

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 12. KVĚTNA 2025

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

ÚLOHA 1.

(a) Vítek našel na Marsu číslo, jehož zápis v sedmičkové soustavě tvoří tři číslice. V devítkové soustavě jej tvoří stejné tři číslice, ale zapsané v opačném pořadí. Určete prostřední z těchto číslic. (2 BODY)

(b) Létaující talíř unesl čísla $1, \dots, 4322$ a přeuspořádal je do posloupnosti $a_1, \dots, a_{4322}$. Dokažte, že mezi čísly $|a_1 - 1|, \dots, |a_{4322} - 4322|$ jsou alespoň dvě stejná. (3 BODY)

ÚLOHA 2.

(a) Sylva tvrdí, že našla pět pravidelných mnohostěnů a slepila z nich jeden větší pravidelný mnohostěn. Mohlo se to opravdu stát? (2 BODY)

(b) Lenka má čtyřstěn s výškami h_1, h_2, h_3, h_4 . Štěpán si uvnitř něj zvolil bod X . Označme x_1, x_2, x_3, x_4 vzdálenosti bodu X od jednotlivých stěn čtyřstěnu. Dokažte, že

$$\sqrt{h_1 + h_2 + h_3 + h_4} \geq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}.$$

(3 BODY)

ÚLOHA 3.

(5 BODY)

Na tabuli máme pět čísel 1, 3, 5, 7, 9. V jednom kroku můžeme vzít čtyři z těchto pěti čísel, označit je jako a, b, c, d a nahradit je čísly

$$\frac{a+b+c-d}{2}, \quad \frac{a+b-c+d}{2}, \quad \frac{a-b+c+d}{2}, \quad \frac{-a+b+c+d}{2}.$$

Můžeme po konečném počtu kroků získat čísla:

(a) 0, 2, 4, 6, 8? (2 BODY)

(b) 3, 4, 5, 6, 7? (3 BODY)

ÚLOHA 4.

(a) V řadě stálo 15 párů bot. Potom ale přišel Zdeněk a boty v řadě zamíchal dle své zlovůle, takže levá a pravá bota do páru nemusí nutně stát vedle sebe. Ukažte, že existuje souvislý úsek 10 bot, mezi nimiž se vyskytuje stejný počet pravých bot jako levých bot. (2 BODY)

(b) 2025 matfyzáků si povyměňovalo trička. V každém kole se mohou někteří lidé spárovat a prohodit si v párech trička. Určete nejmenší k takové, že matfyzáci dovedou nehladě na počáteční rozmístění triček po k kolech docílit toho, aby každý měl své vlastní tričko. (3 BODY)

ÚLOHA 5.

(a) Macker zbožňuje posloupnosti. Zvolil si aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d a geometrickou posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q . Nakonec si vytvořil posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, jež splňuje $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ pro všechna $n \geq 1$. Všiml si, že pro všechna n platí $c_n = a_n + b_n$. Určete všechny možné hodnoty d a q , víte-li, že posloupnost absolutních hodnot $(|c_n|)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí.

(2 BODY)

(b) Nalezněte všechna celočíselná řešení rovnice

$$x^{4x^2+2} + x^4 - x^2 - 1 = y^6.$$

(3 BODY)

ÚLOHA 6.

(a) Soustředění se účastní 40 lidí a každý má mezi ostatními nějaké idoly, přičemž nikdo není svým vlastním idolem. Platí, že každých 19 lidí na soušu má právě jeden společný idol. Dokažte, že lze na soušu vybrat skupinu 20 lidí, ve které nikdo není společným idolem zbylých devatenácti.

(2 BODY)

(b) V rovině je vyznačeno n bodů. Nejmenší vzdálenost mezi dvěma z nich je 1. Dokažte, že můžeme několik bodů odebrat tak, aby alespoň $\frac{n}{4}$ bodů zbylo a zároveň žádné dva z nich nebyly vzdáleny přesně 1 od sebe.

(3 BODY)

ÚLOHA 7.

(a) V každém bodě čtvercové mřížky $2n \times 2n$ roste strom. Drvoštěp Daník může některé stromy pokácet, čímž se z nich stanou pařezy. Dva pařezy na sebe vidí, pokud na úsečce, která je spojuje, neroste žádný strom. Kolik nejvýše stromů může Daník pokácet, aby na sebe žádné dva pařezy neviděly?

(2 BODY)

(b) Nechť n je přirozené číslo a $p \geq n$ liché prvočíslo. Budiž q nejmenší prvočíselný dělitel čísla $n^p + 1$. Dokažte, že $n + 1$ je násobkem q .

(3 BODY)

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(a) Vítek našel na Marsu číslo, jehož zápis v sedmičkové soustavě tvoří tři číslice. V devítkové soustavě jej tvoří stejné tři číslice, ale zapsané v opačném pořadí. Určete prostřední z těchto číslic.

(b) Létající talír unesl čísla $1, \dots, 4322$ a přeuspořádal je do posloupnosti $a_1, \dots, a_{4322}$. Dokažte, že mezi čísly $|a_1 - 1|, \dots, |a_{4322} - 4322|$ jsou alespoň dvě stejná.

ŘEŠENÍ:

(a) Zavedeme si rovnici, kde a , b a c jsou přirozená čísla menší než 7 a postupně odpovídají cifrám v devítkovém zápisu daného čísla:

$$81a + 9b + c = 49c + 7b + a.$$

Upravíme na $b = 8(3c - 5a)$, všimneme si, že $b < 7$ a ale z rovnice vychází, že b musí být násobek 8, protože a a c jsou přirozená. Musí tedy být $b = 0$. Dále např. volbou $a = 3$ a $c = 5$ vidíme, že řešení rovnice s $b = 0$ existuje.

Zkouškou můžeme ověřit, že skutečně platí¹ $503_7 = 305_9$.

(b) Výraz $|a_i - i|$ pro i mezi 1 a 4322 může nabývat hodnot 0 až 4321. Pro spor předpokládáme, že všechna čísla $|a_i - i|$ jsou různá. Jelikož mezi 0 až 4321 je 4322 hodnot, každá z nich tedy bude mezi $|a_i - i|$ zastoupena právě jednou. Označme S jako součet všech čísel od 1 do 4322.

Rozmysleme si, že absolutní hodnota neovlivňuje paritu čísla. Můžeme tedy položit:

$$\sum_{i=1}^{4322} |a_i - i| \equiv \sum_{i=1}^{4322} (a_i - i) \equiv \sum_{i=1}^{4322} a_i - \sum_{i=1}^{4322} i \equiv S - S = 0 \pmod{2}$$

Tedy součet všech $|a_i - i|$ musí být sudý. Víme ale také, že hodnota $\sum_{j=0}^{4321} j = \frac{4321 \cdot 4322}{2} = 9337681$ je lichá. To je ale spor s tím, že $|a_1 - 1|, \dots, |a_{4322} - 4322|$ jsou až na pořadí čísla $0, \dots, 4321$. Některá dvě $|a_i - i|$ proto musela být stejná.

POZNÁMKY:

Řešení byla z většiny správně. Žádné časté chyby se neobjevovaly.

(Vojta „Dláža“ Gadurek)

¹Dolním indexem 7 či 9 myslíme zápis v sedmičkové či devítkové soustavě

Úloha 2.

(a) Sylva tvrdí, že našla pět pravidelných mnohostěnů a slepila z nich jeden větší pravidelný mnohostěn. Mohlo se to opravdu stát?

(b) Lenka má čtyřstěn s výškami h_1, h_2, h_3, h_4 . Štěpán si uvnitř něj zvolil bod X . Označme x_1, x_2, x_3, x_4 vzdálenosti bodu X od jednotlivých stěn čtyřstěnu. Dokažte, že

$$\sqrt{h_1 + h_2 + h_3 + h_4} \geq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}.$$

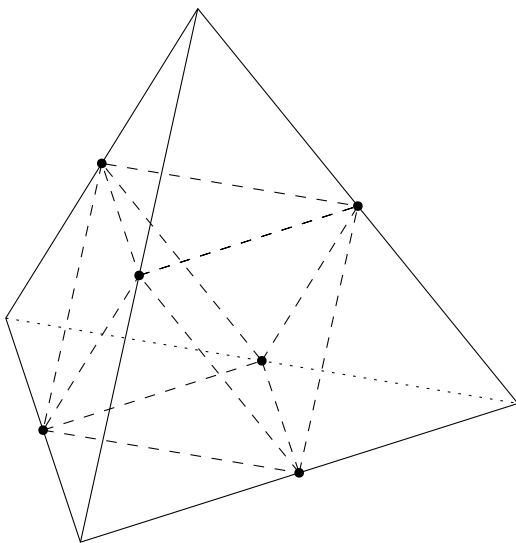
ŘEŠENÍ:

(a) Ukážeme si, že se to Sylvě povést mohlo, musela použít čtyři pravidelné čtyřstěny a jeden pravidelný osmistěn. Začneme s výsledným mnohostěnem – pravidelným čtyřstěnem – a ukážeme si, jak ho naopak rozdělit na pět pravidelných mnohostěnů.

Zvolme si libovolný vrchol čtyřstěnu a všimněme si, že spolu se středy hran, které z něj vychází, tvoří zase pravidelný čtyřstěn. To jistě platí i pro všechny ostatní vrcholy. Nyní si představme, že tyto menší čtyřstěny z původního uřízneme.

Rozmysleme si, že zbylý útvar je pravidelný osmistěn. Všechny strany jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky, které budou stejně velké jako stěny uříznutých čtyřúhelníků.

Za každou stranu a za každý vrchol máme jeden trojúhelník, takže jsme dostali útvar, co se skládá z osmi stejně velkých rovnostranných trojúhelníků, tedy se musí jednat o pravidelný osmistěn. Sylva tak doopravdy mohla složit ze čtyř pravidelných čtyřstěnů a jednoho pravidelného osmistěnu pravidelný čtyřstěn.



(b)

ŘEŠENÍ PODLE ERIKA JEŽKA:

O objemu čtyřstěnu platí, že $V = \frac{S_i h_i}{3}$, kde S_i je obsah i -té stěny a h_i je k ní odpovídající výška. Dále si všimněme, že když spojíme bod X s vrcholy, vzniknou nám další čtyři čtyřstěny. Z těch také umíme poskládat objem původního čtyřstěnu jako

$$\frac{S_1 x_1}{3} + \frac{S_2 x_2}{3} + \frac{S_3 x_3}{3} + \frac{S_4 x_4}{3} = V.$$

Nyní, pokud nahradíme $S_i = \frac{3V}{h_i}$, získáme

$$\frac{x_1 V}{h_1} + \frac{x_2 V}{h_2} + \frac{x_3 V}{h_3} + \frac{x_4 V}{h_4} = V,$$

tedy po zjednodušení

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$

Nyní použijeme Cauchyho–Schwarzovu nerovnost ve tvaru zlomkobijce², ta nám řekne, že

$$1 = \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} \geq \frac{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4})^2}{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}.$$

Přenásobením nerovnosti součtem výšek a jejím následným odmocněním dostaneme

$$\sqrt{h_1 + h_2 + h_3 + h_4} \geq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4},$$

což je přesně to, co po nás chtělo zadání.

POZNÁMKY:

V části (a) bohužel většina řešení pracovala se stejnými druhy mnohostěnů, ze kterých doopravdy další mnohostěn složit nelze. Řešení části (b) dorazilo výrazně méně, ale zase byla častěji správně. Skoro všechna správná řešení použila Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(Káťa Danilina)

Úloha 3.

Na tabuli máme pět čísel 1, 3, 5, 7, 9. V jednom kroku můžeme vzít čtyři z těchto pěti čísel, označit je jako a, b, c, d a nahradit je čísly

$$\frac{a+b+c-d}{2}, \quad \frac{a+b-c+d}{2}, \quad \frac{a-b+c+d}{2}, \quad \frac{-a+b+c+d}{2}.$$

Můžeme po konečném počtu kroků získat čísla:

(a) 0, 2, 4, 6, 8?

(b) 3, 4, 5, 6, 7?

ŘEŠENÍ:

(a) Naprosto klíčové je si povšimnout, že ať už popsané „nahrazení“ čísel provedeme kolikrát chceme, zůstane součet čísel, jež jsou (v konkrétní okamžik) na tabuli napsaná, stejný. To platí, protože

$$\frac{a+b+c-d}{2} + \frac{a+b-c+d}{2} + \frac{a-b+c+d}{2} + \frac{-a+b+c+d}{2} = a+b+c+d.$$

(Poznámka na okraj: formálně bychom mohli říci, že součet čísel na tabuli je tzv. *invariantem* vůči naší operaci nahrazování.)

Z toho ihned vidíme, že čísla 0, 2, 4, 6, 8 získat nemůžeme. Na začátku totiž čísla na tabuli dávají součet $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, kdybychom tedy uměli získat čísla 0, 2, 4, 6, 8, musel by se součet změnit na $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$. To ale, jak jsme právě odůvodnili, nejde.

(b) Zde nalezneme ještě záladnější invariant. Konkrétně si všimneme, že ani součet druhých mocnin čísel napsaných na tabuli se během našeho nahrazování nemění, neboť po několika úpravách dostaneme, že

$$\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Z toho opět ihned vidíme, že čísla 3, 4, 5, 6, 7 získat nemůžeme, jelikož $3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 135$, kdežto $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 165$.

²Více o Cauchyho–Schwarzově nerovnosti i o zlomkobijci specificky se lze dočíst v tomto příspěvku: <https://prase.cz/library/CauchySchwarzMP/CauchySchwarzMP.pdf>.

POZNÁMKY:

První invariant našla naprosto všechna přijatá řešení. Ten druhý odhalilo už jen několik řešitelů, zbylá řešení podúlohy (b) nedosažitelnost zadaných čísel (více či méně úspěšně) argumentovala tím, že opakovanou aplikací naší operace vznikají čísla se stále delším a delším desetinným rozvojem, resp. se stále zápornější a zápornější 2-valuaci. (Josef „José“ Soural)

Úloha 4.

(a) V řadě stálo 15 párů bot. Potom ale přišel Zdeněk a boty v řadě zamíchal dle své zlovůle, takže levá a pravá bota do páru nemusí nutně stát vedle sebe. Ukažte, že existuje souvislý úsek 10 bot, mezi nimiž se vyskytuje stejný počet pravých bot jako levých bot.

(b) 2025 matfyzáků si povyměňovalo trička. V každém kole se mohou někteří lidé spárovat a prohodit si v párech trička. Určete nejmenší k takové, že matfyzáci dovedou nehlédě na počáteční rozmístění triček po k kolech docílit toho, aby každý měl své vlastní tričko.

ŘEŠENÍ:

(a) Uvažujeme úseky 10 po sobě jdoucích bot v řadě, každý z nich obsahuje stejně levých a pravých bot právě tehdy, když obsahuje přesně 5 pravých. Pro spor předpokládejme, že neexistuje žádný takový, který by obsahoval přesně 5 pravých bot. Pokud hranice úseku, na který se díváme, posuneme o 1 botu doleva či doprava, počet pravých bot v úseku se může změnit nanejvýš o 1.

Představme si, že takto začneme s úsekem prvních 10 bot a postupně jej posuneme až na úsek posledních 10 bot. Jelikož předpokládáme, že nikdy v úseku neleželo přesně 5 pravých bot, muselo jich být buďto vždy alespoň 6, nebo vždy nanejvýš 4, protože tento počet při posouvání úseku nemůže „přeskočit“ pětku. BÚNO řekněme, že se vždy vyskytlo alespoň 6 pravých bot. Pak ale rozdělíme celou řadu 30 bot na tři úseky, první obsahuje prvních 10 bot, třetí těch posledních 10 a druhý úsek obsahuje zbytek. V každém úseku je alespoň 6 pravých bot. Celkem tak máme alespoň 18 pravých bot, což je spor s tím, že pravých bot má být celkem přesně 15.

(b) Ukažme, že problém lze vyřešit pomocí $k = 2$ kroků, zatímco $k = 1$ obecně nestačí.

Uvažujeme na množině matfyzáků permutaci, která matfyzákovi M přiřadí toho matfyzáka, který má jeho tričko M . Je známo, že každá permutace musí sestávat z několika cyklů – podmnožinek n matfyzáků, kde druhý má tričko prvního, třetí má tričko druhého, atp., až první má tričko n -tého. Všimněme si, že jednotlivé cykly můžeme řešit nezávisle na sobě. Stačí nám tedy ukázat, že cyklus matfyzáků libovolné délky umíme vyřešit ve dvou krocích.

Uvažujme tedy cyklus a očíslovme si matfyzáky v něm jako $0, 1, \dots, n-1$ a uvažujme toto číslování modulo n , tedy $n \equiv 0$, $n+1 \equiv 1$ apod. Předepišme tyto dva kroky:

- (1) V prvním kole ať si matfyzák i vymění tričko s matfyzákem $n-i$, pokud by náhodou $i \equiv n-i$, tento matfyzák neudělá nic. Po tomto kole tak matfyzák i skončí s trikem $n-i+1$ a matfyzák s trikem $n-i+1$ skončí s trikem $(n-(n-i+1))+1 \equiv i$.
- (2) V druhém kole ať si matfyzák i prohodí tričko s matfyzákem $n-i+1$. Díky tomu, jaká měli trička na konci předešlého kola, tak každý dostane svoje tričko. (Opět, pokud by $i \equiv n-i+1$, tento matfyzák neudělá nic.)

Dokažme ještě, že méně než dva tahy by pro nějaké rozmístění triček nestačilo. Pokud rozmístění triček umíme vyřešit v jednom tahu, znamená to, že příslušná permutace sestávala jen z jedno- a dvojcyklů: jednocykly představují matfyzáky, kteří si v onom jediném kole s nikým tričko neměnili, a dvojcykly ty dvojice, které si tričko prohodily. Potom nám stačí povšimnout si, že existují permutace na 2025 prvcích, které nesestávají pouze z jedno- a dvojcyklů. Příkladem je ta, kdy tři matfyzáci A, B, C mají po řadě trička C, A, B a všichni ostatní mají svá správná trička.

POZNÁMKY:

Úloha (a) většině řešitelů nedělala problémy. V úloze (b) přišlo hodně řešení pro jiné k , kde často buď chyběl důkaz minimality nebo byl chybný. Často se objevovala konstrukce s za použití $\log(2024)$

prohození. Poměrně dost řešení ztratilo body na tom, že dostatečně neodůvodnila, že jejich párování opravdu funguje. (Vojta „Dlážka“ Gaďurek)

Úloha 5.

(a) Macker zbožňuje posloupnosti. Zvolil si aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d a geometrickou posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q . Nakonec si vytvořil posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, jež splňuje $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ pro všechna $n \geq 1$. Všiml si, že pro všechna n platí $c_n = a_n + b_n$. Určete všechny možné hodnoty d a q , víte-li, že posloupnost absolutních hodnot $(|c_n|)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí.

(b) Nalezněte všechna celočíselná řešení rovnice

$$x^{4x^2+2} + x^4 - x^2 - 1 = y^6.$$

ŘEŠENÍ:

(a) Protože $a_n = a_1 + (n-1)d$ a $b_n = b_1 q^{n-1}$, dosazením za $c_n = a_n + b_n$ dostaneme pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= c_{n+1} + c_n, \\ a_1 + (n+1)d + b_1 q^{n+1} &= a_1 + nd + b_1 q^n + a_1 + (n-1)d + b_1 q^{n-1}, \\ b_1 q^{n-1}(q^2 - q - 1) &= a_1 + d(n-2). \end{aligned}$$

Všimneme si, že vzhledem k n je na pravé straně lineární funkce, na levé zase exponenciální funkce, mohou se proto rovnat pro všechna n jen tehdy, pokud jsou ve skutečnosti obě konstantní. Na to, aby byla pravá strana konstantní funkce vzhledem k n , musí být $d = 0$ a tedy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní. Pak ovšem $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ nemůže být konstantní, protože dle zadání je $(|a_n + b_n|)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí. Nutně tedy $q^2 - q - 1 = 0$, z čehož plyne $a_1 = 0$. Řešením kvadratické rovnice je $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Jenomže pro $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dostaneme, že $|c_n| = |b_n| = |b_1 q^n|$ je klesající posloupnost, protože je $|q| < 1$, což je spor se zadáním.

Jedinou možností pak zůstává $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $d = 0$. Ověřením se můžeme přesvědčit, že tato dvojice skutečně splňuje podmínky zadání.

ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ:

Pokud nemáme rádi asymptotiku, mohli jsme postupovat následovně. Fixujme libovolné $n \in \mathbb{N}$. Protože rovnice výše platí pro všechna přirozená čísla, platí taky pro $n+1$ a tedy

$$\begin{aligned} b_1 q^n (q^2 - q - 1) &= a_1 + d(n-1), \\ b_1 q^{n-1} (q^2 - q - 1) &= a_1 + d(n-2). \end{aligned}$$

Odečtením rovnic dostaneme $d = b_1 q^{n-1} (q^2 - q - 1)(q-1)$, což taky platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dosazením $n = 1, 2$ získáme rovnice

$$\begin{aligned} b_1 (q^2 - q - 1)(q-1) &= d, \\ b_1 q (q^2 - q - 1)(q-1) &= d. \end{aligned}$$

Dalším odečtením dostaneme

$$b_1 (q^2 - q - 1)(q-1)^2 = 0.$$

Z toho plyne, že $d^2 = (b_1 (q^2 - q - 1)(q-1))^2 = b_1 (q^2 - q - 1) \cdot 0 = 0$, tedy $d = 0$ a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní. Pokud je $q = 1$ nebo $b_1 = 0$, je taky $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konstantní, což je spor. Tedy nutně $q^2 - q - 1 = 0$, co už dořešíme stejně jako v předchozím postupu.

(b) Pokud je $x \equiv 0 \pmod{3}$, dostaneme $(y^3)^2 \equiv x^{4x^2+2} + x^4 - x^2 - 1 \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$, což je spor, protože žádná druhá mocnina nedává zbytek 2 po dělení 3. Tedy $x \equiv \pm 1 \pmod{3}$, pak $x^2 \geq 1$ a $2x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$.

Tedy $3 \mid 2x^2 + 1$, z čehož $6 \mid 4x^2 + 2$ a můžeme psát $y^6 = x^{6n} + x^4 - x^2 - 1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pokud je $x^2 \geq 2$, tak

$$y^6 = x^{6n} + x^4 - x^2 - 1 \geq x^{6n} + 2x^2 - x^2 - 1 > x^{6n},$$

tedy $y^2 > x^{2n}$, tedy $y^2 \geq x^{2n} + 1$. Jenomže pak

$$y^6 \geq (x^{2n} + 1)^3 = x^{6n} + 3x^{4n} + 3x^{2n} + 1 \geq x^{6n} + 3x^4 + 3x^2 + 1 > x^{6n} + x^4 - x^2 - 1 = y^6,$$

čímž dostáváme spor.

Nakonec, pokud je $x^2 = 1$, tak dosazením do rovnice dostáváme $y^6 = 0$. Tedy jediné možné řešení jsou $x = \pm 1$ a $y = 0$.

POZNÁMKY:

Mnozí řešitelé udělali v první úložce nějakou chybu, která je pak stála bodík. Taky se ne všem podařilo vyloučit možnost $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, což bylo takové smutné, tak jsem za to nakonec bodík nestrhávala (pokud bylo vše ostatní správně zdůvodněné). Taky se vyskytlo zajímavé řešení využívající charakteristický polynom posloupností, bohužel jej zradila asymptotika. Druhá úloha již ztrácela na popularitě, řešení nebylo moc a většinou postupovala obdobně jako to vzorové.

(Natália Bátorová)

Úloha 6.

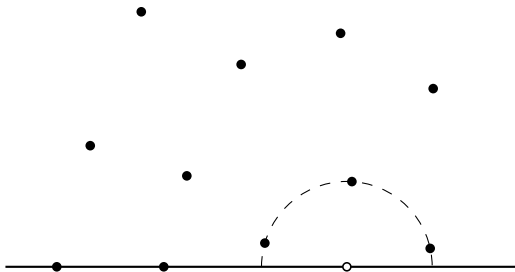
(a) *Soustředění se účastní 40 lidí a každý má mezi ostatními nějaké idoly, přičemž nikdo není svým vlastním idolem. Platí, že každých 19 lidí na soušu má právě jeden společný idol. Dokažte, že lze na soušu vybrat skupinu 20 lidí, ve které nikdo není společným idolem zbylých devatenácti.*

(b) *V rovině je vyznačeno n bodů. Nejmenší vzdálenost mezi dvěma z nich je 1. Dokažte, že můžeme několik bodů odebrat tak, aby alespoň $\frac{n}{4}$ bodů zbylo a zároveň žádné dva z nich nebyly vzdáleny přesně 1 od sebe.*

ŘEŠENÍ:

(a) Pro spor předpokládejme, že v každé dvacetici lidí je alespoň jeden člověk idolem zbylých 19. Na soušu je celkem $\binom{40}{20}$ různých skupin po 20 lidech. V každé dvacetici určíme 19 lidí a jejich idola. Potom všechny takové devatenáctice musí být různé, jelikož pokud by byly nějaké dvě stejné, měla by taková devatenáctice dva idoly, což je spor se zadáním. Zároveň z každé dvacetice vzejde jedna devatenáctice, tedy musí jich být celkem $\binom{40}{20}$. Zároveň ale všech možných různých devatenáctic je pouze $\binom{40}{19}$, z nerovnosti $\binom{40}{20} > \binom{40}{19}$ tak dostáváme spor. Na soušu tedy lze vybrat skupinu 20 lidí, ve které nikdo není idolem zbylých 19.

(b) Zvolíme nějakou vodorovnou přímku v rovině tak, že všech n bodů leží v jedné polorovině. Následně tuto přímku posouváme k bodům, dokud na nějaký nenarazíme. Pokud jich bude více, vybereme ten nejvíce vpravo. Dokážeme, že existují nejvýše tři body, které mají od vybraného vzdálenost právě 1. Všechny takové body leží na jednotkové kružnici se středem ve vybraném bodě a jelikož sousední body na kružnici mezi sebou musí mít vzdálenost alespoň 1, potom středový úhel vzhledem k těmto bodům musí být alespoň 60° . Jelikož ale leží všechny v jedné polorovině určené přímkou procházející původním bodem a zároveň platí, že na přímce napravo od původního bodu žádný jiný bod neleží, potom existují nejvýše tři body, které mají od vybraného vrcholu vzdálenost přesně 1.



Vybraný bod si zapamatujeme, odebereme jej a spolu s ním odebereme i nejvýše tři body, které od něj mají vzdálenost právě 1. Takto pokračujeme, dokud nějaké body zůstávají.

Za každý bod, který si zapamatujeme, tak odebereme nejvýše tři jiné body, na konci tedy bude vybraná alespoň čtvrtina z n bodů a zároveň žádné dva body nebudou vzdáleny přesně o 1.

POZNÁMKY:

První část se podařilo úspěšně zdolat prakticky všem. V druhé části se někteří bohužel vydali na cestu do pekel, kdy se snažili argumentovat, že pokud budou body rozmístěné v mřížce, bude se jednat o nejhorší případ, ukázali, že v ní umí nějak triviálně odebrat body a tvrzení bude platit. Z toho ale bohužel nejde pouhým máváním rukama dokázat tvrzení pro všechny body. Například pokud mřížka nebude úplná, tak se může stát, že odebrání nějaké konkrétní podmnožiny bodů pouze v závislosti na původní mřížce způsobí, že v takovém případě odebereme příliš mnoho bodů. Je tedy dobré nepředpokládat nějakou konkrétní konstalaci bodů v rovině, ale najít obecný postup, který předpokládá pouze vlastnosti ze zadání. (Klárka Grinerová)

Úloha 7.

(a) V každém bodě čtvercové mřížky $2n \times 2n$ roste strom. Drvoštěp Daník může některé stromy pokácet, čímž se z nich stanou pařezy. Dva pařezy na sebe vidí, pokud na úsečce, která je spojuje, neroste žádný strom. Kolik nejvýše stromů může Daník pokácet, aby na sebe žádné dva pařezy neviděly?

(b) Necht' n je přirozené číslo a $p \geq n$ liché prvočíslo. Budiž q nejmenší prvočíselný dělitel čísla $n^p + 1$. Dokažte, že $n + 1$ je násobkem q .

ŘEŠENÍ:

(a) Dokážeme, že Daník může pokácet nejvýše n^2 stromů. Pro lepší srozumitelnost budeme v řešení stromy v mřížce označovat celočíselnými souřadnicemi (x, y) pro $1 \leq x, y \leq 2n$.

Nejprve si uvědomme, že více než n^2 stromů Daník pokácet nemůže. Rozdělme si čtvercovou mřížku na čtverce 2×2 . Jelikož každé dva stromy ze čtverce 2×2 sousedí na nějaké úsečce, jistě může pokácet nanejvýš jeden strom. Čtverců 2×2 je v mřížce celkem n^2 , v každém může pokácet maximálně jeden strom, tedy opravdu více stromů než n^2 pokácet nelze.

Dále ověříme, že oněch n^2 stromů Daník pokácet dovede. Vyberme všechny body, které mají obě souřadnice liché (těch je n^2) a stromy, co na nich rostou, pokácejme. Vyberme nyní libovolný z pařezů (označme jej p) a nějakou přímkou, na které leží další pařez (ten označme q), přičemž uvažujme ten, který je k pařezu p nejbližší (libovolný z nich). Pak jistě bod, který leží uprostřed úsečky pq , bude jedním z mřížkových bodů, neboť bude mít obě souřadnice (získané jako průměr souřadnic p a q) celočíselné. A jelikož to není bod, který má obě souřadnice liché (jinak by nebyl q nejbližší), roste na něm nepokácený strom.

Opravdu na sebe tedy žádné dva pařezy nevidí a Daník může pokácet maximálně n^2 stromů.

(b) Nejprve si uvědomme, že $n + 1$ dělí $n^p + 1$, protože

$$n^p + 1 \equiv (-1)^p + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{n + 1}.$$

K řešení budeme využívat řady prvků. Řádem prvku n modulo p pro $p \nmid n$ nazýváme nejmenší kladné celé číslo r , pro které platí $n^r \equiv 1 \pmod{p}$. Je známo, že pro každé s takové, že $n^s \equiv 1 \pmod{p}$, potom platí $r \mid s$.

Ze zadání víme, že $n^p \equiv -1 \pmod{q}$. Z toho plyne $n^{2p} \equiv 1 \pmod{q}$. Zkusme se nyní podívat na řád r čísla n modulo q . Nejprve si ověříme, že to opravdu dává smysl, tedy, že $q \nmid n$. Pro spor předpokládejme opak. Jelikož $q \mid n^p + 1$, získáváme: $0 \equiv n^p + 1 \equiv 0^p + 1 \equiv 1 \pmod{q}$, tedy spor. Jelikož je řád nejmenší číslo, pro které kongruence platí, musí být jistě $2p$ dělitelné r . Získáváme tak $r \in \{1, 2, p, 2p\}$. Zároveň jelikož $n^p \equiv -1 \pmod{q}$, nemůže to být přímo p , ani jej nemůže dělit, čímž díky lichosti p vyloučíme 1 a p . Máme tedy dvě možnosti:

- (1) $r = 2$, pak platí $n^2 \equiv 1 \pmod{q}$. Potom $(n+1)(n-1) \equiv 0 \pmod{q}$. Jelikož q je prvočíslo, musí $q \mid n+1$ nebo $q \mid n-1$, jenže my už víme, že druhá dělitelnost nemůže nastat. Získáváme tedy chtěné $q \mid n+1$.
- (2) $r = 2p$. Podle malé Fermatovy věty $n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ (už výše jsme poznamenali, že $q \nmid n$), tudíž musí nutně $2p = r \mid q-1$, konkrétně je tedy $q > 2p \geq 2n \geq n+1$. My ale víme, že q je nejmenší dělitel $n^p + 1$, víme také, že $n+1 \mid n^p + 1$, tedy je jistě $q \leq n+1$. Máme tedy $n+1 \geq q > n+1$, což je spor.

Opravdu je tedy $n+1$ násobkem q .

POZNÁMKY:

Téměř všechna řešení podúlohy (a) se s ní zdárně vypořádala. Mnohdy jsem se setkávala se špatným pochopením zadání, kdy řešitel místo $4n^2$ stromů měl $(2n+1)^2$, za což jsem ale body nestrhávala. Někteří řešitelé bohužel zapomněli, že stromy se vidí, i pokud neleží vedle sebe na řádku nebo sloupci, a úlohu tak nevyřešili.

Do podúlohy (b) se pustilo jen pár odvážlivců, z nich někteří řešil problém podobně jako vzorové řešení, ti se vesměs do cíle dostali. Některá další řešení však často předpokládala ne úplně triviální věci, které by bylo potřeba dokázat, a nevyhnula se tak stržení bodíků.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)