Opakování

3. podzimní série   Termín odeslání: 2. prosince 2024

V této sérii pomocí $f^k(n)$ značíme $\underbrace{f(f(\cdots f(}_{k\text{-krát}}n)\cdots))$.

Úloha 1. (3 body)
Pro kladné celé číslo n definujme

$$f(n) = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n\text{-krát}},$$

kde sčítáme n sčítanců. Určete nejmenší n takové, že $f(n)$ je násobkem 45.

Úloha 2. (3 body)
Označme $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Určete $f^{2025}(2024)$.

Úloha 3. (3 body)
Johy na tabuli napsala čísla 5, 7 a 11. Poté v každém kroku vybrala z tabule dvě čísla a, b a připsala tam také číslo $5a - 4b$. Mohlo se na tabuli po konečném počtu kroků objevit číslo 2024?

Úloha 4. (5 bodů)
Označme $\mathbb{P}$ množinu všech prvočísel. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ takové, že pro libovolná $p, q \in \mathbb{P}$ platí

$$\mathrm{NSD}(p, q) = \mathrm{NSD}(f^p(q), f^q(p)).$$

Úloha 5. (5 bodů)
Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je funkce daná předpisem

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{pokud je } n \text{ sudé,} \\ 3n+1, & \text{pokud je } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ lze zvolit $k \in \mathbb{N}$ takové, že v nekonečné posloupnosti

$$kn, \quad f(kn), \quad f(f(kn)), \quad f(f(f(kn))), \quad \ldots$$

se vyskytne číslo 1.

Úloha 6. (5 bodů)
Štěpán si nakreslil svůj oblíbený nedegenerovaný trojúhelník. Poté v každém kroku opakoval následující: změřil délky stran a, b, c svého současného trojúhelníku, smazal jej a pokusil se nakreslit nový trojúhelník s délkami stran $a + b - c$, $a + c - b$, $b + c - a$. Pokud z úseček s těmito délkami nešel sestrojit nedegenerovaný trojúhelník, Štěpán kreslení zanechal. Určete všechny možné délky stran prvního trojúhelníku, pokud víte, že Štěpán kreslil nové a nové trojúhelníky do nekonečna.

Úloha 7. (5 bodů)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno $k \in \mathbb{N}$ splňující $f^k(n) \le n + k + 1$.

Úloha 8. (5 bodů)

Lukáš na tabuli napsal konečně mnoho racionálních čísel. Poté přišla Bára, z tabule zvolila dvě čísla x, y (ne nutně různá) taková, že $xy \neq 1$, a připsala na tabuli také číslo $\frac{x+y}{1-xy}$. Toto mohla libovolně mnohokrát zopakovat. Dokažte, že ať napsal Lukáš na tabuli jakákoliv čísla, vždy existovalo nějaké $q \in \mathbb{Q}$, které Bára na tabuli nemohla dostat, ať se snažila sebevíc.