

Polynomy 3

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. DUBNA 2025

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

Ať je n násobek čtyř. *Hrací kostkou* rozumějme zařízení, které má n kladných celých čísel (mohou se opakovat) a které při hodu vrátí jednu z těchto hodnot, každou se stejnou pravděpodobností. *Standardní* hrací kostka je ta s čísly $1, \dots, n$. Dokažte, že existují hrací kostky A, B , které nejsou standardní, ale přitom součet hodu A a hodu B dává stejné hodnoty a se stejnou četností, jako součet hodů dvěma standardními kostkami.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)

Označme M množinu všech uspořádaných 44tic nezáporných celých čísel se součtem 2025. Určete¹

$$\sum_{(a_1, \dots, a_{44}) \in M} a_1 \cdots a_{44}.$$

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Kdykoliv je S množina nějakých nezáporných celých čísel, ať pro nezáporné celé n značí $f_S(n)$ počet uspořádaných dvojic (s_1, s_2) , pro něž $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ a $s_1 + s_2 = n$. Rozhodněte, zdali lze množinu všech nezáporných celých čísel rozdělit na dvě disjunktní A, B tak, aby $f_A(n) = f_B(n)$ pro všechna nezáporná celá n .

¹Sumačním zápisem se zde myslí, že sečteme součiny $a_1 \cdots a_{44}$ pro všechny 44tice $(a_1, \dots, a_{44})$ z množiny M .

Polynomy 3

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

At' je n násobek čtyř. Hrací kostkou rozumějme zařízení, které má n kladných celých čísel (mohou se opakovat) a které při hodu vrátí jednu z těchto hodnot, každou se stejnou pravděpodobností. Standardní hrací kostka je ta s čísly $1, \dots, n$. Dokažte, že existují hrací kostky A, B , které nejsou standardní, ale přitom součet hodu A a hodu B dává stejné hodnoty a se stejnou četností, jako součet hodů dvěma standardními kostkami.

ŘEŠENÍ:

Nejprve zakódujeme libovolnou hrací kostku do polynomu. Nechť se číslo i na zvolené hrací kostce nachází a_i -krát. Potom odpovídající polynom je $\sum a_i x^i$, kde suma jde přes čísla i zastoupená na kostce. Naopak polynom odpovídá hrací kostce (pro dané n) právě tehdy, když platí všechny následující podmínky:

- (1) součet jeho koeficientů je n (neboť kostka má n stěn),
- (2) má pouze nezáporné celé koeficienty (každé číslo se buďto na kostce vůbec nenachází nebo je na kladném celém počtu stěn),
- (3) konstantní koeficient je nulový (na kostce mohou být pouze přirozená čísla, tudíž nikoli nula).

Standardní kostka tedy odpovídá polynomu $x + x^2 + \dots + x^n$.

Pro libovolné dva polynomy $f(x) = a_0 + \dots + a_d x^d$, $g(x) = b_0 + \dots + b_e x^e$ platí, že koeficient u x^s v $f \cdot g$ je $\sum_{i=0}^s a_i b_{s-i}$. Pokud polynomy f a g odpovídají hracím kostkám s n stěnami, pak je $\sum_{i=0}^s a_i b_{s-i}$ počet způsobů, jak může v součtu padnout s .

Hledání dvou kostek, na kterých v součtu padají stejná čísla se stejnou pravděpodobností jako na dvou standardních kostkách, jsme převedli na hledání dvou polynomů f a g splňujících všechny tři podmínky výše a pro které platí $f \cdot g = (x + x^2 + \dots + x^n)^2$. Protože n je násobek čtyř, existuje přirozené číslo k takové, že $n = 4k$. Potom

$$\begin{aligned} x + x^2 + \dots + x^n &= x \cdot (1 + x + \dots + x^{4k-1}) = x \cdot (1 + x) \cdot (1 + x^2 + \dots + x^{4k-2}) = \\ &= x \cdot (1 + x) \cdot (1 + x^2) \cdot (1 + x^4 + \dots + x^{4k-4}). \end{aligned}$$

Proto pokud zvolíme

$$\begin{aligned} f &= x \cdot (1 + x)^2 \cdot (1 + x^4 + \dots + x^{4k-4}), \\ g &= x \cdot (1 + x^2)^2 \cdot (1 + x^4 + \dots + x^{4k-4}), \end{aligned}$$

bude platit $f \cdot g = (x + x^2 + \dots + x^n)^2$. Nyní musíme ověřit, že tyto polynomy odpovídají nějakým hracím kostkám.

- (1) Dosazením $x = 1$ získáme součet koeficientů. Protože $f(1) = g(1) = 1 \cdot 2^2 \cdot k = 4k = n$, je splněna podmínka na součet koeficientů.
- (2) Součin polynomů s nezápornými celými koeficienty má opět nezáporné celé koeficienty, tedy i druhá podmínka je splněna.

- (3) Polynom je dělitelný x právě tehdy, když má nulový konstantní koeficient, tedy i třetí podmínka je splněna.

Zbývá ověřit, že odpovídající kostky nejsou standardní. Pokud by byly standardní, musely by být stupně n , protože už víme, že jsou to n -stěnné hrací kostky. Avšak f je stupně $n - 1$ a g je stupně $n + 1$.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů postupovala podobně jako vzorové řešení, avšak často opomněli ověřit všechny podmínky, že výsledné polynomy vsutku odpovídají hracím kostkám. Nakonec jsem se rozhodla strhávat body pouze pokud bylo jejich ověření netriviální, ale dávejte si na takové maličkosti pozor. Dalším častým problémem bylo nepochopení toho, že všechny kostky vystupující v zadání mají n stěn. (Magdaléna Mišinová)

Úloha 2.

Označme M množinu všech uspořádaných 44tic nezáporných celých čísel se součtem 2025. Určete¹

$$\sum_{(a_1, \dots, a_{44}) \in M} a_1 \cdots a_{44}.$$

ŘEŠENÍ:

Označme si mocninnou řadu $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$. Zkusme nyní interpretovat koeficienty v řadě

$$F(x)^{44} = \underbrace{(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots) \cdot (x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots) \cdots (x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots)}_{44\text{-krát}}.$$

Když si při roznásobování závorek každé s každou vezmeme $a_1x^{a_1}$ z první závorky, $a_2x^{a_2}$ z druhé závorky, $\dots$ a $a_{44}x^{a_{44}}$ ze 44-té závorky, přispěje nám to do výsledku $(a_1a_2 \cdots a_{44})x^{a_1+a_2+\cdots+a_{44}}$. Posbíráním všech těchto příspěvků dostaneme, že koeficient u x^k v $F(x)^{44}$ je přesně součet všech součinů uspořádaných dvojic nezáporných čísel se součtem k . Speciálně se tedy výsledek úlohy skrývá v koeficientu u x^{2025} v $F(x)^{44}$.

Nyní zapojíme znalosti o konkrétních řadách, které máme ze seriálu. Mimo jiné jsme potkali řady tvaru

$$\frac{1}{(1-x)^{d+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+d}{d} x^k. \quad (*)$$

Speciálně pro $d = 1$ vzhledem k $\binom{k+1}{1} = k + 1$ vznikne

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

To vypadá skoro jako F , od které se liší jen posunutím koeficientů. Tento neduh se správi vynásobením x , takže máme $F(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Hledáme proto koeficient u x^{2025} v $F(x)^{44} = \frac{x^{44}}{(1-x)^{88}}$. Abychom jej našli, rozvineme znovu do řady. Znovu použijeme (*) a získáme

$$\frac{1}{(1-x)^{88}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+87}{87} x^k,$$

¹Sumačním zápisem se zde myslí, že sečteme součiny $a_1 \cdots a_{44}$ pro všechny 44tice $(a_1, \dots, a_{44})$ z množiny M .

takže vynásobením x^{44} posléze vzejde

$$\frac{x^{44}}{(1-x)^{88}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+87}{87} x^{k+44} = \sum_{k=44}^{\infty} \binom{k-44+87}{87} x^k.$$

Hledaným výsledkem je proto kombinační číslo $\binom{2025-44+87}{87} = \binom{2068}{87}$.

POZNÁMKY:

Valná většina řešení, jež jsme obdrželi, byla správně a postupovala vesměs stejně jako vzorák. Objevilo se ale i lyrické řešení kombinatorickým počítáním.

Rád bych zde také učinil jednu názvoslovnou poznámku. V některých řešeních jsem se setkal s výrazem „termín“ k označení členu polynomu (či mocninné řady). Mohu se pouze domnívat, že původem je doslovný překlad anglického *term*, což je v angličtině zcela korektní označení, do češtiny se ale v matematickém kontextu překládá jako „člen“, nikoliv „termín“ jako v každodenním kontextu.² (Matěj Doležálek)

Úloha 3.

Kdykoliv je S množina nějakých nezáporných celých čísel, ať pro nezáporné celé n značí $f_S(n)$ počet uspořádaných dvojic (s_1, s_2) , pro něž $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ a $s_1 + s_2 = n$. Rozhodněte, zdali lze množinu všech nezáporných celých čísel rozdělit na dvě disjunktní A, B tak, aby $f_A(n) = f_B(n)$ pro všechna nezáporná celá n .

ŘEŠENÍ:

Dokážeme, že takové rozdělení existuje.

Nejprve pár pozorování. Ať je S libovolná množina nezáporných celých čísel a zakódujeme ji do mocninné řady $G_S(x) = \sum_{s \in S} x^s$, tedy do takové řady, která má u x^k koeficient 1, pokud $k \in S$, a 0, pokud $k \notin S$. Potom v součinu $G_S(x)^2$ vznikne roznásobením člen $x^{s_1+s_2}$ za každou uspořádanou dvojici (s_1, s_2) prvků S . Dohromady se tak u libovolného x^k nasbírá počet takových uspořádaných dvojic se součtem k . To je skoro $f_S(k)$, až na podmínku $s_1 \neq s_2$.

Naproti tomu $G_S(x^2)$ (exponent je uvnitř závorky, předtím byl vně!) je prostě $\sum_{s \in S} x^{2s}$, takže koeficient u x^k je 1, pokud je k sudé a $\frac{k}{2} \in S$, a 0 jinak. To můžeme trochu krkolomně přeformulovat jako počet těch uspořádaných dvojic (s_1, s_2) prvků S , pro něž $s_1 + s_2 = k$ a přitom $s_1 = s_2$.

Z toho dohromady plyne, že řadu $\sum_{n=0}^{\infty} f_S(n)x^n$ můžeme vyjádřit jako $G_S(x)^2 - G_S(x^2)$. Nyní k úloze jako takové. Ptáme se, zda dovedeme rozdělit nezáporná celá čísla na dvě disjunktní A, B tak, aby

$$G_A(x)^2 - G_A(x^2) = G_B(x)^2 - G_B(x^2). \quad (\spadesuit)$$

Přeuspořádáním získáme tvar

$$(G_A(x) - G_B(x))(G_A(x) + G_B(x)) = G_A(x^2) - G_B(x^2).$$

Dále využijeme toho, že A a B tvoří disjunktní rozdělení nezáporných celých čísel, což je v řeči našeho kódování množin do mocninných řad ekvivalentní $G_A(x) + G_B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Nyní si ještě všimneme, že na obou stranách se vyskytuje rozdíl $G_A - G_B$, jenom je do něj napravo dosazeno x^2 . Pokud tedy označíme $H = G_A - G_B$, máme

$$\frac{H(x)}{1-x} = H(x^2), \quad (\heartsuit)$$

²V univerzální algebře či logice se lze setkat i s použitím nepřeloženého „term“, stále však ne „termín“.

přičemž H je řada, v níž je každý koeficient buď 1, nebo -1 . Zdůrazněme, že tahle rovnice je stále v podstatě ekvivalentní původní úloze: Pokud najdeme „plusmínusjedničkovou“ řadu $H(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ splňující $(\heartsuit)$, pak z ní dovedeme zrekonstruovat A i B podle toho, u kterých x^k jsou 1 a u kterých -1 . Tato rekonstrukce množin zaručí, že $G_A - G_B$ bude rovno naší výchozí H , načež se pak $(\heartsuit)$ ekvivalentními úpravami převede zpět na $(\spadesuit)$, což už přesně říká, že $f_A(n) = f_B(n)$ pro všechna n .

Stačí nám proto zkonstruovat plusmínusjedničkovou řadu H , jež řeší $(\heartsuit)$. To lze provést přímo z $(\heartsuit)$, označme si k tomu zatím neznámé plusmínusjedničky pomocí $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n$. Převedením $1 - x$ napravo v $(\heartsuit)$ pak máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n x^{2n} - \varepsilon_n x^{2n+1}),$$

což odpovídá sadě rovností $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n$ a $\varepsilon_{2n+1} = -\varepsilon_n$. Z toho lze posloupnost ε_n navolit postupně: nejprve si libovolně zvolíme $\varepsilon_0 \in \{1, -1\}$, následně $\varepsilon_1 = -\varepsilon_0$. Poté zase $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ a $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1$, dále

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_5 = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_7 = -\varepsilon_3 \quad \text{atd.}$$

Do problémů se nikdy nedostaneme, neboť každé ε_k vystupuje v právě jedné rovnosti porovnávající jej s nějakým ε_j na nižším indexu $j < k$. Hledaná řada H proto existuje, takže také lze provést rozdělení nezáporných čísel požadované v úloze.

Mimochodem, pokud se na tuto konstrukci ještě chvíli zahledíš, mohou Ti z ní vyplynout ještě následující pozorování – necháváme Ti je jako cvičení:

- (i) Až na prohození A, B existuje jen jedno rozdělení, které úlohu splňuje.
- (ii) A konkrétně je to rozdělení, v němž A tvoří ta čísla, jež mají ve svém zápisu ve dvojkové soustavě sudý počet jedniček, a B zase ta, která mají lichý počet jedniček.

POZNÁMKY:

Všechna došlá řešení v nějaké podobě odhalila správné rozdělení na A a B , takže všechna obdržela nenulové množství bodů, ne vždy se ale podařilo funkčnost tohoto rozdělení korektně dokázat. V řešení *Ondřeje Vočky* mne samotného překvapilo, že rekurence $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n$ a $\varepsilon_{2n+1} = -\varepsilon_n$ (resp. jejich kombinatorické ekvivalenty: pokud $n \in A$, pak $2n \in A$, $2n + 1 \in B$) lze nahlédnout čistě kombinatoricky, načež se úloha dá vyřešit i bez generujících funkcí. (Matěj Doležálek)