

Metrické prostory 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 8. PROSINCE 2025

ÚLOHA 1.

(5 BODŮ)

Pro dva body a, b v rovině definujeme *manhattanskou osu úsečky a, b* jako množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost v manhattanské metrice od a jako od b , tj.

$$o_{ab} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho_1(a, x) = \rho_1(b, x)\}.$$

Mějme tedy dva body a, b , jejich manhattanskou osu úsečky o_{ab} a dva různé body x, y na této ose. Necht z je nějaký bod na přímce¹ procházející x a y . Rozhodněte, zda z musí také ležet na ose o_{ab} .

ÚLOHA 2.

(5 BODŮ)

Necht (M, ρ) je metrický prostor a A je podmnožina M . Dokažte, že A je otevřená právě tehdy, když pro každý bod $x \in A$ a každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z M , která konverguje k x , platí, že od jistého indexu již všechny body posloupnosti leží v A .²

ÚLOHA 3.

(5 BODŮ)

Rozhodněte, zda existuje metrický prostor (M, ρ) , ve kterém existuje nekonečná posloupnost uzavřených koulí $F_1, F_2, F_3, \dots$ takových, že poloměr každé z nich je větší než 1, pro každé přirozené n platí $F_{n+1} \subseteq F_n$ a mají prázdný průnik, čili $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

¹Myslíme úplně obyčejnou přímku.

²Tím myslíme, že existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n \in A$.

Metrické prostory 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Pro dva body a, b v rovině definujeme manhattanskou osu úsečky a, b jako množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost v manhattanské metrice od a jako od b , tj.

$$o_{ab} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho_1(a, x) = \rho_1(b, x)\}.$$

Mějme tedy dva body a, b , jejich manhattanskou osu úsečky o_{ab} a dva různé body x, y na této ose. Necht' z je nějaký bod na přímce¹ procházející x a y . Rozhodněte, zda z musí také ležet na ose o_{ab} .

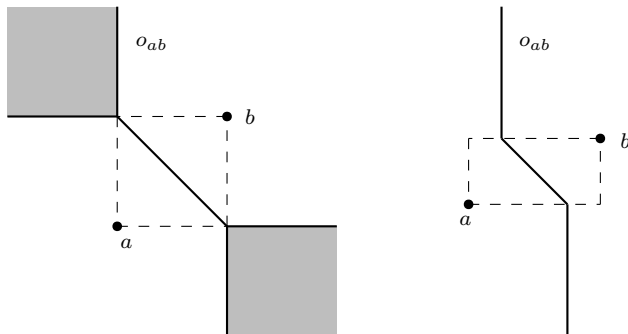
ŘEŠENÍ:

Úloha se nás vlastně ptá, jestli pro každé dva body a, b v rovině a $x, y \in o_{ab}$ musí celá přímka ℓ_{xy} být podmnožinou o_{ab} . To platit nemusí: Zvolme například $a = (0, 0)$ a $b = (1, 1)$. Pak třeba body $x = (0, 2)$ a $y = (2, 0)$ oba leží na ose o_{ab} – pro x jsou vzdálenosti od a a b

$$\rho_1(a, x) = |0 - 0| + |0 - 2| = 2, \quad \rho_1(b, x) = |0 - 1| + |2 - 1| = 2,$$

pro y vyjdou také obě vzdálenosti 2. V tu chvíli bod $z = b$ leží na přímce ℓ_{xy} , ale neleží na ose o_{ab} , neboť má od b nulovou vzdálenost, zatímco od a má nenulovou vzdálenost.

Pro lepší ilustraci, jak moc manhattanské osy můžou být „nepřímkové“, jsou na obrázku bez-
důkazově znázorněny o_{ab} pro dvě různé konfigurace bodů a, b .



¹Myslíme úplně obyčejnou přímku.

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správně. Několik řešení se zamotalo v tom, jestli má ℓ_{xy} být podmnožinou o_{ab} nebo obráceně, což pak vedlo ke ztrátě bodů. Na vyřešení úlohy stačilo najít jednu konkrétní volbu a, b, x, y, z dokazující $\ell_{xy} \not\subseteq o_{ab}$, ale spousta řešitelů počítala s více či méně obecnými body, což pak vedlo na technické výpočty s absolutními hodnotami. Pokud takový obecný výpočet nebyl správně, také jsem strhával body.
(Matěj „Pan G“ Gajdoš)

Úloha 2.

Nechť (M, ρ) je metrický prostor a A je podmnožina M . Dokažte, že A je otevřená právě tehdy, když pro každý bod $x \in A$ a každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z M , která konverguje k x , platí, že od jistého indexu již všechny body posloupnosti leží v A .²

ŘEŠENÍ:

Úloha chce dokázat ekvivalenci dvou tvrzení. Označme si otevřenost množiny jako $(*)$ a vlastnost s konvergentními posloupnostmi jako $(+)$. Chceme dokázat $(*) \iff (+)$. Rozdělíme si to na dvě implikace.

$(*) \implies (+)$ Z definice otevřené množiny platí, že každý bod má kolem sebe nějakou otevřenou kouli, která je v ní celá. Pokud má posloupnost x_n limitu x , tak pro libovolnou kouli se středem x existuje index, od kterého je x_n celá v této kouli. Protože x má kolem sebe kouli celou v A a x_n od jistého indexu leží v této kouli, leží od jistého indexu x_n v A .

Symbolicky bychom mohli zapsat konvergenci x_n k x jako $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : x_n \in U_\varepsilon(x)$. Otevřenost množiny A jako $\forall y \in A \exists r > 0 : U_r(y) \subseteq A$. Dosazením r získaného z otevřenosti od konvergence za ε je tvrzení dokázáno.

$(+) \implies (*)$ Tvrzení dokážeme obměněnou implikací, kde ukážeme $(\neg(*)) \implies (\neg(+))$. Nechť A není otevřená množina. Taková množina obsahuje nějaký hraniční bod, který nazvěme x . Chceme dokázat, že k němu existuje posloupnost, která jej má jako limitu, ale neexistuje index, od kterého by všechny její členy byly v A . Protože x je hraniční, platí $\forall \varepsilon > 0 U_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$. Zvolme tedy posloupnost x_n tak, že $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x) \cap A^c$. Dle cvičení 15 ze seriálu má tato posloupnost limitu x a zároveň žádný její člen není v A , takže jsme zkonstruovali chtěnou posloupnost.

POZNÁMKY:

Většina řešení postupovala stejně jako vzorové. První implikaci měla skoro všechna řešení správně. U druhé implikace některá řešení předpokládala, že pokud pro každou posloupnost existuje $U_\varepsilon(x)$ takové, že od nějaké chvíle $x_n \in A \wedge x_n \in U_\varepsilon(x)$, tak existuje ε_0 takové, že $U_{\varepsilon_0}(x) \subseteq A$, což pro hranici neplatí. V pár řešeních se ještě objevil předpoklad, že každá klesající posloupnost kladných čísel má limitu rovnou nule, což není pravda třeba pro $x_n = 1 + \frac{1}{n}$.
(Patrik Štencel)

Úloha 3.

Rozhodněte, zda existuje metrický prostor (M, ρ) , ve kterém existuje nekonečná posloupnost uzavřených koulí $F_1, F_2, F_3, \dots$ takových, že poloměr každé z nich je větší než 1, pro každé přirozené n platí $F_{n+1} \subseteq F_n$ a mají prázdný průnik, čili $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

ŘEŠENÍ:

Takový metrický prostor existuje. Uvažme vážený graf s vrcholy $0, 1, 2, \dots$, ve kterém z každého vrcholu vede hrana do 0 a žádné jiné hrany v grafu nejsou. Hrana z 0 do n pro n přirozené nechť má délku $1 + \frac{1}{n}$. Na tomto grafu uvažme klasickou grafovou metriku. Vezměme si nyní posloupnost koulí $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, kde F_n má střed ve vrcholu n a poloměr $2(1 + \frac{1}{n})$. Pak do F_n patrně spadají vrcholy $n, n+1, n+2, \dots$ a samozřejmě také 0. Tyto koule tedy splňují podmínku $F_{n+1} \subseteq F_n$. A jaký je jejich průnik? Každé přirozené n patří pouze do prvních n koulí, takže průnik těchto koulí je pouze

²Tím myslíme, že existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n \in A$.

vrchol 0. Odeberme tedy tento bod z našeho prostoru a metriku na zbylých vrcholech ponechme stejnou takovou, jaká byla. Nyní už mají koule prázdný průnik a vyhovují zadání. Tomuto grafu (metrickému prostoru) se říká *ježek* a často může posloužit jako protipříklad různým tvrzením.

ŘEŠENÍ PODLE JAKUBA TRČKY:

Uvažme prostor (M, ρ) , kde $M = \mathbb{N}$ a $\rho(n, m) = 1 + \frac{1}{\min(n, m)}$ pro $n \neq m$ a $\rho(n, m) = 0$, pokud $n = m$. Jde o metriku, protože $\rho(n, m) = 0 \iff n = m$, definice ρ je symetrická vůči prohození n a m a zároveň $2 \geq \rho > 1$ (samozřejmě pokud není $\rho = 0$), což už implikuje platnost trojúhelníkové nerovnosti. Koule definujeme obdobně jako v minulém příkladu, F_n má střed v n a poloměr $1 + \frac{1}{n}$, tyto koule budou obsahovat právě čísla $n, n + 1, \dots$ a tedy vyhovují zadání.

ŘEŠENÍ PODLE ERIKA JEŽKA:

Uvažujme interval $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ s metriku $\rho(x, y) = |x - y| + 1$, pokud $x \neq y$, jinak 0. Jde o metriku, protože definice je symetrická vůči prohození x a y a díky standardní trojúhelníkové nerovnosti $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ máme i $|x - y| + 1 \leq |x - z| + 1 + |z - y| + 1$. Pokud definujeme F_n jako kouli se středem v bodě $\frac{1}{2^n}$ a poloměrem $1 + \frac{1}{2^n}$, pak tyto koule budou interval $(0, \frac{1}{2^{n-1}})$. Tudíž budou splňovat podmínku $F_{n+1} \subset F_n$ a jejich průnik bude prázdný. Dokonce tedy budou vypadat podobně jako koule ve standardní euklidovské metrice.

POZNÁMKY:

Na úloze bylo asi nejzákeřnější to, že to je možné. Když si totiž člověk kreslí obrázky v rovině, vypadá to, že by průnik existovat měl. Úlohou jsme chtěli mimo jiné ilustrovat, že takovéto obrázky mohou být zrádné. Navíc hledání vyhovujícího prostoru není úplně triviální. Daný prostor totiž nesmí být kompaktní (vlastnost zaváděná v druhém dílu seriálu). Na kompaktu si totiž vezmeme nějakou posloupnost bodů takovou, že její n -tý bod je v n -té kouli, a z ní vybereme konvergentní podposloupnost. Její limita pak z uzavřenosti bude patřit do všech koulí, tedy do jejich průniku.

Bylo tedy potřeba volit poněkud nepřírozený metrický prostor. Základ konstrukce byl obvykle nějaký neúplný prostor, kde byla ke všem vzdálenostem připočtena jednička. Tím se z toho prostoru stal úplný prostor, neboť jsou v něm stejně jako v diskrétním prostoru konvergentní posloupnosti od jistého bodu konstantní. Nalezené prostory tedy byly úplné, což je zajímavé, protože pokud bychom pracovali na úplném metrickém prostoru a poloměry koulí nebyly větší než 1, ale naopak se blížily k nule, pak už by průnik nutně musel existovat (a ležel by v něm právě jeden bod). Tedy pouze tím, že dovolíme koulím být větší, najednou může být v průniku méně bodů.

Úplnost a kompaktnost jsou témata druhého dílu seriálu, pokud tedy nevíš, co znamenají, přečti si to v něm. Nesprávná řešení obvykle měla problém již s jednodušší množinovou otázkou – pokud je průnik konečně mnoha vnořených množin neprázdný, může být nekonečný průnik celé nekonečné posloupnosti těchto vnořených množin prázdný? Odpověď je ano a když už člověk má nějakou takovou konstrukci, obvykle je lehké najít si metriku tak, aby koule vypadaly právě jako tyto vnořené množiny.

(Vít Hanika)