

Antika

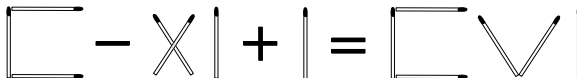
1. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 30. ZÁŘÍ 2025

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Císař Nero si hraje se sirkami. Na stole leží rovnost $C - XI + I = CVI$, přičemž znaky $+$, $-$ a $=$ nejsou složeny ze sirek. Poradte Neronovi, jak přesunout dvě sirky bez otáčení tak, aby rovnost v římských číslicích platila.



ÚLOHA 2.

(3 BODY)

Márova oblíbená amfora se roztříštila na bezpočet střepů. Rád by co nejvíc střepů rozmístil na šachovnici 8×8 tak, aby na každém políčku ležel nanejvýš jeden střep a zároveň se v každém řádku, sloupci a diagonále nacházel sudý počet střepů. Uvažujeme přitom všech 30 diagonál v obou úhlopříčných směrech, tj. včetně těch kratších, jež nevycházejí z rohů šachovnice. Kolik nejvíce střepů může Mára takto na šachovnici rozmístit?

ÚLOHA 3.

(3 BODY)

Hypatie se věnuje řešení rovnic. Pomozte jí najít nejmenší kladné celé k takové, že soustava rovnic $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = \dots = x^k + y^k + z^k$ má právě jedno řešení v kladných reálných číslech.

ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

Ve vojsku Alexandra Velikého slouží mnoho vojáků. Někteří jsou špehové, kteří mohou lhát – ale nemusí. Zbytek tvoří poctivci, kteří za všech okolností mluví pravdu. Vojáci se navzájem znají natolik, že každý voják ví, kdo je špeh a kdo poctivec. Alexandr to neví, ale chce se všech špehů zbavit.

Každý den Alexandr položí každému vojákovi v táboře jednu otázku, v níž ukáže na jiného vojáka a zeptá se, zdali se jedná o špeha. Na konci každého dne pak jednoho vojáka vybere a předvede k věstkyni, která Alexandrovi pravdivě povi, zdali před ní stojí špeh. Řecký obyčej však velí, že voják předvedený před věstkyni přestává být vojákem a navždy odejde z vojska. Dalšího dne se proces opakuje nanovo.

Ukažte, že Alexandr dovede po několika dnech vypudit z vojska všechny špehy a přijít při tom o nanejvýš jednoho poctivého vojáka.

ÚLOHA 5.

(5 BODŮ)

Půdorys antického chrámu má tvar konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Nechť M je střed strany AD . Platí, že $|AD| = |BD|$, $|\angle ACD| = 3|\angle BAC|$ a $CM \parallel AB$. Dokažte, že $|\angle ACB| = 90^\circ$.

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

Turnaje v římském Koloseu se zúčastnilo n gladiátorů, přičemž každý bojoval s každým právě jednou a nenastaly žádné remízy. Kladné celé číslo $k < n$ splňuje, že pro každou skupinu k gladiátorů existuje alespoň jeden další gladiátor, kterého všech těchto k gladiátorů porazilo. Dokažte, že pro každou skupinu A obsahující $k - 1$ gladiátorů existuje skupina B obsahující $k + 1$ gladiátorů taková, že každý člen skupiny A porazil každého člena skupiny B .

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Diskobolos hledá kladné celé číslo, které má alespoň 2025 různých prvočíselných dělitelů a které zároveň splňuje, že pokud seřadíme všech jeho k kladných dělitelů dle velikosti $d_1 < d_2 < \dots < d_k$, pak bude výraz $\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$ celočíselný. Rozhodněte, zda se mu může povést takové číslo najít.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Julius Caesar má dva otroky a nutí je hrát karetní hru. Dohromady mají balíček s 2025 kartami očíslovanými celými čísly od 1 do 2025, které Caesar rozdělí do dvou balíčků. Každý z otroků dostane jeden z těchto balíčků a v každém kole oba otroci otočí svou vrchní kartu. Ten, kdo otočí kartu s vyšším číslem, si obě karty vloží do spod svého balíčku v libovolném pořadí. Hra končí, když všechny karty má jeden z otroků. Dokažte, že pokud otroci spolupracují, tak mohou po konečném počtu tahů dohrát, ať už Caesar rozdál karty jakkoliv.

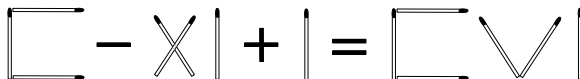
Antika

1. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Císař Nero si hraje se sirkami. Na stole leží rovnost $C - XI + I = CVI$, přičemž znaky $+$, $-$ a $=$ nejsou složeny ze sirek. Poradte Neronovi, jak přesunout dvě sirky bez otáčení tak, aby rovnost v římských číslicích platila.



ŘEŠENÍ:

Pro vyřešení této úlohy je důležité si uvědomit, že na levé straně od sta odečítáme, na pravé straně se tedy musíme dostat pod hodnotu sto. To lze udělat tak, že z C odstraníme horní sirku. Tím pravou stranu snížíme na 56, musíme proto na levé straně odečíst poměrně velké číslo – můžeme třeba XI přidáním sirky změnit na XL . Rovnost ale stále neplatí, protože na stole nyní leží $100 - 40 + 1 = 56$. Stačí ale jen zvýšit pravou stranu o pět, což uděláme tak, že z LVI vytvoříme LXI .



POZNÁMKY:

Naprostá většina řešení byla správná, někteří řešitelé použili v řešení logicky smysluplné, ale nesprávné konstrukce typu $VL = 45$, $LVL = 95$ nebo $LXL = 90$, za což jsem uděloval částečné body. Pokud se ovšem někdo snažil dokázat, že řešení neexistuje, tak už jsem bohužel žádné body udělit nemohl. (Mára Valkovič)

Úloha 2.

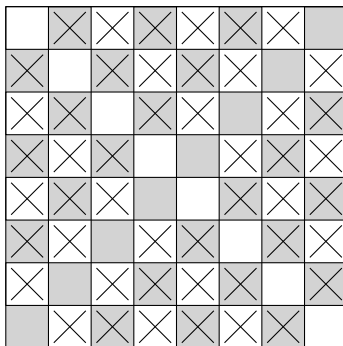
Márova oblíbená amfora se roztrhla na bezpočet střepů. Rád by co nejvíc střepů rozmístil na šachovnici 8×8 tak, aby na každém políčku ležel nanejvýš jeden střep a zároveň se v každém řádku, sloupci a diagonále nacházel sudý počet střepů. Uvažujeme přitom všech 30 diagonál v obou úhlopříčných směrech, tj. včetně těch kratších, jež nevycházejí z rohů šachovnice. Kolik nejvíce střepů může Mára takto na šachovnici rozmístit?

ŘEŠENÍ:

Ukážeme, že nejvyšší možný počet položených střepů je 48.

Na šachovnici je celkem 30 různých diagonál, z toho 16 z nich má lichý počet políček. Těmto budeme říkat *liché diagonály*. Liché diagonály v jednom úhlopříčném směru mají jinou barvu než liché diagonály v opačném úhlopříčném směru. Dvě různé liché diagonály tedy nesdílí stejné políčko.

Aby byl počet střepů v liché diagonále sudý, musí v ní chybět lichý počet střepů. To znamená, že celkově na šachovnici musí chybět alespoň 16 střepů. Šachovnice má 64 políček, takže pokud je minimálně 16 polí prázdných, maximální možný počet položených střepů je 48. Nyní stačí najít konstrukci, která vyhovuje. Tomu odpovídá například rozmístění, kdy střep leží na každém políčku s výjimkou hlavních diagonál.



POZNÁMKY:

Většina řešení byla správná. Někteří řešitelé sice dospěli ke správnému výsledku a konstrukci, chyběli jim ale důkaz, že 48 je skutečně maximum. (Markéta Honsejková)

Úloha 3.

Hypatie se věnuje řešení rovnic. Pomozte jí najít nejmenší kladné celé k takové, že soustava rovnic $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = \dots = x^k + y^k + z^k$ má právě jedno řešení v kladných reálných číslech.

ŘEŠENÍ:

Ukážeme, že hledané k je 3. Jako první rozeberme případ, kdy $k = 2$. Tam nám stačí najít jakákoli dvě různá řešení soustavy $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2$. Ta můžeme najít tak, že y a z prohlásíme za parametry, vyřešíme vzniklou kvadratickou rovnici pro x a zvolíme vhodné konstanty za y a z . Tím získáme například řešení

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) \quad \text{a} \quad (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Teď stačí dokázat, že v případě, kdy $k = 3$, je řešení jednoznačné. Víme, že musí platit rovnice:

$$\begin{aligned} x + y + z &= x^2 + y^2 + z^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Tyto rovnice sečteme a upravíme tak, abychom měli na pravé straně nulu:

$$\begin{aligned} x + y + z + x^3 + y^3 + z^3 &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2, \\ x + y + z + x^3 + y^3 + z^3 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 &= 0, \\ x^3 - 2x^2 + x + y^3 - 2y^2 + y + z^3 - 2z^2 + z &= 0, \\ x(x-1)^2 + y(y-1)^2 + z(z-1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Můžeme si všimnout, že veškeré sčítance na levé straně jsou nutně nezáporné, protože x, y, z jsou kladná reálná čísla. Tato rovnice tedy platí jedině tehdy, když všechny sčítance jsou rovny nule, což nastane jen pro trojici $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Tím jsme dokázali jednoznačnost řešení rovnice pro $k = 3$.

POZNÁMKY:

Naprostá většina správných řešení postupovala stejně jako řešení vzorové, případně pro soustavu, kdy $k = 2$, někteří řešitelé dokázali, že existuje nekonečně mnoho řešení, což ale nebylo potřeba. Pak byli někteří řešitelé, kteří k řešení využili Cauchyho–Schwarzovu nerovnost nebo AG nerovnost a došli též ke správnému výsledku. Mezi nejčastější chyby pak patřilo to, že řešitel rozebíral všechny případy a některé vynechal, špatně užil nerovnost mocninných průměrů, nebo pracoval s tvrzením, že k jednoznačnému řešení soustavy rovnic s n neznámými potřebujeme n rovnic.

(Ondřej Sedláček)

Úloha 4.

Ve vojsku Alexandra Velikého slouží mnoho vojáků. Některí jsou špehové, kteří mohou lhát – ale nemusí. Zbytek tvoří poctivci, kteří za všech okolností mluví pravdu. Vojáci se navzájem znají natolik, že každý voják ví, kdo je špeh a kdo poctivec. Alexandr to neví, ale chce se všech špehů zbavit.

Každý den Alexandr položí každému vojákovi v táboře jednu otázku, v níž ukáže na jiného vojáka a zeptá se, zdali se jedná o špeha. Na konci každého dne pak jednoho vojáka vybere a předvede k věštkyni, která Alexandrovi pravdivě poví, zdali před ní stojí špeh. Řecký obyčej však velí, že voják předvedený před věštkyní přestává být vojákem a navždy odejde z vojska. Dalšího dne se proces opakuje nanovo.

Ukažte, že Alexandr dovede po několika dnech vypudit z vojska všechny špehy a přijít při tom o nanejvýš jednoho poctivého vojáka.

ŘEŠENÍ:

Pokud Alexandr najde jednoho potvrzeného poctivce, má vyhráno. Postaví potom armádu do cyklu, kde, počínaje prvním potvrzeným poctivcem, bude pokládat vojákům otázky ohledně člověka po jejich pravici. Dokud tento člověk není špeh, dále říká pravdu o člověku napravo. Když nalezne špeha, předvede ho věštkyni a další den cyklus sestaví bez nalezeného špeha.

Nyní musíme přijít na způsob, jakým Alexandr onoho poctivce objeví. Označíme libovolného vojáka A a necháme všechny ostatní odpovídat, zda A je špeh. Mohou nastat dvě možnosti:

- Vojáka A všichni označili za špeha, tak předvedeme A věštkyni. Pokud je A špeh, vyřadili jsme jednoho špeha a můžeme postup začít znovu. Pokud A je poctivec, nutně to znamená, že všichni ostatní lhali, tudíž jsou špehové a my jsme dosáhli cíle.
- Vojáka A alespoň jeden další voják označil za poctivce. Z této nenulové množiny vybereme vojáka B a předvedeme ho věštkyni. Pokud B je špeh, vyřadili jsme špeha a můžeme opět začít znovu. Pokud je B poctivec, je nutně i A poctivec, protože B jako poctivec o A nemohl lhát.

Ověříme, že jsme splnili podmínky úlohy. Pokud jsme našli poctivce, využijeme ho k potvrzení dalšího a postupně vyhodíme všechny označené špehy. Pokud jsme žádného potvrzeného poctivce nenalezli, vyhodíme z armády postupně všechny vojáky, aniž bychom vyhodili více než jednoho poctivce.

POZNÁMKY:

Pár řešitelů zvlášť vyřešilo případy, kdy se ve vojsku nevyskytuje žádný nebo vyskytuje pouze jeden poctivec, protože v takových případech je splnění podmínky triviální. Je třeba si ale uvědomit, že návod pro Alexandra musí s těmito případy počítat a nelze stavět řešení na tvrzení, že „víme, že ve vojsku jsou minimálně dva poctivci“.

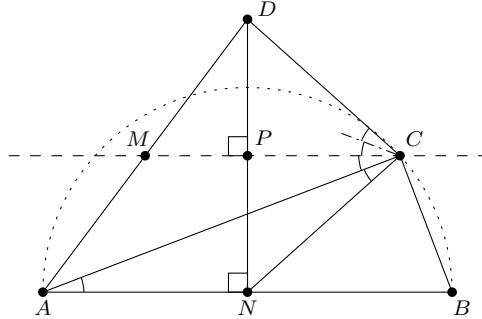
(Lucka Zúnová)

Úloha 5.

Půdorys antického chrámu má tvar konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Necht' M je střed strany AD . Platí, že $|AD| = |BD|$, $|\angle ACD| = 3|\angle BAC|$ a $CM \parallel AB$. Dokažte, že $|\angle ACB| = 90^\circ$.

ŘEŠENÍ:

Označme si N střed úsečky AB a P průsečík DN a CM . Protože $\triangle ABD$ je rovnoramenný s rameny AD a BD , platí, že výška na stranu AB prochází bodem N . To znamená, že $DN \perp AB$. Protože však platí $AB \parallel CM$, tak $DN \perp CM$. Bod M leží ve středu úsečky AD , takže CM půlí úsečku DN . Z toho plyne, že $\triangle CDP$ a $\triangle CNP$ jsou shodné, neboť stranu CP mají společnou, $|DP| = |NP|$ a $|\angle NPC| = |\angle CPD|$. Tedy $|\angle DCM| = |\angle MCN|$.



Označme si $|\angle BAC|$ jako α . Protože jsou úsečky AB a CM rovnoběžné, platí $|\angle BAC| = |\angle MCA| = \alpha$. Potom díky rovnosti ze zadání $|\angle ACD| = 3|\angle BAC|$ můžeme dopočítat velikost úhlu DCM následovně:

$$|\angle DCM| = |\angle ACD| - |\angle MCA| = 3\alpha - \alpha = 2\alpha.$$

Z rovnosti $|\angle DCM| = |\angle MCN|$ tedy plyne $|\angle MCN| = 2\alpha$. Dále tedy můžeme dopočítat

$$|\angle ACN| = |\angle MCN| - |\angle MCA| = 2\alpha - \alpha = \alpha.$$

To znamená, že $|\angle ACN| = |\angle NAC|$, tudíž $\triangle ACN$ je rovnoramenný. Díky tomu, že N je střed úsečky AB , platí $|AN| = |BN| = |CN|$, tedy kružnice opsaná $\triangle ABC$ je Thaletova kružnice s průměrem AB , což znamená, že $|\angle ACB| = 90^\circ$, jak jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správná a postupovala stejně jako vzorové řešení. Někteří řešitelé úlohu řešili pomocí analytické geometrie, a ačkoli tímto postupem tvrzení skutečně dokázali, vedl je na spoustu dlouhých rovnic s goniometrickými funkcemi. Tato řešení byla obecně výrazně delší než ostatní, proto jsem za ně udělovala $-i$ body.

(Tereza Matějková)

Úloha 6.

Turnaje v římském Koloseu se zúčastnilo n gladiátorů, přičemž každý bojoval s každým právě jednou a nenastaly žádné remízy. Kladné celé číslo $k < n$ splňuje, že pro každou skupinu k gladiátorů existuje alespoň jeden další gladiátor, kterého všech těchto k gladiátorů porazilo. Dokažte, že pro každou skupinu A obsahující $k-1$ gladiátorů existuje skupina B obsahující $k+1$ gladiátorů taková, že každý člen skupiny A porazil každého člena skupiny B .

ŘEŠENÍ:

Zvolme libovolných $k - 1$ gladiátorů jako naše A . Jako B pak označíme skupinu všech gladiátorů, které porazil každý z A , a nakonec skupinu těch gladiátorů, kteří nejsou ani v A , ani v B , nazvěme C .

Když vezmeme libovolného gladiátora ze skupiny C a přidáme ho k A , získáme skupinu k gladiátorů, kteří mají dle zadání nějakého společného gladiátora, jehož všichni porazili. Jelikož ho porazili všichni z A , patří do skupiny B . Platí tedy, že každý gladiátor ze skupiny C porazil alespoň jednoho člena skupiny B .

Nyní pro spor předpokládejme, že $|B| \leq k$. Můžeme vzít skupinu B a doplnit ji libovolnými gladiátory tak, aby měla velikost k . Tato skupina musela také nějakého gladiátora společně porazit, označme si ho g . Gladiátor g nemůže být z A , musí tedy patřit do C . To je ale spor s tím, že každý gladiátor z C porazil někoho v B . Předpoklad tedy neplatí a B musí obsahovat minimálně $k + 1$ gladiátorů.

POZNÁMKY:

Většina správných řešení postupovala stejně jako vzorové. Další postupně zvětšovala skupinu B nějakým algoritmem, který fungoval pro $|B| \leq k$. Tady je důležité ověřit, zda nově nalezený gladiátor je opravdu nový a nepatřil už původně do B , což jde například tak, že najdeme g podobně jako ve vzoráku a poté vezmeme gladiátora, kterého porazil g , spolu se skupinou A . (Anička Trnková)

Úloha 7.

Diskobolos hledá kladné celé číslo, které má alespoň 2025 různých prvočíselných dělitelů a které zároveň splňuje, že pokud seřadíme všech jeho k kladných dělitelů dle velikosti $d_1 < d_2 < \dots < d_k$, pak bude výraz $\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$ celočíselný. Rozhodněte, zda se mu může povést takové číslo najít.

ŘEŠENÍ:

Tvrdíme, že takové číslo existuje. Dokážeme dokonce, že existuje číslo s libovolným konečným počtem prvočíselných dělitelů (prvočinitelů v rozkladu na prvočísla), pro jehož seřazené dělitele $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ je výraz $\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$ celočíselný. Podmínku, že je výraz celočíselný, nazvěme (*).

Existenci takového čísla dokážeme indukci podle počtu prvočinitelů v prvočíselném rozkladu. Číslo s jedním prvočíselným dělitelem splňující podmínku (*) najdeme jednoduše. Libovolné prvočíslu p má právě dva dělitele: $d_1 = 1$, $d_2 = p$ a tedy je součet ze zadání celé číslo, jelikož $\frac{d_2}{d_1} = \frac{p}{1} \in \mathbb{Z}$. Nám stačí jen jedno prvočíslu, třeba $p = 2$.

Nyní předpokládejme, že máme celé číslo n , které splňuje podmínku (*) a má m prvočinitelů v prvočíselném rozkladu. Chceme najít číslo splňující podmínku (*) s $m + 1$ různými prvočiniteli. Vezmeme si nějaké prvočíslu p , které je větší než n . To bude existovat, protože prvočísel je nekonečně mnoho. Potom se p nevyskytuje v prvočíselném rozkladu n . Číslo $p^n n$ má tedy $m + 1$ různých prvočinitelů ve svém prvočíselném rozkladu. Když ukážeme, že splňuje (*), budeme mít úlohu vyřešenou.

Nechť jsou $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ dělitele n a podíváme se na dělitele čísla $p^n n$. Ty budou ve tvaru $p^i d_j$ pro nějaké $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. My je chceme seřadit do posloupnosti. Důležité je uvědomit si, že $d_1 = 1$ a $d_k = n$. Z toho triviálně plyne $p^i d_1 = p^i$ a $p^i d_k = p^i n$. Když vynásobíme nerovnosti z předpokladu

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k$$

kladným číslem p^i , dostaneme nerovnosti

$$p^i = p^i d_1 < p^i d_2 < \dots < p^i d_k.$$

Těchto nerovností máme $n + 1$, jednu pro každé $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Z nerovnosti $d_k = n < p = pd_1$ přenásobením kladným číslem p^i dostaneme n nerovností

$$p^i d_k = p^i n < p^{i+1} = p^{i+1} d_1,$$

jednu pro každé $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Když všechny předcházející nerovnosti napíšeme dohromady, dostaneme seřazení všech dělitelů $p^n n$:

$$\begin{aligned} 1 &= d_1 < d_2 < \dots < d_k < \\ < p &= pd_1 < pd_2 < \dots < pd_k < \\ < p^2 &= p^2 d_1 < p^2 d_2 < \dots < p^2 d_k < \\ &\vdots \\ < p^i &= p^i d_1 < p^i d_2 < \dots < p^i d_k < \\ &\vdots \\ < p^n &= p^n d_1 < p^n d_2 < \dots < p^n d_k. \end{aligned}$$

My chceme ukázat, že následující konečný součet je celé číslo:

$$\begin{aligned} &\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{d_k}{d_{k-1}} + \frac{pd_1}{d_k} + \\ &+ \frac{pd_2}{pd_1} + \frac{pd_3}{pd_2} + \dots + \frac{pd_k}{pd_{k-1}} + \frac{p^2 d_1}{p d_k} + \\ &+ \frac{p^2 d_2}{p^2 d_1} + \frac{p^2 d_3}{p^2 d_2} + \dots + \frac{p^2 d_k}{p^2 d_{k-1}} + \frac{p^3 d_1}{p^2 d_k} + \\ &\quad \vdots \\ &+ \frac{p^n d_2}{p^n d_1} + \frac{p^n d_3}{p^n d_2} + \dots + \frac{p^n d_k}{p^n d_{k-1}}. \end{aligned}$$

Jelikož p^i můžeme ve zlomcích zkrátit, je prvních $k-1$ členů v každém řádku rovno $\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$, což je celé číslo z indukčního předpokladu. Ve všech řádcích kromě posledního (tedy na n řádcích) máme ještě zlomek $\frac{p^{i+1} d_1}{p^i d_k} = \frac{pd_1}{d_k} = \frac{p}{n}$. Součet těchto n stejných čísel bude $n \cdot \frac{p}{n} = p$, což je celé číslo. (Zde se vysvětluje, proč jsme v $p^n n$ zvolili zrovna n -tou mocninu p . Stejně tak jsme ale mohli zvolit $p^{kn} n$ pro k libovolné přirozené.)

Když to shrneme, výraz z (*) pro $p^n n$ je součtem $n+1$ součtů $\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$, což je celé číslo, a součtu n čísel $\frac{p}{n}$, což dává celé číslo. Tím pádem je ten dlouhý součet celé číslo.

POZNÁMKY:

Všechna správná řešení postupovala téměř stejně jako vzorové řešení.

(Ivan Žemlička)

Úloha 8.

Julius Caesar má dva otroky a nutí je hrát karetní hru. Dohromady mají balíček s 2025 kartami očíslovanými celými čísly od 1 do 2025, které Caesar rozdělí do dvou balíčků. Každý z otroků dostane jeden z těchto balíčků a v každém kole oba otroci otočí svou vrchní kartu. Ten, kdo otočí kartu s vyšším číslem, si obě karty vloží dospod svého balíčku v libovolném pořadí. Hra končí, když všechny karty má jeden z otroků. Dokažte, že pokud otroci spolupracují, tak mohou po konečném počtu tahů dohrát, ať už Caesar rozdál karty jakkoliv.

ŘEŠENÍ:

Budeme se dívat na orientovaný graf, kde vrcholy představují stavy hry a hrana vede ze stavu do jiného právě tehdy, když se jedním kolem do tohoto stavu umíme dostat. Jako stav rozumíme pořadí a počet karet, co otroci mají. V tomto grafu se nacházejí 3 různé „typy“ vrcholů.

První typ vrcholů bude ten, kde oba otroci mají alespoň dvě karty. Z takového vrcholu povedou dvě hrany, z nichž každá odpovídá tomu, v jakém pořadí vyhrávající otrok vloží dvojici karet

dospod svého balíčku. Zároveň do něj vedou dvě hrany, protože ze stavu nepoznáme, kdo vyhrál poslední *duel* karet. Když si ale řekneme, že vyhrál jeden konkrétní z nich, už přesně víme, jak vypadal předchozí stav. Vítěznému otrokovi vezmeme dvojici karet zespoda a dáme mu navrch tu větší z nich, druhému tu menší.

Druhý typ vrcholů je ten, kde jeden z otroků má pouze jednu kartu. Z tohoto typu vedou opět dvě hrany, do něj ovšem pouze jedna. Pokud totiž otrok vyhraje v duelu, má nutně alespoň dvě karty.

Třetí a poslední typ tvoří koncové vrcholy, kde všechny karty má jeden otrok. Z nich už nevedou žádné hrany, protože hra skončila, a opět do nich vede jen jedna hrana, protože víme, kdo z otroků předchozí duel vyhrál.

Nechť X je množina všech vrcholů, ze kterých se neumíme dostat do žádného koncového vrcholu, pro spor předpokládáme, že je neprázdná. Ostatní vrcholy budou tvořit množinu Y . Všechny hrany z X vedou opět do X , jinak bychom se do koncového vrcholu dostat uměli. Zmíněných hran je $2|X|$, každý z vrcholů X má ale nanejvýš dvě vstupní hrany, tím pádem musí mít každý vrchol právě dvě vstupní hrany. Zároveň do X nevede žádná hrana z Y , jinak by do X vedlo více hran, než kolik v součtu vede do jednotlivých vrcholů X .

Vezmeme si nyní nějaký vrchol z X a jemu odpovídající stav, v němž jsou počty karet v balíčcích uspořádaná dvojice (a, b) . Víme, že každá vstupní hrana odpovídá vítězství jiného otroka. Z toho vyplývá, že v jednom z předcházejících stavů jsou počty karet v balíčcích $(a + 1, b - 1)$. (Vrátili jsme se po hraně, kde otrok s b kartami vyhrál.) Tímto způsobem se můžeme stále vracet, dokud se nedostaneme do stavu $(a + b - 1, 1)$, aniž bychom opustili vrcholy X . To je ale spor, protože jsme už ukázali, že se v množině X nevyskytují vrcholy druhého typu.

Z toho máme, že X je prázdná, neboli že z každého stavu existuje cesta do konce. Otroci tedy na začátku jen projdou všechny svoje karty, aby určili jejich pozice a zjistili tak stav, ve kterém se nachází. Poté si už jen vezmou tento graf a po nějaké jimi dohodnuté cestě se dostanou do konce.

ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ:

Všimněme si, že hru může vyhrát pouze otrok, který měl na začátku kartu 2025. Tu mu totiž nelze vzít. Vlastníka této karty otroci zjistí průchodem celých svých balíčků, podobně jako v předchozím řešení tak zjistí celkový stav hry. Otrok, který má kartu 2025, se bude snažit postupně získávat karty od největší po nejmenší. Když už totiž má všechny karty $m, m + 1, \dots, 2025$, nemůže mu druhý otrok žádnou z těchto karet žádným způsobem vzít. K důkazu, že toto zmíněný otrok dokáže, využijeme následujícího lematu.

Lemma. *Pokud nejsou všechny karty $k, k + 1, \dots, 2025$ u jednoho otroka, oba otroci umí spoluprací zaručit, že nějaká z těchto karet změní svůj balíček.*

Důkaz. Lemma dokážeme indukcí. Pro $k = 1$ je toto tvrzení zjevné, protože už po jednom kole nějaká z karet změní svůj balíček.

Předpokládáme, že lemma platí pro nějaké $k - 1 \geq 1$. Nyní ho dokážeme pro k , a to sporem. Předpokládáme, že otroci nedokážou zajistit, aby jakákoliv z karet $k, k + 1, \dots, 2025$ změnila svůj balíček, tedy se žádné dvě z těchto karet neumí potkat. Poněvadž je ale žádný otrok nemá všechny, ani karty $k - 1, k, k + 1, \dots, 2025$ nemůže mít všechny jeden otrok, a společně tak z indukčního předpokladu umí zajistit, aby nějaká z těchto karet změnila svůj balíček. Z našeho předpokladu víme, že to není žádná z karet $k, k + 1, \dots, 2025$, umí si tudíž předávat kartu $k - 1$, kolikrát chtějí. Začne s ní jeden z otroků, označme si ho A . Druhého označme B . Protože karta $k - 1$ se v nějaké chvíli přesune od A k B , musela se potkat s nějakou kartou $\ell \geq k$, již vlastnil otrok B . Dvojici karet $k - 1$ a ℓ může otrok B vložit do balíčku v pořadí, které si zvolí.

Všimněme si, že se karty $k - 1$ a ℓ chovají stejně vůči všem kartám do $k - 2$, jelikož nad všemi vyhrají. Předpokládali jsme však, že otroci umí zařídit, aby se někdy $k - 1$ potkala s nějakou kartou otroka A o hodnotě alespoň k . Podívejme se na první takovou chvíli. Karta ℓ se nikdy nepotkala s žádnou kartou alespoň k . Ani $k - 1$ se nepotkala s žádnou vyšší kartou, protože toto je první okamžik, kdy se tak stalo. Kdyby byl tedy otrok B býval vložil karty $k - 1$ a ℓ v opačném pořadí,

všechno by se odehrálo stejně, akorát by se momentálně potkávala karta ℓ s nějakou kartou alespoň k . Tím pádem umí otroci zařídit, aby nějaká z těchto dvou karet změnila balíček, což je spor.

S tímto lemmatem jsme už v podstatě hotovi. Nechtě má jeden z otroků všechny karty $m, m+1, \dots, 2025$, avšak kartu $m-1$ má druhý otrok. Z našeho lemmatu pro $k = m-1$ umí otroci zajistit, aby nějaká z těchto karet změnila svůj balíček. Žádná z karet $m, m+1, \dots, 2025$ to ale být nemůže, v nějakém okamžiku si tedy umí předat i kartu $m-1$, čímž bude mít vyhrávající otrok všechny karty o hodnotě alespoň $m-1$. Takže umí nějakým způsobem postupně získávat všechny karty a tak vyhrát.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů se snažila úlohu řešit postupným převáděním karet od nejvyšší po nejnížší. Žádné takové řešení se ale nedobralo cíle, protože téměř vždy podalo nějakou strategii bez důkazu, že by měla fungovat. Za to jsem žádné body neuděloval, protože taková řešení měla daleko od toho, aby byla hotová. Druhé vzorové řešení ale ukazuje, jak například jde myšlenku s tímto postupným předáváním karet dokončit. Všechna tři došlá řešení, která byla správně, postupovala téměř totožně s prvním vzorovým.

(David Hromádka)