

Restaurace

1. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. ÚNORA 2026

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Pět orgů – Alicka, Bára, Cdeněk, David a Káfa – se sešlo v restauraci a každý z nich si objednal buď rybu, nebo salát. Víme, že org, který si objednal rybu, vždy lže a org, který si objednal salát, vždy mluví pravdu. Určete, který org si objednal jaký pokrm, znáte-li následující výpovědi:

- (a) Alicka: „Traja moji kamarádi si objednali jeden rybu.“
- (b) Bára: „Čtyři mí kamarádi si objednali rybu.“
- (c) Cdeněk: „Jeden můj kamarád si objednal salát a tři rybu.“
- (d) David: „Čtyři mí kamarádi si objednali salát.“

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Fofík a pan G čekají, až jim přinesou jídlo, a tak si krátí čas hrou. Hra má pět kol a v každém kole může Fofík vsadit nezápornou celočíselnou částku. Pan G mu řekl, že ve čtyřech kolech z pěti mu vsazenou částku zdvojnásobí a vrátí, ale v jednom kole mu všechny vsazené peníze vezme. Jaká je nejvyšší suma peněz, kterou může Fofík zaručeně po skončení hry mít, má-li před hrou 3 Kč?

ÚLOHA 3. (3 BODY)
V číslkové polévce plave devět nezáporných reálných čísel splňujících, že součet jejich druhých mocnin je alespoň 25. Dokažte, že existují tři z nich, jejichž součet je alespoň 5.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Hedvika si rýsuje do kaše. Nejprve nakreslila pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Poté zkonstruovala kružnici k se středem v bodě A procházející bodem B . Obdobně kružnice ℓ má střed v bodě C a prochází bodem B . Buď P průsečík k a ℓ různý od B . Dále buď m kružnice se středem v P procházející bodem D . Nakonec ať X je její průsečík s ℓ různý od D a Y její průsečík se stranou AE různý od E . Dokažte, že v Hedvičině kaši platí $|AX| = |AY|$.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Ivan má borůvkovou vafli, která má prohlubně tvaru čtverce. Tyto prohlubně tvoří obdélníkovou tabulku $m \times n$ a v každé z nich je maximálně jedna borůvka. Pro i -tou z celkových k borůvek nechť r_i značí počet borůvek v témže řádku (včetně samotné borůvky i) a q_i značí počet borůvek v témže sloupci. Pomozte Ivanovi dokázat, že platí

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i + q_i} \leq \frac{m+n}{4}.$$

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Johy při čekání na jídlo usnula. V jejím snu ji navštívil souvislý graf¹ s 2026 vrcholy, z nichž k jich bylo obarveno červeně, zbylé modře. Johy chtěla umazat některé jeho hrany tak, aby po jejím

¹Více o grafech, souvislosti a stupních se můžeš dočíst třeba v následujícím příspěvku:
<https://prase.cz/library/UvodTeorieGrafuKG/UvodTeorieGrafuKG.pdf>.

zákroku všechny červené vrcholy měly lichý stupeň a všechny modré stupeň sudý. Pro která k se jí to vždy může podařit, nezávisle na původním rozmístění hran a obarvení vrcholů?

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Kladná celá čísla jsou obarvená k barvami, kde $k > 0$. Buď $d_x(n)$ počet dělitelů čísla n , které mají barvu x . Předpokládejme, že pro každé kladné celé n a každé dvě barvy x, y platí $|d_x(n) - d_y(n)| \leq 1$. Určete všechny možné hodnoty k .

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Fofík a pan G se stále nedočkali svého jídla, a tak hrají další hru. Na začátku si Fofík vymyslí polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty. Pan G se pak v každém svém tahu může zeptat na celé číslo a a Fofík mu řekne počet celočíselných kořenů $P(x) = a$. Pan G vyhraje, když Fofík zopakuje nějaké číslo dvakrát (pan G se nemůže ptát na stejné číslo více než jednou). Kolik nejméně dotazů musí pan G položit, aby vynutil výhru?

Restaurace

1. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Pět orgů – Alicka, Bára, Cdeněk, David a Káťa – se sešlo v restauraci a každý z nich si objednal buď rybu, nebo salát. Víme, že org, který si objednal rybu, vždy lže a org, který si objednal salát, vždy mluví pravdu. Určete, který org si objednal jaký pokrm, znáte-li následující výpovědi:

- (a) Alicka: „Traja moji kamaráti si objednali šalát a jeden rybu.“
- (b) Bára: „Čtyři mí kamarádi si objednali rybu.“
- (c) Cdeněk: „Jeden můj kamarád si objednal salát a tři rybu.“
- (d) David: „Čtyři mí kamarádi si objednali salát.“

ŘEŠENÍ:

David a Bára jsou očividně ve sporu (nemůžeme mít čtyři saláty a čtyři ryby zároveň). Alicka a Cdeněk si také protířečí (opět nemůžeme mít tři ryby a tři saláty zároveň). Z obou těchto dvojic alespoň jeden org musí lhát, tudíž máme alespoň dva, kteří si objednali rybu, takže David určitě lže a má rybu. Pokud by Bára měla salát, všichni ostatní by měli rybu. To by ale znamenalo, že Cdeněk má pravdu – tři jeho kamarádi by v tuto chvíli měli rybu, což je spor. Bára tedy sama má rybu. Alicka tvrzení už pravda být nemůže (salát už může mít pouze Cdeněk a Káťa), tedy je rybožrout.

Podíváme se na Kátu: kdyby byla také rybožrout, Cdeněk nemá žádného salátového kamaráda a lže – má rybu. To by ale znamenalo, že Bára má čtyři rybové kamarády, a v tu chvíli by měla pravdu, což je opět spor. Z toho plyne, že Káťa i Cdeněk jsou jedinými pravdomluvnými salátovníky.

Objednávky jsou tedy následovné: Alicka – ryba, Bára – ryba, Cdeněk – salát, David – ryba, Káťa – salát.

POZNÁMKY:

Došlá řešení byla správně.

(Lucka Zůnová)

Úloha 2.

Fofík a pan G čekají, až jim přinesou jídlo, a tak si krátí čas hrou. Hra má pět kol a v každém kole může Fofík vsadit nezápornou celočíselnou částku. Pan G mu řekl, že ve čtyřech kolech z pěti mu vsazenou částku zdvojnásobí a vrátí, ale v jednom kole mu všechny vsazené peníze vezme. Jaká je nejvyšší suma peněz, kterou může Fofík zaručeně po skončení hry mít, má-li před hrou 3 Kč?

ŘEŠENÍ:

Máme nalézt nejvyšší možnou hodnotu, řešení se proto nutně skládá ze dvou částí. V první části ukážeme, že Fofík si umí správným sázením zajistit, že po konci hry bude mít 16 Kč. V druhé části pak dokážeme, že více než 16 Kč garantovat nelze.

Nalezení kandidáta

Stačí, aby Fofík postupně v jednotlivých kolech cílil sázet částky 2, 3, 4, 4, 0 Kč.

Pokud mu pan G v žádném z prvních čtyř kol peníze nevezme, následuje tento předpis sázek až do konce. Vývoj jeho bilance tedy bude vypadat $3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 16 \rightarrow 16$.

Pokud naopak sázku v některém z prvních čtyř kol ztratí, opustí Fofik po onom kole uvedený předpis sázek a až do konce hry sází „all-in“ (tedy vše, co má). Snadno se spočte, že ve všech takových případech skončí Fofik hru s 16 Kč v kapse – např. při ztrátě sázky ve třetím kole bude vývoj jeho bilance $3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16$.

Potvrzení optimality

Předně si všimněme, že vsadí-li Fofik v libovolném kole více, než mu nakazuje strategie výše, tak panu G stačí v prvním takovém kole sázku vzít.¹ Do té doby totiž Fofik vždy sázel částky stejně či méně vysoké jako v předpisu, jeho dosavadní jmění je proto menší či rovno dosavadnímu jmění při strategii předpisu. Proto poté, co mu pan G sázku vezme, nedokáže Fofik (i přes následné sázení all-in) mít na konci hry více než 16 Kč.

Fofik tedy nutně v každém kole sází stejně či méně, než říká předpis. Pak ale v té variantě hry, kdy pan G sázku zabaví až v posledním pátém kole, Fofik do pátého kola vstoupí s nanejvýš 16 Kč. V tomto kole nutně vsadí 0 Kč, a tedy hru zakončí s kapitálem nejvýše 16 Kč. Sázením menších částek, než říká předpis, tedy nelze garantovat výhru větší než 16 Kč.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů se snažila o (nějak osekáný) rozbor případů, ne vždy se jim ale povedlo dostatečně dobře zdůvodnit, že jimi nalezená hodnota je skutečně optimální. Vzorové řešení je proto ukázkou toho, jak toto odůvodnění šlo udělat rychle a přitom kompletně. Velice pak chválím ty řešitele, kteří si úlohu převedli do soustavy nerovnic a z toho již, bez dalších pochybností o optimalitě, odvodili jediné možné řešení. (Josef „José“ Soural)

Úloha 3.

V číslkové polévce plave devět nezáporných reálných čísel splňujících, že součet jejich druhých mocnin je alespoň 25. Dokažte, že existují tři z nich, jejichž součet je alespoň 5.

ŘEŠENÍ:

Čísla pojmenujeme od největšího po nejmenší $a_1, a_2, \dots, a_9$. Pokud některá trojice bude mít součet větší nebo roven 5, tak i $a_1 + a_2 + a_3 \geq 5$, proto dává smysl se při řešení zaměřit na ní. Podívejme se na výraz

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_2a_3 + 2a_1a_3.$$

Jelikož a_1, a_2 a a_3 jsou větší nebo rovna ostatním (a všechna čísla jsou nezáporná), platí také $a_m a_n \geq a_\ell^2$ pro $n, m \in \{1, 2, 3\}$ a $\ell \geq 4$. Náš výraz tedy umíme odhadnout následovně:

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_2a_3 + 2a_1a_3 \geq \sum_{i=1}^9 a_i^2 \geq 25.$$

Odtud $(a_1 + a_2 + a_3)^2 \geq 25$, což díky nezápornosti čísel můžeme odmocnit, a dostáváme kýžené $a_1 + a_2 + a_3 \geq 5$.

POZNÁMKY:

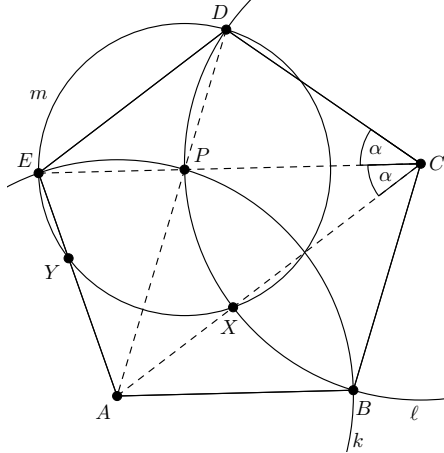
Většina řešení postupovala stejně jako vzorové. Špatná řešení obvykle nějakým způsobem předpokládala, že průměr druhých mocnin čísel je to samé jako jejich aritmetický průměr na druhou, což bohužel neplatí. (Anička Trnková)

¹To vždy může. Pokud už totiž pan G sebrání použil, bude Fofik zjevně až do konce hry sázet all-in, přesně jak mu strategie nařizuje. Situace vsazení více než dle předpisu tedy nastane jen tehdy, když pan G ještě může sebrání použít.

Úloha 4.

Hedvika si rýsuje do kaše. Nejprve nakreslila pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Poté zkonstruovala kružnici k se středem v bodě A procházející bodem B . Obdobně kružnici ℓ má střed v bodě C a prochází bodem B . Buď P průsečík k a ℓ různý od B . Dále buď m kružnice se středem v P procházející bodem D . Nakonec ať X je její průsečík s ℓ různý od D a Y její průsečík se stranou AE různý od E . Dokažte, že v Hedvičině kaši platí $|AX| = |AY|$.

ŘEŠENÍ:



Víme, že veškeré strany pětiúhelníku jsou si rovny, tedy $|AB| = |BC|$. Dále ze zadání víme, že $B \neq P$ a že díky kružnici k platí rovnost $|AB| = |AP|$ a díky kružnici ℓ platí $|BC| = |CP|$. Z toho plyne, že $ABCP$ je kosočtverec. Díky tomuto kosočtverci jsme schopni snadno ukázat, že P je průsečík přímek AD a CE . Z kosočtverce víme, že $AB \parallel CP$ a z vlastností pravidelného pětiúhelníku plyne, že $AB \parallel CE$, tedy $CP \parallel CE$, nutně tedy $P \in CE$. Analogicky pak dokážeme, že $P \in AD$.

Teď dokážeme, že X leží na přímce AC . Nechť si teď označíme třetinu velikosti úhlu při vrcholu pětiúhelníku jako $\alpha = 36^\circ$ (tedy třeba $|\angle ABC| = 3\alpha + 180^\circ = 5\alpha$). Jelikož zadaný pětiúhelník je pravidelný a jeho vrcholy leží na jedné kružnici, úhlopříčky CE a CA určují obvodové úhly $|\angle DCE| = |\angle ECA| = \frac{360^\circ}{2 \cdot 5} = \alpha$. Zároveň z věty sss plyne, že $\triangle PDC \cong \triangle PXC$, poněvadž sdílejí stranu PC , $|CD| = |CX|$ (z kružnice ℓ) a $|PD| = |PX|$ (z kružnice m). Z této shodnosti víme, že $|\angle PCD| = |\angle PCX|$. Zároveň ale díky tomu, že P leží na CE , platí, že $|\angle PCD| = |\angle ECD| = \alpha$, proto tedy $|\angle PCX| = |\angle PCA| = \alpha$. Jelikož ze zadání plyne, že $D \neq X$, leží X na přímce AC .

Zbývá nám ukázat shodnost $\triangle AYP \cong \triangle AXP$. Z kružnice m platí $|PX| = |PY|$ a oba trojúhelníky sdílejí stranu $|AP|$, musíme tedy dokázat rovnost $|\angle YPA| = |\angle APX|$, resp. $|\angle DPY| = |\angle XPD|$. Úhel $\angle XPD$ je obvodový úhel u kružnice ℓ , platí tedy z věty o obvodových a středových úhlech

$$|\angle XPD| = 180^\circ - \frac{|\angle DCX|}{2} = 180^\circ - \frac{|\angle DCA|}{2} = 180^\circ - \alpha = 4\alpha.$$

Úhel $\angle DPY$ je zase středový úhel v kružnici m k obvodovému úhlu $\angle DEY$, tedy

$$\begin{aligned} |\angle DEY| &= 180^\circ - \frac{|\angle DPY|}{2}, \\ |\angle DPY| &= 360^\circ - 2|\angle DEY|, \\ |\angle DPY| &= 360^\circ - 6\alpha = 4\alpha. \end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy rovnost úhlů $|\angle DPY| = |\angle XPD|$ a s tím i shodnost $\triangle AYP \cong \triangle PXA$, z níž už plyne rovnost $|AX| = |AY|$.

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správně. Nejčastější chyby, které se objevovaly, byly vynechávání části důkazu (hlavně u tvrzení, že X leží na AC a podobné), zaměňování písmenek v řešení, která někdy ani nebyla definována, nebo aritmetické chyby. (Ondřej Sedláček)

Úloha 5.

Ivan má borůvkovou vafli, která má prohlubně tvaru čtverce. Tyto prohlubně tvoří obdélníkovou tabulku $m \times n$ a v každé z nich je maximálně jedna borůvka. Pro i -tou z celkových k borůvek nechť r_i značí počet borůvek v témže řádku (včetně samotné borůvky i) a q_i značí počet borůvek v témže sloupci. Pomozte Ivanovi dokázat, že platí

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i + q_i} \leq \frac{m+n}{4}.$$

ŘEŠENÍ:

Označme A množinu obsazených políček a pro borůvku na pozici $(i, j) \in A$ značme R_i počet borůvek v i -tém řádku a S_j počet borůvek v j -tém sloupci. Dokazujeme tedy

$$\sum_{(i,j) \in A} \frac{1}{R_i + S_j} \leq \frac{m+n}{4}.$$

Ukážeme, že pro libovolná kladná celá čísla a, b platí nerovnost:

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Vynásobením obou stran $ab(a+b) > 0$ dostaneme $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Což se snadno upraví na $(a-b)^2 \geq 0$.

Aplikací na každý sčítanec s $a = R_i, b = S_j$ obdržíme

$$\sum_{(i,j) \in A} \frac{1}{R_i + S_j} \leq \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A} \frac{1}{R_i} + \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A} \frac{1}{S_j}.$$

Podívejme se na první sumu. Tu přeuspořádáme podle řádků: v i -tém řádku leží právě R_i borůvek, každá přispívá nejvýše $\frac{1}{R_i}$. Příspěvek celého řádku je tedy nejvýše $R_i \cdot \frac{1}{R_i} = 1$. Sčítáme jen přes neprázdné řádky, kterých je nejvýše m , takže

$$\sum_{(i,j) \in A} \frac{1}{R_i} \leq m.$$

Zcela analogicky přeuspořádáním podle sloupců dostaneme $\sum_{(i,j) \in A} \frac{1}{S_j} \leq n$. Dohromady tedy

$$\sum_{(i,j) \in A} \frac{1}{R_i + S_j} \leq \frac{1}{4} m + \frac{1}{4} n = \frac{m+n}{4},$$

což jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správně, až na ta, co nebyla.

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

Úloha 6.

Johy při čekání na jídlo usnula. V jejím snu ji navštívil souvislý graf² s 2026 vrcholy, z nichž k jich bylo obarveno červeně, zbylé modře. Johy chtěla umazat některé jeho hrany tak, aby po jejím zákroku všechny červené vrcholy měly lichý stupeň a všechny modré stupeň sudý. Pro která k se jí to vždy může podařit, nezávisle na původním rozmístění hran a obarvení vrcholů?

ŘEŠENÍ:

Nejprve dokážeme, že k je sudé. Pro každý graf platí, že součet stupňů všech jeho vrcholů je sudý (každá hrana přispívá jedničkou ke stupni obou svých koncových vrcholů). Modře je obarveno $2026 - k$ vrcholů a každý z nich má sudý stupeň, takže součet jejich stupňů je také sudý. Aby byl celkový součet stupňů sudý, musí mít i zbylých k červených vrcholů sudý součet stupňů. Jelikož stupeň červených vrcholů je lichý, tak jejich počet musí být sudý, čili k je sudé, a proto můžeme psát $k = 2\ell$.

Dále ukážeme, že pro libovolné sudé $k \leq 2026$ to již lze. Protože každý souvislý graf obsahuje strom jako podgraf (tzv. kostru), stačí toto tvrzení dokázat pro stromy s 2026 vrcholy. Z libovolného jiného souvislého grafu s 2026 vrcholy totiž může Johy umazat nějaké hrany tak, aby vznikl strom.

Mějme tedy graf G s 2026 vrcholy, který je strom. Zadefinujeme si následující pomocné značení: Předpokládejme, že na začátku mají všechny hrany černou barvu. V okamžiku kdy rozhodneme, zda tam Johy hranu nechá, nebo ji smaže, přebarvíme hranu buďto na červenou (hrana bude smazána) nebo na zelenou (hranu tam ponechá). Dále každý vrchol označme křížkem. Když bude mít nějaký vrchol všechny svoje hrany červené nebo zelené, přeznačíme křížek na kolečko.

Nyní budeme pokračovat následovně: Jelikož G je strom, existuje v něm alespoň jeden list. Pokud je listů více, vybereme jeden z nich a podíváme se na jeho barvu. Z listu vede pouze jedna hrana, tudíž je-li daný list červený, hranu, co z něj vychází, obarvíme zeleně. Pokud je modrý, obarvíme vycházející hranu červeně. Tím máme obarveny všechny hrany, které vychází z daného listu, a proto u něj přepíšeme křížek na kolečko. Počet zelených hran u tohoto vrcholu má již správnou paritu vzhledem k jeho barvě. Takto postupně vyřešíme všechny listy v grafu G .

Dále se podíváme na graf, který je tvořen pouze vrcholy označenými křížky a hranami s černou barvou. Označme si ho G' . Protože G' vznikl z G po odstranění listů, je to opět strom. Existuje v něm zase alespoň jeden list, na který se zaměříme. Podíváme se na paritu počtu zelených hran, které z něj vedou, jež jsme obarvili už předtím. (Tyto hrany nejsou součástí G' . Jsou to hrany, na kterých „visí“ listy z předešlého odstavce.) Pokud je parita tohoto počtu správná vzhledem k barvě vrcholu, tak jediná hrana, která vede z daného vrcholu a patří do G' , dostane červenou barvu, jinak dostane barvu zelenou.

Tento postup budeme opakovat dále, až dostaneme strom se dvěma vrcholy a jednou hranou. Vybereme libovolný ze dvou vrcholů a uděláme s ním to samé, co doposud. Tím všechny vrcholy kromě jednoho mají správnou barvu vzhledem ke své paritě (pokud bereme, že červené hrany v grafu vlastně nejsou, protože to jsou ty, co Johy potom smaže). Zbývá nám tedy ukázat, že i tento poslední vrchol, označme si ho v , má správnou barvu.

K tomu využijeme, že k je sudé. Pokud je v červený, tak z ostatních vrcholů je $k - 1 = 2\ell - 1$ červených a $2026 - k = 2026 - 2\ell$ modrých, díky tomu, že jsme na začátku položili $k = 2\ell$. Modré vrcholy mají součet stupňů sudý a $2\ell - 1$ červených vrcholů má součet stupňů lichý. Aby byl celkový součet stupňů sudý, musí mít vrchol v lichý stupeň, takže jeho barva je správná.

Pokud je v modrý, pak má $k = 2\ell$ vrcholů červenou barvu a zbytek modrou. Červených 2ℓ vrcholů i $2026 - 2\ell - 1$ modrých vrcholů má tedy sudý součet stupňů. Aby i celkový součet stupňů byl sudý, musí mít v sudý stupeň, a tudíž je jeho barva opět správná.

²Více o grafech, souvislosti a stupních se můžeš dočíst třeba v následujícím příspěvku: <https://prase.cz/library/UvodTeorieGrafuKG/UvodTeorieGrafuKG.pdf>.

POZNÁMKY:

Prakticky všechna řešení správně dokazovala, že k musí být sudé. Tak přibližně polovina zvládla ukázat, že pro všechna sudá k to již lze. Za důkaz, že k je sudé, jsem udělovala bod. Poté jsem udělovala 1 až 4 body za to, jak moc správný byl zbytek důkazu. (Tereza Matějková)

Úloha 7.

Kladná celá čísla jsou obarvená k barvami, kde $k > 0$. Buď $d_x(n)$ počet dělitelů čísla n , které mají barvu x . Předpokládejme, že pro každé kladné celé n a každé dvě barvy x, y platí $|d_x(n) - d_y(n)| \leq 1$. Určete všechny možné hodnoty k .

ŘEŠENÍ:

Tvrdíme, že $k \in \{1, 2, 3\}$.

Nejprve ukážeme, že $k \leq 3$. Pro spor předpokládejme, že $k > 3$. Vezmeme libovolné obarvení k barvami pro libovolné $k > 3$. Jelikož existuje nekonečně mnoho prvočísel a k je konečné, tak nějaká dvě různá prvočísla, označme je p, q , musí mít stejnou barvu. Označme tuto barvu b . Číslo $n = pq$ má 4 dělitele – $1, p, q, pq$ a alespoň dva z nich mají barvu b . Barev je ale více než 3, tedy nějakou z barev nemá žádný dělitel pq , označme ji c . Potom $|d_b(pq) - d_c(pq)| \geq 2$, což je spor. Zbývá nám zkonstruovat obarvení s postupně jednou, dvěma a třemi barvami.

Pro $k = 1$ stačí obarvit všechna přirozená čísla stejnou barvou.

Dále definujeme funkci $\Omega : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$, která každému přirozenému číslu $n = p_1 \cdots p_m$, kde p_i pro $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ jsou (ne nutně různá) prvočísla, přiřadí číslo m . (Prázdný součin je roven 1, tedy $\Omega(1) = 0$.) Tato funkce je dobře definovaná z jednoznačnosti a existence prvočíselného rozkladu.

Pro $k = 3$ pojmenujeme barvy 0, 1, 2 a číslo n obarvíme barvou $\Omega(n) \bmod 3$. Pro každé číslo n označíme ρ_n trojici čísel, kde první člen trojice je roven počtu dělitelů n s barvou 0, druhý člen počtu dělitelů n s barvou 1 a třetí člen počtu dělitelů n s barvou 2. Uspořádanou trojici celých čísel nazveme *vyváženou* právě tehdy, když platí, že rozdíl libovolných dvou jejích prvků je nejvýše jedna. Ze zadání nám stačí ukázat, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je ρ_n vyvážená. To dokážeme indukci podle počtu různých prvočinitelů v rozkladu n .

Pro $n = 1$ (tedy případ s nula prvočiniteli) je $\rho_1 = (1, 0, 0)$. Před indukčním krokem si uvědomíme, že trojice je vyvážená právě tehdy, když je jednoho ze sedmi tvarů: $(a, a, a + 1)$, $(a, a + 1, a)$, $(a + 1, a, a)$, $(a, a, a - 1)$, $(a, a - 1, a)$, $(a - 1, a, a)$, (a, a, a) pro nějaké celé číslo a (implikace zprava doleva je očividná, opačnou implikaci dostaneme například jednoduchým rozбором případů, které číslo z trojice je neostře nejmenší). Dále si uvědomíme, že rozdíly mezi členy trojice, tedy i to, zda je vyvážená či nikoliv, se nijak nezmění, když od trojice odečteme násobek trojice $(1, 1, 1)$ (trojice sčítáme i násobíme číslem po složkách).

Nyní indukční krok. Necht' je ρ_n vyvážená. Chceme ukázat, že $\rho_{p^\alpha \cdot n}$, pro p libovolné prvočíslo takové, že $p \nmid n$ a $\alpha \in \mathbb{N}$, je vyvážená. Dělitele n označíme $d_1, \dots, d_k$. Uvědomíme si, že jelikož $p \nmid n$, tak všechny dělitele $p^\alpha \cdot n$ budou právě dělitele n přenásobené p^i pro $0 \leq i \leq \alpha$. Tím myslíme:

$$d_1, d_2, \dots, d_k, pd_1, pd_2, \dots, pd_k, \dots, p^\alpha d_1, p^\alpha d_2, \dots, p^\alpha d_k.$$

Spočtením výskytů jednotlivých barev mezi čísly $d_1, \dots, d_k$ dostaneme trojici čísel $\rho_n = (a, b, c)$. (Dále budeme říkat, že (a, b, c) odpovídá množině čísel $d_1, \dots, d_k$.) Všimneme si, že když (a, b, c) odpovídá číslům $d_1, \dots, d_k$, tak (c, a, b) odpovídá číslům $pd_1, \dots, pd_k$. Tedy platí, že trojice odpovídají číslům p^i -krát dělitele n bude rovna ρ_n s i -krát cyklicky permutovanými členy. (Cyklickou permutací myslíme provedení i -krát operace $(a, b, c) \rightarrow (c, a, b)$.) Pro $\rho_n = (a, b, c)$ tedy bude $\rho_{p^\alpha n}$ rovna součtu několika prvních členů posloupnosti

$$(a, b, c), (c, a, b), (b, c, a), (a, b, c), (c, a, b), (b, c, a), \dots \quad (*)$$

Nyní již můžeme dokázat vyváženost $\rho_{p^\alpha n}$. Dříve jsme si všimli, že vyváženost nemění odečtení násobku trojice $(1, 1, 1)$. Spočteme tedy $\rho_{p^\alpha n}$ minus nějaký námi vhodně zvolený násobek trojice

$(1, 1, 1)$. To, jaký násobek odečteme od $\rho_{p^\alpha n}$, rozhodneme až při výpočtu $\rho_{p^\alpha n}$. Jelikož je ρ_n vyvážená a od každého členu posloupnosti $(*)$ odečteme $A \cdot (1, 1, 1)$, kde A je takové číslo, aby trojice $(a - A, b - A, c - A)$ obsahovala právě jednu plus nebo minus jedničku a dvě nuly nebo právě tři nuly. Dohromady od $\rho_{p^\alpha n}$ odečteme $(\alpha + 1)A \cdot (1, 1, 1)$. Trojice $\rho_{p^\alpha n} - (\alpha + 1)A \cdot (1, 1, 1)$ bude tedy rovna součtu $(\alpha + 1)$ po sobě jdoucích členů následujících cyklických posloupností:

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0), (0, 0, 0), \dots \\ &(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \dots \\ &(-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1), \dots \end{aligned}$$

a těch posloupností, které dostaneme, vymazáním prvního nebo prvních dvou členů. Nakonec dostaneme vyváženou trojici. Stačí si uvědomit, že součty zmíněné výše budou vyvážené. To je již ale opravdu očividné (právě v tomto kroku by ale selhala obdobná konstrukce pro $k \leq 4$). Tedy $\rho_{n \cdot p^\alpha}$ je vyvážená a z principu indukce jsme hotovi.

Pro $k = 2$ obarvíme každé číslo n barvou $\Omega(n) \bmod 2$. Důkaz korektnosti můžeme vést analogicky jako pro $k = 3$, jen toho budeme méně k ověřování.

Nechť ρ_n bude značit dvojici, kde první člen je roven počtu dělitelů n barvy 0 a druhý počtu dělitelů barvy 1. Vyvážené dvojice mají stejnou definici jako vyvážené trojice.

Indukcí dle počtu různých prvočinitelů v rozkladu n ukazujeme, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je ρ_n vyvážená. Platí, že ρ_1 je vyvážená. Dvojice je vyvážená právě tehdy, když je tvaru $(a, a + 1)$, (a, a) nebo $(a, a - 1)$. Odečtením násobku $(1, 1)$ se vyváženost nezmění. Indukční krok: ρ_n je jednoho z typů $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$ chceme ukázat, že $\rho_{n \cdot p^\alpha}$ je vyvážená ($p \nmid n$). Všechny dělitele $n \cdot p^\alpha$ budou dělitele n přenásobené p^i pro $0 \leq i \leq \alpha$. Sčítáním členů cyklické posloupnosti

$$\begin{aligned} &(0, 0), \dots \\ &(0, 1), (1, 0), \dots \\ &(0, -1), (-1, 0), \dots \end{aligned}$$

dostaneme vyváženou dvojici. Tedy $\rho_{n \cdot p^\alpha}$ je vyvážená a z principu indukce jsme hotovi.

POZNÁMKY:

Většina řešení dokázala, že k nemůže být větší než 3, našla konstrukci pro 1, 2, 3 a dokázala, že fungují ty pro 1 a 2. To že funguje (v řešení uvedená) konstrukce pro $k = 3$ ukázalo jen velmi málo řešitelů.

(Ivan Žemlička)

Úloha 8.

Fofík a pan G se stále nedočkali svého jídla, a tak hrají další hru. Na začátku si Fofík vymyslí polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty. Pan G se pak v každém svém tahu může zeptat na celé číslo a a Fofík mu řekne počet celočíselných kořenů $P(x) = a$. Pan G vyhraje, když Fofík zopakuje nějaké číslo dvakrát (pan G se nemůže ptát na stejné číslo více než jednou). Kolik nejméně dotazů musí pan G položit, aby vynutil výhru?

ŘEŠENÍ:

Nejprve ukážeme, že panu G stačí vždy 4 otázky. K tomu budeme potřebovat následující lemma.

Lemma. Nechť $P(x) = a$ má alespoň 3 celočíselné kořeny. Poté $P(x) = a - 1$ a $P(x) = a + 1$ nemá žádné celočíselné kořeny.

Důkaz. Využijeme známého tvrzení, že pro libovolný polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty a celá čísla x, y platí $x - y \mid P(x) - P(y)$. Označme si nějaké tři různé kořeny $P(x) = a$ jako r_1, r_2, r_3 a pro spor nechť $P(x) = a - 1$ má nějaký celočíselný kořen ℓ . Pak

$$r_i - \ell \mid P(r_i) - P(\ell) = a - (a - 1) = 1,$$

tedy $|r_i - \ell| = 1$ pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$.

Můžeme si ale všimnout, že pokud máme 3 různá celá čísla, tak neexistuje žádné celé číslo, které by od všech mělo vzdálenost 1. Máme tak spor a $P(x) = a - 1$ nemá celočíselné kořeny. Obdobně můžeme ukázat, že ani $P(x) = a + 1$ nemá celočíselné kořeny. $\square$

Pan G se zeptá postupně na čísla 1, 2, 3. Předpokládáme, že dostane postupně různé odpovědi b_1, b_2, b_3 . Rozlišíme dva případy podle toho, jestli nějaká odpověď byla alespoň 3.

Pokud je nějaká odpověď alespoň 3, tak to určitě nemůže být b_2 . Poté by b_1 i b_3 z našeho lemmatu byly nula, tedy by se nám něco zopakovalo. Pokud je $b_1 \geq 3$, tak z lemmatu $b_2 = 0$, a pokud se pan G doptá ještě na $P(x) = 0$, tak se podle lemmatu zopakuje nula. Obdobně pokud $b_3 \geq 3$, tak se pan G doptá na $P(x) = 4$ a zopakuje se nula.

Pokud jsou všechny odpovědi menší než 3, tak se jedná o čísla 0, 1, 2 v nějakém pořadí. Tedy musí nastat alespoň jedno z $b_1 \neq 0$ a $b_3 \neq 0$. Pokud $b_1 \neq 0$, tak se pan G doptá na $P(x) = 0$. Musí ale dostat odpověď menší než 3, jinak by z lemmatu bylo $b_1 = 0$. Z Dirichletova principu se nám tak muselo nějaké číslo zopakovat. Obdobně pokud $b_3 \neq 0$, tak se pan G může doptat na $P(x) = 4$.

Ještě nám zbývá ukázat, že 3 dotazy panu G nestačí. Neboli, že ať se pan G zeptá postupně na jakákoliv různá čísla a_1, a_2, a_3 , tak existuje polynom $P(x)$, který si mohl Fofik na začátku vybrat, aby všechny odpovědi byly různé. Bude se jednat například o následující polynom $P(x) = a_1 + (a_2 - a_1)x^{2^k}$, kde k je nějaké přirozené číslo takové, že $\frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} < 2^{2^k}$.

Na otázku $P(x) = a_1$ dostane pan G odpověď 1, protože $a_1 + (a_2 - a_1)x^{2^k} = a_1$ má zjevně pouze jedno řešení $x = 0$. Na otázku $P(x) = a_2$ dostane odpověď 2, protože úpravou $a_1 + (a_2 - a_1)x^{2^k} = a_2$ získáme $x^{2^k} = 1$, což má řešení $x = 1$ a $x = -1$.

Nakonec na otázku $P(x) = a_3$ dostane odpověď 0. Z $a_1 + (a_2 - a_1)x^{2^k} = a_3$ získáme $x^{2^k} = \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1}$. Čísla $-1, 0, 1$ určitě nejsou řešením, protože $P(-1), P(0), P(1) \neq a_3$. Určitě tedy $|x| \geq 2$, tj. $\frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} = x^{2^k} \geq 2^{2^k} > \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1}$, což je spor. $P(x) = a_3$ tak opravdu nemá žádné řešení.

Pan G tak od Fofika po libovolných třech otázkách může dostat různé odpovědi, takže opravdu nejmenší potřebný počet dotazů je 4, což jsme chtěli ukázat.

POZNÁMKY:

Většina došlých řešení byla správně a všechna byla velmi originální, jak ve strategii a důkazu její správnosti, tak v konstrukci polynomu, na který 3 otázky nestačí. (David Hromádka)