Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 12. KVĚTNA 2025

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

ÚLOHA 1.

(a) Vítek nalezl na Marsu číslo, jehož zápis v sedmičkové soustavě tvoří tři číslice. V devítkové soustavě jej tvoří stejné tři číslice, ale zapsané v opačném pořadí. Určete prostřední z těchto číslic. (2 BODY)

(b) Létající talíř unesl čísla $1, \ldots, 4322$ a přeuspořádal je do posloupnosti $a_1, \ldots, a_{4322}$. Dokažte, že mezi čísly $|a_1 - 1|, \ldots, |a_{4322} - 4322|$ jsou alespoň dvě stejná. (3 BODY)

ÚLOHA 2.

(a) Sylva tvrdí, že našla pět pravidelných mnohostěnů a slepila z nich jeden větší pravidelný mnohostěn. Mohlo se to opravdu stát? (2 BODY)

(b) Lenka má čtyřstěn s výškami h_1, h_2, h_3, h_4. Štěpán si uvnitř něj zvolil bod X. Označme x_1, x_2, x_3, x_4 vzdálenosti bodu X od jednotlivých stěn čtyřstěnu. Dokažte, že

$$\sqrt{h_1 + h_2 + h_3 + h_4} \geq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}.$$

(3 BODY)

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Na tabuli máme pět čísel 1, 3, 5, 7, 9. V jednom kroku můžeme vzít čtyři z těchto pěti čísel, označit je jako a, b, c, d a nahradit je čísly

$$\frac{a+b+c-d}{2}, \qquad \frac{a+b-c+d}{2}, \qquad \frac{a-b+c+d}{2}, \qquad \frac{-a+b+c+d}{2}.$$

Můžeme po konečném počtu kroků získat čísla:

(a) 0, 2, 4, 6, 8? (2 BODY)

(b) 3, 4, 5, 6, 7? (3 BODY)

ÚLOHA 4.

(a) V řadě stálo 15 párů bot. Potom ale přišel Zdeněk a boty v řadě zamíchal dle své zlovůle, takže levá a pravá bota do páru nemusí nutně stát vedle sebe. Ukažte, že existuje souvislý úsek 10 bot, mezi nimiž se vyskytuje stejný počet pravých bot jako levých bot. (2 BODY)

(b) 2025 matfyzáků si povyměňovalo trička. V každém kole se mohou někteří lidé spárovat a prohodit si v párech trička. Určete nejmenší k takové, že matfyzáci dovedou nehledě na počáteční rozmístění triček po k kolech docílit toho, aby každý měl své vlastní tričko. (3 BODY)

Úloha 5.

(a) Macker zbožňuje posloupnosti. Zvolil si aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d a geometrickou posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q. Nakonec si vytvořil posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, jež splňuje $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ pro všechna $n \geq 1$. Všiml si, že pro všechna n platí $c_n = a_n + b_n$. Určete všechny možné hodnoty d a q, víte-li, že posloupnost absolutních hodnot $(|c_n|)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí. (2 body)

(b) Nalezněte všechna celočíselná řešení rovnice

$$x^{4x^2+2} + x^4 - x^2 - 1 = y^6.$$

(3 body)

Úloha 6.

(a) Soustředění se účastní 40 lidí a každý má mezi ostatními nějaké idoly, přičemž nikdo není svým vlastním idolem. Platí, že každých 19 lidí na sousu má právě jeden společný idol. Dokažte, že lze na sousu vybrat skupinu 20 lidí, ve které nikdo není společným idolem zbylých devatenácti. (2 body)

(b) V rovině je vyznačeno n bodů. Nejmenší vzdálenost mezi dvěma z nich je 1. Dokažte, že můžeme několik bodů odebrat tak, aby alespoň $\frac{n}{4}$ bodů zbylo a zároveň žádné dva z nich nebyly vzdáleny přesně 1 od sebe. (3 body)

Úloha 7.

(a) V každém bodě čtvercové mřížky $2n \times 2n$ roste strom. Drvoštěp Daník může některé stromy pokácet, čímž se z nich stanou pařezy. Dva pařezy na sebe vidí, pokud na úsečce, která je spojuje, neroste žádný strom. Kolik nejvýše stromů může Daník pokácet, aby na sebe žádné dva pařezy neviděly? (2 body)

(b) Nechť n je přirozené číslo a $p \geq n$ liché prvočíslo. Budiž q nejmenší prvočíselný dělitel čísla $n^p + 1$. Dokažte, že $n + 1$ je násobkem q. (3 body)