

Polynomy 3

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. DUBNA 2025

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

Ať je n násobek čtyř. *Hrací kostkou* rozumějme zařízení, které má n kladných celých čísel (mohou se opakovat) a které při hodu vrátí jednu z těchto hodnot, každou se stejnou pravděpodobností. *Standardní* hrací kostka je ta s čísly $1, \dots, n$. Dokažte, že existují hrací kostky A, B , které nejsou standardní, ale přitom součet hodu A a hodu B dává stejné hodnoty a se stejnou četností, jako součet hodů dvěma standardními kostkami.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)

Označme M množinu všech uspořádaných 44tic nezáporných celých čísel se součtem 2025. Určete¹

$$\sum_{(a_1, \dots, a_{44}) \in M} a_1 \cdots a_{44}.$$

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Kdykoliv je S množina nějakých nezáporných celých čísel, ať pro nezáporné celé n značí $f_S(n)$ počet uspořádaných dvojic (s_1, s_2) , pro něž $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ a $s_1 + s_2 = n$. Rozhodněte, zdali lze množinu všech nezáporných celých čísel rozdělit na dvě disjunktní A, B tak, aby $f_A(n) = f_B(n)$ pro všechna nezáporná celá n .

¹Sumačním zápisem se zde myslí, že sečteme součiny $a_1 \cdots a_{44}$ pro všechny 44tice $(a_1, \dots, a_{44})$ z množiny M .