Geometrie a geografie

2. jarní série — Termín odeslání: 3. března 2025

Úloha 1. (3 body)

Existuje konvexní čtyřúhelník takový, že když ho rozdělíme podle kterékoliv úhlopříčky na dva trojúhelníky, budou vždy oba tupoúhlé?

Úloha 2. (3 body)

Konvexní pětiúhelník $PRASE$ splňuje, že $PRAS$ je čtverec a $|SE| = |PR|$. Určete velikost úhlu $\sphericalangle AEP$.

Úloha 3. (3 body)

Matouš našel nekonečnou rovinnou mapu PraSestánu. V každém bodě mapy je vyznačena reálná nadmořská výška[1] daného bodu. Matouš si po dlouhém počítání všiml, že pro každý čtverec, který nakreslí do této mapy, je průměrná nadmořská výška vrcholů tohoto čtverce nulová. Rozhodněte, zda musí být nadmořská výška v každém bodě PraSestánu nulová.

Úloha 4. (5 bodů)

Alicka a Ben hrají hru na glóbu. Na začátku je na glóbu konečně mnoho bodů. Začíná Alicka, která v každém svém tahu, pokud je na glóbu n bodů, na něj libovolně nakreslí dalších $n+1$ bodů. Ben si ve svém tahu zvolí rovinu procházející středem glóbu, následně si vybere jednu ze dvou polosfér určených touto rovinou a vymaže všechny body na této polosféře (včetně hranice dané rovinou). Ben zvítězí, pokud po jeho tahu na glóbu nebudou žádné body. Rozhodněte, zda dovede Ben zvítězit nezávisle na počáteční konfiguraci bodů a Aliccině strategii.

Úloha 5. (5 bodů)

Souostroví Rypáčky ovládají čtyři státy, každý je tvořen čtyřmi ostrovy. Mezi některými dvojicemi ostrovů jezdí trajekt.[2] Vítek plánuje okružní cestu po Rypáčcích. Všiml si, že každá okružní cesta po ostrovech, která nevyužije žádný trajekt dvakrát, navštíví všechny čtyři státy. Okružní cesta smí začínat (a opět končit) na libovolném ostrově a musí využít alespoň jeden trajekt.[3] Kolik nejvíce trajektů může v Rypáčcích plout?

Úloha 6. (5 bodů)

Buďte M, N po řadě středy stran AD, AB čtverce $ABCD$. Přímka p je zvolena tak, aby procházela bodem M a obraz bodu N v osové souměrnosti podle p ležel na diagonále BD. Nechť je E průsečíkem AB s p. Dokažte, že $|ME| = |AB|$.

---

[1] Nadmořská výška může být i záporná.

[2] Každý trajekt jezdí jen mezi dvěma ostrovy.

[3] Jinými slovy, nehnout se z ostrova není okružní cesta.

Úloha 7. (5 bodů)
Miško má n ohrádek a hraje hru s $ž$ žirafami. Žirafy se na začátku rozmístí do ohrádek. Následně Miško v každém tahu vybere dvě ohrádky a jedna žirafa z některé z nich se přesune do druhé z nich. Pokud v žádné ze dvou zvolených ohrádek žádná žirafa není, Miško vyhrává. Pro dané n nalezněte nejmenší $ž$, pro které se žirafy mohou rozmístit a hrát tak, že Miško v konečném počtu tahů nevyhraje.

Úloha 8. (5 bodů)
Jsou dány kružnice k a ℓ, jež se protínají v bodech P a Q. Na kružnici k zvolíme bod C různý od P, Q a označíme $A \neq P$ druhý průsečík ℓ s přímkou CP a $B \neq Q$ druhý průsečík ℓ s přímkou CQ. Ukažte, že střed kružnice opsané ABC leží na pevné kružnici, která nezávisí na volbě C.