

UFO

1. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 30. ZÁŘÍ 2024

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Terka si do roviny kreslí plánec kolonizace Marsu. Nejprve si do plánu umístí 6 trojúhelníkových bodů a následně každý s každým propojí úsečkou. Poradte Terce, jak body rozmístit, aby po propojení vzniklo právě 17 nedeGENEROVANÝCH trojúhelníků s vrcholy v trojúhelníkových bodech.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Z hlubin vesmíru doputovala na Zemi následující zpráva:

$$1 \square 2 \square 3 \square \dots \square 4320 \square 4321.$$

Dopíšte do ní znaménka $+$ nebo $-$ tak, aby výsledná hodnota byla co nejmenší kladná.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Miško se ocitl na vesmírném parkovišti tvaru tabulky 4×4 . V každém z jeho šestnácti sektorů parkoval nezáporný počet létajících talířů. Miško spočítal, kolik talířů se nacházelo v každém řádku a každém sloupci a vyšly mu samé mocniny dvojky. Dokažte, že se nemohlo jednat o osm různých mocnin dvojky.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Naty si vybrala přirozené číslo n a následně si vypsala všechna n -písmenná slova¹ složená z písmen U , F a O . Dokažte, že těch, v nichž se každé z podslov UF a UO vyskytuje suděkrát, je mezi vypsávanými slovy ostře více než těch, v nichž se každé z těchto podslov vyskytuje lichékrát.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Luxusní čtvrť na Marsu tvoří $(2m + 1) \times (2n + 1)$ čtvercových parcel. Na každé parcele stojí vila, kterou obývá jeden Marťan. Každý Marťan má buď červenou, nebo zelenou barvu. *Hlavní barvou řádku (resp. sloupce)* rozumíme barvu Marťanů, která je v řádku (resp. sloupci) zastoupena v nadpoloviční většině. Dokažte, že alespoň $m + n + 1$ Marťanů má hlavní barvu svého řádku i svého sloupce.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Na poli se záhadně objevily kružnice k a ℓ se stejným poloměrem. Protínají se v bodech A a B . Přímka procházející bodem A protíná k a ℓ postupně v bodech C a D . Kolmice z B na přímku CD protíná k a ℓ postupně v bodech E a F . Dokažte, že $CEDF$ je rovnoběžník.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Kuba objevuje mimozemskou kulturu. Dozvěděl se, že jsou pro ni posvátná čísla x , p , n , ale nikdo mu nechce říct, jaká čísla to jsou. Ví jenom, že x je celé číslo, p je prvočíslo a n je přirozené číslo a že splňují vztah $x^3 + x^2 + x + 1 = p^n$. Pomozte Kubovi najít všechny možné takové trojice.

¹Za *slovo* považujeme jakoukoliv posloupnost písmen. *Podslovem* pak rozumíme úsek několika po sobě jdoucích písmen v daném slově.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice ω . Bod M nazveme *neidentifikovaným létajícím*, pokud $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|MD|}{|MC|}$. Dokaž, že existují čtyři neidentifikované létající body ležící na ω takové, že čtyřúhelník, který tvoří, má kolmé úhlopříčky.