Povídání k první jarní sérii

První jarní série je věnována posloupnostem, o kterých se něco dozvíš v tomto textu. Nejprve si povíme, co to vlastně posloupnost je a zmíníme některé způsoby, jak ji zadat. Potom se zaměříme na dva významné typy posloupností.

Co je to posloupnost?

Posloupností rozumíme několik (klidně i nekonečně mnoho) ne nutně různých reálných čísel, která jsou zadána v určitém pořadí. Členy posloupnosti značíme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pro konečnou posloupnost, pro nekonečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots$, celou posloupnost pak $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, případně $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, což někdy zkracujeme na $\{a_i\}$.

Pokud není uvedeno jinak, posloupností budeme myslet nekonečnou posloupnost.

Jak lze posloupnost zadat?

Posloupnost lze zadat různými způsoby.

Jedním z nich je explicitní vyjádření posloupnosti pomocí vzorce pro n-tý člen. Příkladem může být posloupnost zadána předpisem $a_n = n^2$ pro $n \geq 1$, tj. $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$. Tuto posloupnost tvoří čísla $1, 4, 9, 16, \ldots$ v tomto pořadí.

Jinou možností je zadat posloupnost rekurentně. To znamená, že $(n+1)$-tý člen posloupnosti vyjádříme pomocí některých z n předchozích členů. Abychom posloupnost takto mohli vyjádřit, musíme navíc zadat počáteční podmínky, což si ukážeme na následujícím příkladu. Předchozí posloupnost bychom rekurentně zadali vztahem $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ pro $n \geq 1$ s počáteční podmínkou $a_1 = 1$. Asi nejznámější rekurentně zadanou posloupností je *Fibonacciho posloupnost* $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ V ní je každý člen součtem předchozích dvou členů, tedy

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

pro $n \geq 1$, přičemž $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$. Její explicitní vyjádření nám toho naopak moc neřekne.[1]

Běžně se používají oba způsoby a každý má své výhody a nevýhody. Za určitých podmínek lze oba zápisy mezi sebou převádět. Obecně posloupnost nemusí jít vyjádřit žádným takovým způsobem.

Vlastnosti posloupností

Vlastnosti posloupností jsou definovány obdobně jako u funkcí. Posloupnost $\{a_i\}$ se nazývá *omezená*, pokud existuje konstanta M taková, že pro všechny indexy n je $-M \leq a_n \leq M$. Posloupnost dále nazveme monotónní, pokud je klesající, rostoucí, neklesající nebo nerostoucí. Posloupnost je

(i) (a_n) rostoucí, pokud pro $i < j$ je $a_i < a_j$,
(ii) (a_n) neklesající, pokud pro $i < j$ je $a_i \leq a_j$,
(iii) (a_n) klesající, pokud pro $i < j$ je $a_i > a_j$,
(iv) (a_n) nerostoucí, pokud pro $i < j$ je $a_i \geq a_j$.

[1] Překvapivě platí, že $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, číslo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se taky nazývá *zlatý řez*.

Aritmetické a geometrické posloupnosti

V praxi se setkáváme nejčastěji s aritmetickými a geometrickými posloupnostmi.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *aritmetickou*, jestliže existuje takové reálné číslo d, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslu d říkáme *diference* aritmetické posloupnosti.

Podobně posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *geometrickou*, jestliže existuje takové nenulové reálné číslo q, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslu q říkáme *kvocient* geometrické posloupnosti.

Pro obě posloupnosti známe explicitní vyjádření. Pro aritmetickou posloupnost platí vztah

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

a pro geometrickou

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti lze spočíst pomocí vzorce

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí

$$s_n = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{pro } q \neq 1, \\ n a_1 & \text{pro } q = 1. \end{cases}$$

Pokud navíc kvocient geometrické posloupnosti splňuje $|q| < 1$, pak pro součet $s = a_1 + a_2 + \cdots$ všech jejích členů platí

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Přejeme Ti hodně zdaru při řešení první jarní série!