leží na jedné přímce. Pokud přidáme tečnu ke kružnici vepsané $\triangle ABC$ procházející bodem E , bude rovnoběžná s přímkou BC (díky tomu, že je tečna kolmá na poloměr). Když dále využijeme stejnoolehlost se středem v bodě A a zobrazíme s její pomocí tečnu z bodu E na přímkou BC , tak se kružnice vepsaná trojúhelníku ABC zobrazí na kružnici připsanou k tomuto trojúhelníku ke straně BC . Zároveň se ale přenesou i průsečíky, tudíž bod E se zobrazí na bod F , což znamená, že body A, E, F leží na jedné přímce, přesně jak jsme chtěli ukázat.



Podívejme se dále na $\triangle DEF$. Bod M leží uprostřed strany DF a bod I uprostřed strany DE . To znamená, že úsečka MI je střední příčkou tohoto trojúhelníku, a proto $MI \parallel EF$ a tedy i $MI \parallel AF$. Protože M je střed DF a MI je rovnoběžná s AF , MI je střední příčka také v $\triangle DFA$ a tudíž půlí AD , přesně jak jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

Řešitelé ve většině postupovali stejně nebo podobně jako vzorové řešení. Někteří se úlohu rozhodli řešit analyticky a i to je navedlo na správné řešení. Sem tam se vyskytly drobné nedostatky, za které jsem ubírala částečné body. (Tereza Matějková)

Úloha 6.

Buď ABC trojúhelník se středem kružnice vepsané I . Buďte P, Q, R po řadě průsečíky přímek AI, BI, CI s kružnicí opsanou k ABC . Dokážte, že

$$\frac{|AI| \cdot |AP|}{|AB| \cdot |CA|} + \frac{|BI| \cdot |BQ|}{|BC| \cdot |AB|} + \frac{|CI| \cdot |CR|}{|CA| \cdot |BC|} = 2.$$

ŘEŠENÍ:

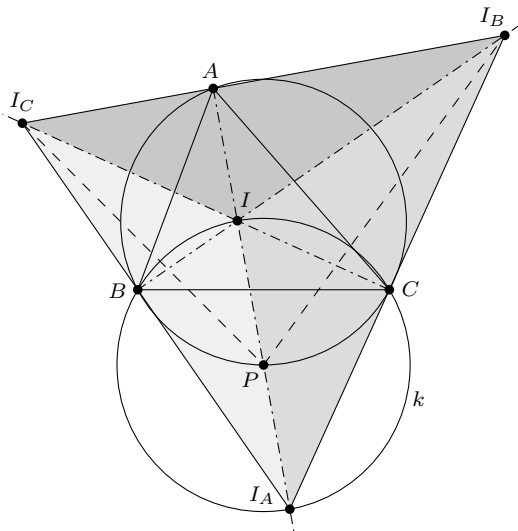
Víme, že body P, Q a R jsou Švrčkovy body, protože se jedná o průsečíky os úhlů s kružnicí opsanou. Označme I_A, I_B a I_C za středy kružnic připsaných trojúhelníku ABC .

Dokážeme si, že bod P je středem kružnice k opsané čtyřúhelníku $BICI_A$. Čtyřúhelník $BICI_A$ je tětiový, protože $\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90^\circ$, což víme díky tomu, že osa úhlu a osa jeho vedlejšího úhlu jsou na sebe kolmé. Jelikož je čtyřúhelník $ABPC$ tětiový, tak $\angle ABP + \angle ACP = 180^\circ$ a zároveň (pokud použijeme standardní označení úhlů α, β a γ) máme $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Protože P je Švrčkův bod, trojúhelník BPC je rovnoramenný, tedy $\angle CBP = \angle BCP = \frac{\alpha}{2}$ a odtud $\angle IBP = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Jestliže si průsečík BC a AP označíme X , tak si jednoduše vyúhlíme, že $\angle BXA = 180 - \beta - \frac{\alpha}{2}$. Z toho dostaneme $\angle BIP = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, tedy trojúhelník BIP je rovnoramenný. Díky tomu, že i BPC je rovnoramenný, je P středem kružnice k opsané čtyřúhelníku $IBI_A C$.

Když si bod B zobrazíme pomocí osové souměrnosti podle osy úhlu BAC , vznikne nám bod B' . Jestliže $AB \neq AC$, je B' druhým průsečíkem k s přímkou AC , protože přímka AC je podle této osy souměrná s AB a střed k , neboli bod P , leží na této ose. Pokud $|AB| = |AC|$, pak $\angle ICB = \angle IBA$, protože oba představují polovinu stejného úhlu, a tedy díky úsekovým úhlům je AB tečna

ke k a $B' = C$. V obou případech víme, že mocnost bodu A ke kružnici k je $|AB'| \cdot |AC| = |AB| \cdot |AC|$ a také $|AI| \cdot |AI_A|$, z čehož po úpravě dostaneme $\frac{|AI|}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{1}{|AI_A|}$. První člen výrazu na levé straně rovnice (a poté symetricky i ostatní) si tedy můžeme přepsat takto:

$$\frac{|AI| \cdot |AP|}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{|AP|}{|AI_A|}.$$



Protože $I_B I_C$ je kolmá na AI_A , můžeme místo délek $|AP|$ a $|AI_A|$ zkoumat poměr obsahů trojúhelníků $I_B I_C P$ a $I_B I_C I_A$. Označíme si $[XYZ]$ obsah trojúhelníku XYZ . Protože P je střed II_A , tak

$$[I_B I_C P] = [I_B I_C I] + \frac{1}{2}([I_B I_C I_A] - [I_B I_C I]) = [I_B I_C I] + \frac{1}{2}([I_A I_B I] + [I_C I_A I]).$$

Když stejný postup uděláme přes všechny tři zlomky, dostaneme dohromady v čitateli $2 [I_A I_B I_C]$, a jelikož je ve jmenovateli $[I_A I_B I_C]$, rovnost jsme tím dokázali.

POZNÁMKY:

Většina příslých řešení byla správná. Část řešitelů postupovala podobně jako vzorové řešení, část zvolila čistě analytické řešení a výsledek dopočítala. (Lukáš Trojan)

Úloha 7.

Jsou dány trojúhelník ABC a čtverec $PQRS$ tak, že body P, Q leží na straně BC , bod R leží na CA a bod S leží na AB . Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží uvnitř $PQRS$.

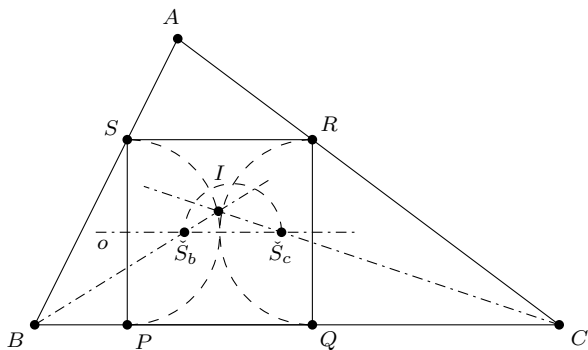
ŘEŠENÍ SE ŠVRČKOVÝMI BODY:

Pokud by bod P splýval s B nebo Q s C , získali bychom pravoúhlý trojúhelník s vepsaným čtvercem, u něhož by osa úhlu ze splývajícího bodu byla shodná s úhlopříčkou čtverce, a tedy by celá (a tudíž i vepsitě na ní) ležela ve čtverci. Předpokládejme tedy, že taková situace nenastala.

Sestrojme Švrčkovy body $\check{S}_b$, resp. $\check{S}_c$ trojúhelníků $\triangle BSP$, resp. $\triangle CRQ$. Tyto leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku $\triangle ABC$, na ose o stran SP a RQ a zároveň na kružnicích opsaných

trojúhelníkům $\triangle BSP$ a $\triangle CRQ$. Úhly u B a u C jsou ostré (jsou to úhly u přepony v pravoúhlých trojúhelnících), úhly $\angle P\hat{S}_bS$ a $\angle Q\hat{S}_cR$ jsou tedy tupé (z tětiových čtyřúhelníků). Švrčkovy body tak nutně leží postupně uvnitř Thaletových polokružnic nad SP a RQ , které se dotýkají ve středu čtverce. Pak body leží na o v pořadí $\hat{S}_b, \hat{S}_c$ (a nesplývají), zároveň to jsou vnitřní body úseček BI a CI .

Ze stejnolehlosti trojúhelníků BCI a $\hat{S}_b\hat{S}_cI$ máme $|\angle IBC| + |\angle ICB| = \frac{|\angle ABC|}{2} + \frac{|\angle ACB|}{2} < \frac{180^\circ}{2}$, tudíž je úhel $\hat{S}_bI\hat{S}_c$ tupý. I úhel $\hat{S}_bI\hat{S}_c$ je tudíž tupý a I tak leží ostře uvnitř Thaletovy kružnice nad $\hat{S}_b\hat{S}_c$. Ta má ovšem poloměr menší než je půlka strany čtverce, je tudíž celá uvnitř čtverce, a tím pádem leží uvnitř čtverce $PQRS$ i bod I . Čímž je důkaz dokončen.



ŘEŠENÍ PŘES VELIKOST KRUŽNICE VEPSANÉ:

Opět můžeme předpokládat, že body P, Q, B a C jsou různé. Označme délku strany čtverce jako x . Nejprve si uvědomme, že kružnice vepsaná trojúhelníku $\triangle ABC$ musí mít větší průměr než kružnice vepsaná čtverci $PQRS$. Ta je totiž celá uvnitř trojúhelníku $\triangle ABC$, přičemž se dotýká pouze strany BC . Označíme-li si poloměr kružnice vepsané jako ρ , musí tedy platit $2\rho > x$.

Nechť I je vepisť $\triangle ABC$. O bodu I víme, že vždy leží uvnitř trojúhelníku. Nyní vyloučíme, že by I mohlo ležet v některém z trojúhelníků $\triangle ASR, \triangle BSP, \triangle CQR$, čímž dokážeme, že opravdu leží uvnitř čtverce. Podívejme se například na trojúhelník $\triangle BSP$. Všimněme si, že se celý nachází v pásu rovnoběžek PQ a SR a to tak, že v polorovině SPB neleží kromě něj žádný bod trojúhelníku $\triangle ABC$. Pro spor nechť bod I leží uvnitř tohoto trojúhelníku. Jistě pak je alespoň od jedné ze zmíněných rovnoběžek vzdálen nanejvýš $\frac{x}{2}$. Pokud si však nyní vezmeme průměr kružnice vepsané rovnoběžný s úsečkou SP , označme jej XY , víme, že $|XI| = |IY| > \frac{x}{2}$. Tedy alespoň jeden z bodů X, Y bude ležet mimo pás rovnoběžek, ve stejné polorovině jako $\triangle BSP$, tedy i mimo trojúhelník $\triangle ABC$. Získáváme tedy spor.

Analogicky ukážeme, že bod I nemůže ležet ani v trojúhelníku $\triangle CRQ$. Pro trojúhelník $\triangle ASR$ si musíme uvědomit, že úhly u B a C v původním trojúhelníku musí být ostré (viz argument výše), z rovnoběžnosti jsou tedy i odpovídající úhly u S a R ostré a lze použít analogický argument, neboť bod A a tak i celý trojúhelník $\triangle ASR$ leží uvnitř pásu rovnoběžek PS a QR .

Opravdu tedy I leží uvnitř čtverce $PQRS$.

POZNÁMKY:

Nemálo řešitelů postupovalo podobně jako druhé vzorové řešení. Někteří se snažili dokazovat, že bod I neleží v žádném ze tří trojúhelníků podobným argumentem, ale to, že by poloměr menší roven $\frac{x}{2}$ vadil, buď odmávali, nebo nedokázali vůbec, za což jsem strhávala body. Hrůza řešitelů bušila úlohu analyticky, nad čímž jsem hořce plakala a udělovala záporné imaginární body.

(Adéla Karolína „Áda“ Záchková)

Úloha 8.

Matěj má rovinu a osoúhlítko. S pomocí osoúhlítko lze provádět následující dvě operace:

- Zvolit tři vyznačené body X, Y, Z , které neleží na jedné přímce, a nakreslit osu vnitřního úhlu XYZ .
- Vyznačit průsečík dvou různoběžných nakreslených přímek.

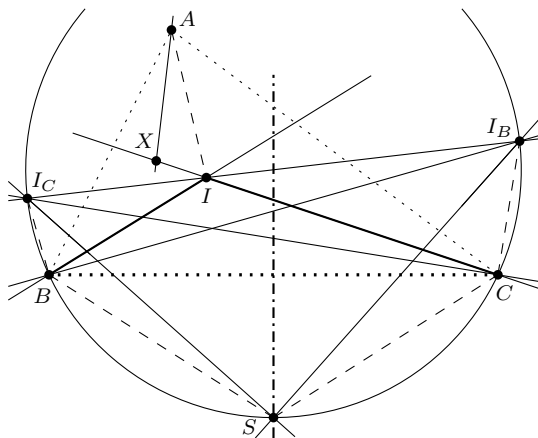
Na začátku jsou v rovině vyznačeny pouze vrcholy nede degenerovaného trojúhelníku ABC . Dokažte, že Matěj dovede v konečně mnoha krocích pouze používáním osoúhlítko vyznačit střed kružnice opsané trojúhelníku ABC .

ŘEŠENÍ:

Ukážeme, jak zkonstruovat osu libovolné strany trojúhelníku ABC . Poté nám stačí narýsovat jakékoliv dvě osy, čímž v jejich průsečíku získáme střed kružnice opsané. Osu sestrojíme následovně: Nechť I je střed kružnice vepsané. Zkonstruujeme středy kružnic připsaných trojúhelníku BCI ke stranám BI a CI , přičemž ukážeme, že leží s B a C na jedné kružnici. Pomocí toho pak zkonstruujeme střed oblouku BC na této kružnici, z čehož získáme osu strany BC .

Začneme narýsováním středu kružnice vepsané I , který je na průsečíku os úhlů ABC a BCA . Následně narýsujeme osu úhlu BAI , která protne přímku CI v bodě X . Protože jsou ale body B a C v opačných polorovinách vůči přímce AI , leží body C, I, X na přímce v tomto pořadí. Osa úhlu BIX je tím pádem osou vnějšího úhlu u vrcholu I trojúhelníku BCI .

Narýsujeme si osy úhlů CBI a ICB , které protnou osu vnějšího úhlu u vrcholu I po řadě v bodech I_B a I_C . Tyto body jsou ale průsečíkem osy vnějšího a vnitřního úhlu v trojúhelníku BCI , takže se jedná o středy kružnic připsaných po řadě ke stranám CI a BI . Tyto body tím pádem leží po řadě na osách vnějších úhlů u vrcholů C a B . Protože jsou ale osy vnějšího a vnitřního úhlu u jednoho vrcholu trojúhelníku na sebe kolmé, tak $|\angle I_B B I_C| = |\angle I_C C I_B| = 90^\circ$. Pak ale body I_C, B, C, I_B leží na jedné kružnici.



Osa vnitřního úhlu trojúhelníku vždy prochází středem protějšího oblouku kružnice mu opsané (viz. Švrčkův bod). Tudíž průsečík os $BI_B C$ a $B_I C C$ musí nutně být tento střed, označme si ho jako S . Protože se jedná o střed oblouku BC , tak i $|BS| = |CS|$, takže trojúhelník BCS je rovnoramenný se základnou BC . V tomto trojúhelníku tedy splývá osa strany BC a osa úhlu BSC , kterou ale můžeme narýsovat. Tím jsme získali osu strany BC a obdobně můžeme zkonstruovat osu jiné libovolné strany trojúhelníku ABC , jak jsme chtěli.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů postupovala stejně jako vzorové řešení. Ukázalo se ale, že úlohu šlo řešit i velmi odlišným způsobem, který využíval hojně faktu, že osa úsečky AI prochází Švrčkovými body S_B a S_C .
(David Hromádka)