

Polynomy 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. ÚNORA 2025

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Mějme polynom $P \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že pro každé kladné celé číslo n dává $P(P(n))$ po dělení n zbytek $n - 1$. Dokažte, že P nemá žádný celočíselný kořen.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Je dáno celé číslo $n \geq 4$. Na tabuli je předepsáno

$$\square x^n + \square x^{n-1} + \dots + \square x + \square.$$

Annička a Bára hrají následující hru: v jednom tahu si hráč zvolí některé dosud prázdné políčko a vepíše do něj nenulové racionální číslo podle svého výběru. Annička hraje jako první a hráči se následně v tazích střídají. Hra končí, jakmile jsou zaplněna všechna políčka, tedy když bude na tabuli napsán polynom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x].$$

Annička zvítězí, pokud má P racionální kořen, v opačném případě vítězí Bára. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Celé číslo nazveme *bezčtvercovým*, pokud není násobkem p^2 pro žádné prvočíslo p . Rozhodněte, zda existuje nekonstantní polynom $P \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že pro každé celé číslo n je $P(n)$ bezčtvercové číslo.