

# Kombinatorická

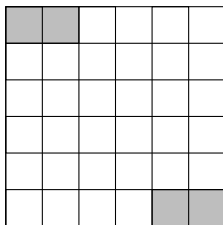
2. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. BŘEZNA 2026

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Klárka dostala čokoládovou tabulku  $6 \times 6$ , kde právě čtyři čtverečky jsou z hořké čokolády, vizte obrázek níže. Klárka chce tuto tabulku rozdělit na čtyři části tak, aby každá část měla (po vhodném otočení či překlopení) stejný tvar a umístění čtverečku s hořkou čokoládou v rámci tohoto tvaru bylo pro všechny čtyři dílky stejné. Ukažte, jak to může udělat.



ÚLOHA 2.

(3 BODY)

Najděte v závislosti na  $n$  počet uspořádaných dvojic  $(A, B)$  splňujících, že  $A$  i  $B$  jsou podmnožiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  a zároveň  $A$  není podmnožinou  $B$  a  $B$  není podmnožinou  $A$ .

ÚLOHA 3.

(3 BODY)

Lenka si hraje s tabulkou  $3 \times 3$ , která je na začátku postupně po řádcích vyplněná čísly 1 až 9. Na této tabulce umí provést následující operaci: vybere jeden řádek či sloupec a libovolné kladné celé číslo  $k$ , načež čísla (po řadě)  $a, b, c$  v tomto řádku či sloupci nahradí čísla  $a + k, b - k, c - k$ , nebo čísla  $a - k, b - k, c + k$ . Operaci může provést jen tehdy, když žádné ze vzniklých čísel nebude záporné. Dokáže Lenka konečně mnoha operacemi dostat tabulku do stavu, kdy v každém políčku bude totéž číslo?

ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

Anička z minulé série zbyla špageta dlouhá  $2n$ , ale Anička má chuť na špagetu o délce přesně  $n$ , kde  $n$  je kladné celé číslo. Anička láme špagetu vždy tak, aby výsledné dílky měly celočíselnou délku. Určete nejmenší  $k$  takové, že ať už Anička láme špagetu libovolně, tak po  $k$  lámáních existuje podmnožina úlomků se součtem délek  $n$ .

ÚLOHA 5.

(5 BODŮ)

Mára a Naty si hrají. Na začátku hry si každý z nich vytvoří své tajné číslo tak, že stokrát za sebou hodí standardní šestistěnnou kostkou a výsledky těchto hodů si zapíše jako jedno stociferné číslo. Následně oba naráz zakřičí číslo mezi 1 a 100 a zapamatují si  $n$ -tou cifru svého čísla, kde  $n$  bylo číslo vyřčeno druhým hráčem. Pokud si oba mají zapamatovat šestku, vyhrají, jinak prohrají. Jaká zábava! Mohou najít strategii<sup>1</sup> s pravděpodobností výhry více než  $\frac{1}{36}$ ?

<sup>1</sup>Na strategii se smí domlouvat pouze před začátkem hry, během hry spolu komunikovat nesmí.

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

Ondra narýsoval kružnici a po jejím obvodu nakreslil  $n$  květin. Poté vybral množinu *souvislých úseků*<sup>2</sup> květin  $U$  takovou, že každý úsek z  $U$  má v  $U$  nejvýše jeden nadúsek<sup>3</sup>. Buď  $a$  počet úseků z  $U$ , které v  $U$  nadúsek nemají, a  $b$  počet těch, které mají (právě jeden). Dokažte, že platí  $a + \frac{b}{2} \leq n$ .

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Na Matfyzu mají  $n$  atomů, přičemž každý atom obsahuje nanejvýš jeden elektron. Matfyzáci ovšem nevědí, které atomy elektron obsahují ani kolik elektronů celkem je. Mají však diodu, kterou mohou zavést od atomu  $A$  k atomu  $B$  (přičemž záleží na orientaci diody). V tu chvíli pokud je v atomu  $A$  elektron a v atomu  $B$  ne, tak se přesune do atomu  $B$ , jinak se nestane nic. Matfyzáci při použití diody nevědí, jestli došlo k přesunu elektronu. Rozhodněte, zda Matfyzáci mohou několikrát za sebou použít diodu tak, aby pak mohli o některých dvou atomech s jistotou říct, že jsou ve stejném stavu (s elektronem nebo bez).

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Mějme graf s  $2n$  vrcholy a  $n^2$  hranami. Dvojici vrcholů  $\{x, y\}$  nazveme *přátelskou*, pokud mají alespoň jednoho společného souseda. Dokažte, že tento graf obsahuje alespoň  $n(n-1)$  přátelských dvojic.

---

<sup>2</sup>Množina květin se nazývá souvislý úsek, pokud lze vybrat dva (ne nutně různé) kvítky takové, že všechny kvítky z této množiny leží na jednom z kružnicových oblouků určených těmito body a všechny kvítky nepatřící do dané množiny leží mimo tento oblouk.

<sup>3</sup>Nadúsekem úseku  $V$  rozumíme libovolný úsek  $W$  takový, že  $V$  je podmnožina  $W$  a  $W$  obsahuje alespoň jednu květinu nepatřící do  $V$ .

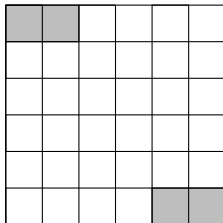
# Kombinatorická

2. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

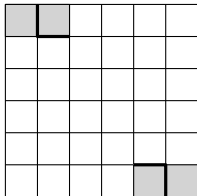
## Úloha 1.

Klárka dostala čokoládovou tabulku  $6 \times 6$ , kde právě čtyři čtverečky jsou z hořké čokolády, vizte obrázek níže. Klárka chce tuto tabulku rozdělit na čtyři části tak, aby každá část měla (po vhodném otočení či překlapaní) stejný tvar a umístění čtverečku s hořkou čokoládou v rámci tohoto tvaru bylo pro všechny čtyři dílky stejné. Ukažte, jak to může udělat.

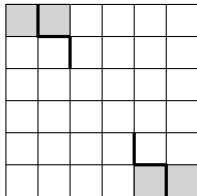


ŘEŠENÍ:

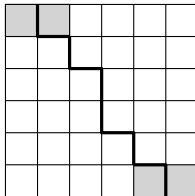
Začneme oddělením vyznačených dílků, neboť ze zadání musí každý být v jiné části. Dále, protože rohové dílky jsou ze tří stran ohraničeny, musíme ohraničit i jejich hořké sousedy (obrázek 1). Nyní má dílek vedle rohového hořkého čtverečku tři sousedy. Proto další řez vedeme tak, aby i jeho symetrický protipól měl tři sousedy (obrázek 2). Pak zvládneme čokoládu rozdělit na dva stejné díly (obrázek 3). Posledním krokem je rozdělit tyto dva díly na půlky. Víme, že poslední (nejnižší) řádek čokolády musí obsahovat pět dílků. Pomocí toho už dokážeme čokoládu dorozdělit. Klárka tedy mohla rozdělit čokoládu způsobem uvedeným na obrázku 4.



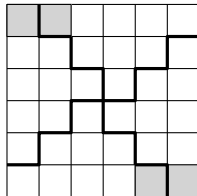
(1)



(2)



(3)



(4)

POZNÁMKY:

Došlá řešení neměla chybu.

(Lucka Zůnová)

## Úloha 2.

Najděte v závislosti na  $n$  počet uspořádaných dvojic  $(A, B)$  splňujících, že  $A$  i  $B$  jsou podmnožiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  a zároveň  $A$  není podmnožinou  $B$  a  $B$  není podmnožinou  $A$ .

ŘEŠENÍ:

Počet vyhovujících dvojic spočteme tak, že od celkového počtu dvojic odečteme počet těch dvojic, kde  $A \subseteq B$ , pak odečteme počet dvojic, kde  $B \subseteq A$ , a nakonec počet dvojic splňující  $A = B$ , který jsme odečetli dvakrát, jednou zpětně přičteme.

Počet podmnožin  $\{1, 2, \dots, n\}$  je  $2^n$  (pro každý prvek volíme, zda v podmnožině leží, či ne). Uspořádaných dvojic jako takových je proto  $2^n \cdot 2^n = 4^n$  a počet dvojic, kde  $A = B$ , je  $2^n$ .

Konečně dvojic takových, že  $A \subseteq B$ , je  $3^n$ . Pro každý prvek totiž volíme, zda leží v  $A$  i v  $B$ , pouze v  $B$ , nebo ani v jedné z podmnožin. Příklad  $B \subseteq A$  funguje naprosto stejně.

Počet vyhovujících dvojic je tedy  $4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$ .

POZNÁMKY:

Drtivá většina přijatých řešení byla správná a postupovala velmi podobně jako řešení vzorové.

(Josef „José“ Soural)

## Úloha 3.

Lenka si hraje s tabulkou  $3 \times 3$ , která je na začátku postupně po řádcích vyplněná čísly 1 až 9. Na této tabulce umí provést následující operaci: vybere jeden řádek či sloupec a libovolně kladné celé číslo  $k$ , načež čísla (po řadě)  $a, b, c$  v tomto řádku či sloupci nahradí čísla  $a + k, b - k, c - k$ , nebo čísla  $a - k, b - k, c + k$ . Operaci může provést jen tehdy, když žádné ze vzniklých čísel nebude záporné. Dokáže Lenka konečně mnoha operacemi dostat tabulku do stavu, kdy v každém políčku bude totéž číslo?

ŘEŠENÍ:

Všimněme si, že operace nijak neovlivní součet hodnot rohových polí  $s_r$ , poněvadž jakmile k jednomu  $k$  přičteme, musíme od druhého  $k$  odečíst (a naopak). Číslo  $s_r$  můžeme z počátečního stavu vyjádřit jako  $1 + 3 + 7 + 9 = 20$ . Pokud bychom dále dosáhli kýženého stavu, kdy by v každém políčku byla stejná hodnota  $z$ , vyplynula by rovnost  $20 = s_r = 4z \implies z = 5$ .

Nyní se zaměříme na součet celé tabulky. Ten s libovolnou operací klesne o  $k$ . Jelikož počáteční tabulka nesplňuje zadání, musel by být součet výsledné tabulky menší než počáteční součet. Avšak platí  $9z = 45 = 1 + \dots + 9$ , což je spor. Lenka to nezvládne.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |
|   |   |   |



POZNÁMKY:

Obvyklou charakteristikou správných řešení bylo nalezení invariantu v součtu rohů. Valná většina to pak dotáhla přes klesající součet celé tabulky, ale za zmínku stojí také postřeh pár řešitelů, že pětka pak „blokuje“ střední operace – tedy i nárůst dvojky či čtyřky.

(Ondřej Vočka)

#### Úloha 4.

Aničce z minulé série zbyla špageta dlouhá  $2n$ , ale Anička má chuť na špagetu o délce přesně  $n$ , kde  $n$  je kladné celé číslo. Anička láme špagetu vždy tak, aby výsledné dílky měly celočíselnou délku. Určete nejmenší  $k$  takové, že ať už Anička láme špagetu libovolně, tak po  $k$  lámáních existuje podmnožina úlolek se součtem délek  $n$ .

ŘEŠENÍ:

Ukážeme, že  $k = n$ . Nejprve ukážeme, že pro  $k < n$  toho Anička dosáhnout nemusí. V takovém případě, kdyby z kraje špagety ulomila Anička  $k$  kusů délky 1, zbude jí kus  $2n - k > n$  a z kusů délky 1 může poskládat špagetu délky nejvýše  $k < n$ . Tudíž existuje způsob lámání, po němž Anička špagetu délky  $n$  poskládat nezvládne. Tudíž  $k \geq n$ .

Dále dokážeme, že pro  $k = n$  to již půjde. Uvažme libovolné nalámání dané špagety pomocí  $n$  rozlomení. Tím nám vznikne  $n + 1$  kusů špagety. Označme si délky kusů špagety jako  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  a udělejme součty

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}.$$

Součet  $s_\ell$ , kde  $\ell$  je přirozené číslo a  $\ell \leq n + 1$ , tedy značí délku špagety od jednoho konce k dílku  $\ell$ . Těchto součtů je  $n + 1$  a zbytků po dělení číslem  $n$  je  $n$ . To znamená, že podle Dirichletova principu mají alespoň dva součty z  $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$  stejný zbytek po dělení číslem  $n$ . Necht' to jsou  $s_\ell$  a  $s_m$  kde  $1 \leq \ell < m \leq n + 1$ .

Protože  $s_\ell, s_m$  značí celočíselné délky špagety od prvního dílku po  $\ell$ -tý (respektive  $m$ -tý),  $s_m - s_\ell$  je délka špagety od dílku  $\ell + 1$  do dílku  $m$ , a jelikož mají tato dvě čísla stejný zbytek po dělení číslem  $n$ , je jejich rozdíl dělitelný číslem  $n$ . Tento rozdíl navíc musí být větší než 0 a menší než  $2n$ , protože platí  $0 < s_\ell < s_m \leq 2n$ . Tudíž  $s_m - s_\ell = n$ , což je přesně požadovaná délka špagety.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů úlohu řešila správně, způsobem jako ve vzorovém řešení nebo podobně. Za nepřesnosti v odůvodnění jsem strhávala 1 bod. Řešení, která se ubírala jiným směrem, byla spíše ojedinělá.

(Tereza Matějková)

#### Úloha 5.

Mára a Naty si hrají. Na začátku hry si každý z nich vytvoří své tajné číslo tak, že stokrát za sebou hodí standardní šestistěnnou kostkou a výsledky těchto hodů si запиše jako jedno stociferné číslo. Následně oba naráz zakřičí číslo mezi 1 a 100 a zapamatují si  $n$ -tou cifru svého čísla, kde  $n$  bylo číslo vyřčeno druhým hráčem. Pokud si oba mají zapamatovat šestku, vyhrávají, jinak prohrají. Jaká zábava! Mohou najít strategii<sup>1</sup> s pravděpodobností výhry více než  $\frac{1}{36}$ ?

ŘEŠENÍ:

Stačí když Mára a Naty řeknou číslo první pozice, kde jim padla 6 (pokud jim nepadne, tak BÚNO řeknou 1). Tedy pokud je šance, že oba mají první šestku na stejné pozici větší než  $\frac{1}{36}$ , tak máme vyhráno. Šance, že jim oběma padne 6 při prvním hodu je  $\frac{1}{36}$ . Zároveň je ale šance  $(\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{36}$ , že ani jednomu z nich nepadne. V takovém případě je ale šance  $\frac{1}{36}$ , že jim oběma padne při druhém hodu. Tedy celkově máme šanci alespoň  $\frac{1}{36} + \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{36}$ , že jim první 6 padne na stejné pozici, což nám stačí.

POZNÁMKY:

Většina správných řešení zvolila podobnou strategii a někteří řešitelé spočítali danou pravděpodobnost mnohem přesněji, což nebylo nutné.

(Lukáš Trojan)

<sup>1</sup>Na strategii se smí domlouvat pouze před začátkem hry, během hry spolu komunikovat nesmí.

## Úloha 6.

Ondra narýsoval kružnici a po jejím obvodu nakreslil  $n$  květin. Poté vybral množinu souvislých úseků<sup>2</sup> květin  $U$  takovou, že každý úsek z  $U$  má v  $U$  nejvýše jeden nadúsek<sup>3</sup>. Buď  $a$  počet úseků z  $U$ , které v  $U$  nadúsek nemají, a  $b$  počet těch, které mají (právě jeden). Dokažte, že platí  $a + \frac{b}{2} \leq n$ .

ŘEŠENÍ:

Označme  $A$  množinu úseků, které nemají nadúsek, a  $B$  množinu úseků, které mají právě jeden nadúsek; platí tedy  $|A| = a$ , respektive  $|B| = b$ . Každému úseku z  $A$  nyní přiřadíme obě jeho krajní květiny a každému úseku z  $B$  ty jeho krajní květiny, jež nebyly přiřazeny jeho nadúseku; z definice nadúseku pak plyne, že každému úseku z  $B$  přiřadíme vždy alespoň jednu květinu. Pokud si tedy počet přiřazených květin včetně násobnosti označíme  $K$ , bude dle předchozího pozorování platit

$$2|A| + |B| = 2a + b \leq K.$$

Nyní ukážeme, že každá květina mohla být přiřazena nejvýše jednou jako krajní k úseku, který je od ní po směru hodinových ručiček, a nejvýše jednou jako krajní k úseku, který je od ní proti směru hodinových ručiček, tedy celkově nejvýše dvakrát, takže  $K \leq 2n$ . Kdyby pro spor byla některá květina přiřazena dvěma různým úsekům, které jsou od ní po směru, resp. proti směru hodinových ručiček, pak by jistě jeden z těchto úseků byl nadúsekem toho druhého; úsek však nemůže mít dle konstrukce přiřazenou stejnou květinu jako jeho nadúsek, takže dostáváme spor.

Celkově pak pro počet přiřazených květin platí  $2a + b \leq K \leq 2n$ , odkud již po vydělení dvěma dostaneme kýženu nerovnost  $a + \frac{b}{2} \leq n$ .

POZNÁMKY:

Úspěšná řešení zpravidla postupovala podobně jako vzorové, jehož předlohou bylo řešení *Jakuba Trčky*.  
(Štěpán Varhaník)

## Úloha 7.

Na Matfyzu mají  $n$  atomů, přičemž každý atom obsahuje nanejvýš jeden elektron. Matfyzáci ovšem nevědí, které atomy elektron obsahují ani kolik elektronů celkem je. Mají však diodu, kterou mohou zavést od atomu  $A$  k atomu  $B$  (přičemž záleží na orientaci diody). V tu chvíli pokud je v atomu  $A$  elektron a v atomu  $B$  ne, tak se přesune do atomu  $B$ , jinak se nestane nic. Matfyzáci při použití diody nevědí, jestli došlo k přesunu elektronu. Rozhodněte, zda Matfyzáci mohou několikrát za sebou použít diodu tak, aby pak mohli o některých dvou atomech s jistotou říct, že jsou ve stejném stavu (s elektronem nebo bez).

ŘEŠENÍ:

Dokážeme, že ať se snažíme jakkoli, vždy selžeme. Jednotlivé atomy si očíslováme 1 až  $n$  a omezíme se na  $n+1$  možných počátečních rozložení a to takových, že pro  $k$ -té rozložení bude platit, že každý atom s číslem menším jak  $k$  má elektron. Nyní si rozmysleme co se stane, pokud spojíme atomy  $j$  a  $i$  diodou. Když  $i < j$ , nestane se nic. Když naopak  $i > j$ , přejmenujeme si  $j$  na  $i$  a  $i$  na  $j$  a dostaneme tím opět stejné rozložení.

Aplikací diod tedy pouze přejmenováváme atomy mezi sebou. Vhodným přejmenováním atomů jsme schopni úlohu přetvořit tak, že diodu nepoužijeme. Na našem přejmenovaném rozložení ukážeme, že zvolíme-li libovolné dva atomy, musí existovat alespoň jedno rozložení takové, v němž má elektron právě jeden z nich. Opět zvolíme atomy  $i$  a  $j$ , kde BÚNO  $i < j$ . Pak je naše vytvořené

<sup>2</sup>Množina květin se nazývá souvislý úsek, pokud lze vybrat dva (ne nutně různé) kvítky takové, že všechny kvítky z této množiny leží na jednom z kružnicových oblouků určených těmito body a všechny kvítky nepatřící do dané množiny leží mimo tento oblouk.

<sup>3</sup>Nadúsekem úseku  $V$  rozumíme libovolný úsek  $W$  takový, že  $V$  je podmnožina  $W$  a  $W$  obsahuje alespoň jednu květinu nepatřící do  $V$ .

rozložení  $j$  hledaným rozložením – atom na pozici  $j$  elektron nemá ale na atom na pozici  $i$  ano, tudíž má elektron právě jeden z nich. Tím pádem Matfyzáci s jistotou nemůžou určit žádné dva elektrony.

POZNÁMKY:

Úloha byla těžká. Spousta řešitelů ztroskotala na neúplných důkazech, neplatných tvrzeních a podobně. (Vojta „Dláža“ Gaďurek)

## Úloha 8.

Mějme graf s  $2n$  vrcholy a  $n^2$  hranami. Dvojici vrcholů  $\{x, y\}$  nazveme přátelskou, pokud mají alespoň jednoho společného souseda. Dokažte, že tento graf obsahuje alespoň  $n(n-1)$  přátelských dvojic.

ŘEŠENÍ:

Mějme graf  $G = (V, E)$ . Označme si pro libovolný vrchol  $v \in V$  jako  $n(v)$  počet vrcholů  $u \neq v$  takových, že  $\{u, v\}$  je přátelská dvojice. Pak celkový počet přátelských dvojic je  $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} n(v)$  (součet dělíme dvěma, protože každou přátelskou dvojici  $\{u, v\}$  započítáme jednou za  $u$  a jednou za  $v$ ).

Dále označme  $N(v)$  množinu všech sousedů vrcholu  $v$ . Pokud si vezmeme libovolný vrchol  $w \in N(v)$ , pak  $N(w) = \{v, a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , kde  $k = \deg(w) - 1$  s tím, že všechny dvojice  $\{v, a_i\}$  jsou přátelské, protože sdílejí společný vrchol  $w$ . Určitě tak  $n(v) \geq \deg(w) - 1$  pro libovolné  $w \in N(v)$ , konkrétně

$$n(v) \geq \max_{w \in N(v)} \deg(w) - 1.$$

Pro vrcholy s alespoň jedním sousedem můžeme maximální stupeň zdola odhadnout aritmetickým průměrem všech stupňů, tedy

$$n(v) \geq -1 + \frac{1}{|N(v)|} \sum_{w \in N(v)} \deg(w) = -1 + \sum_{w \in N(v)} \frac{\deg(w)}{\deg(v)},$$

kde jsme také využili toho, že  $|N(v)| = \deg(v)$ . Pokud  $v$  nemá žádného souseda, tak je  $n(v) = 0$ . Počet přátelských dvojic tak umíme odhadnout jako

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in V} n(v) \geq \frac{1}{2} \sum_{\substack{v \in V \\ \deg(v) \neq 0}} \left( -1 + \sum_{w \in N(v)} \frac{\deg(w)}{\deg(v)} \right) \geq -n + \frac{1}{2} \sum_{(v,w) \in E} \frac{\deg(w)}{\deg(v)}.$$

Využili jsme toho, že vrcholů se stupněm větším než nula je nanejvýš  $2n$ . Zápisem  $(v, w) \in E$  rozumíme, že sčítáme přes uspořádané dvojice vrcholů, které jsou spojeny hranou. To totiž odpovídá tomu, že si nejprve vybereme nějaký vrchol  $v \in V$  a poté nějaký vrchol  $w \in N(v)$ , což se objevovalo v předposledním výrazu.

V součtu na konci popárujeme sčítance pro dvojice  $(u, v)$  a  $(v, u)$ , čímž získáme

$$\sum_{(v,w) \in E} \frac{\deg(w)}{\deg(v)} = \sum_{\{v,w\} \in E} \left( \frac{\deg(w)}{\deg(v)} + \frac{\deg(v)}{\deg(w)} \right),$$

kde tentokrát sčítáme přes neuspořádané dvojice  $\{v, w\}$  sousedních vrcholů. Na jednotlivé sčítance v sumě můžeme využít AG-nerovnost:

$$\sum_{\{v,w\} \in E} \left( \frac{\deg(w)}{\deg(v)} + \frac{\deg(v)}{\deg(w)} \right) \geq \sum_{\{v,w\} \in E} 2 \cdot \sqrt{\frac{\deg(w)}{\deg(v)} \frac{\deg(v)}{\deg(w)}} = \sum_{\{v,w\} \in E} 2 = 2|E| = 2n^2.$$

Dosazením do předchozího odhadu získáváme, že

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in V} n(v) \geq -n + \frac{1}{2} \sum_{(v,w) \in E} \frac{\deg(w)}{\deg(v)} \geq -n + \frac{1}{2} 2n^2 = n(n-1),$$

což jsme přesně chtěli.

POZNÁMKY:

Všechna správná řešení v nějakém smyslu spočítala nějaký průměr, který poté šikovně odhadla. Mnoho řešení ale rovnou tvrdilo, že minimum nastává pro úplný bipartitní graf, což vůbec není zřejmé, tedy jsem za to neuděloval žádné body.

*(David Hromádka)*