

Opakování

3. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. PROSINCE 2024

V této sérii pomocí $f^k(n)$ značíme $\underbrace{f(f(\cdots f(n)\cdots))}_{k\text{-krát}}$.

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Pro kladné celé číslo n definujeme

$$f(n) = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11 \dots 1}_{n\text{-krát}},$$

kde sčítáme n sčítanců. Určete nejmenší n takové, že $f(n)$ je násobkem 45.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Označme $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Určete $f^{2025}(2024)$.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Johy na tabuli napsala čísla 5, 7 a 11. Poté v každém kroku vybrala z tabule dvě čísla a , b a připsala tam také číslo $5a - 4b$. Mohlo se na tabuli po konečném počtu kroků objevit číslo 2024?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Označme $\mathbb{P}$ množinu všech prvočísel. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ takové, že pro libovolná $p, q \in \mathbb{P}$ platí

$$\text{NSD}(p, q) = \text{NSD}(f^p(q), f^q(p)).$$

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Nechť $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je funkce daná předpisem

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{pokud je } n \text{ sudé,} \\ 3n + 1, & \text{pokud je } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ lze zvolit $k \in \mathbb{N}$ takové, že v nekonečné posloupnosti

$$kn, \quad f(kn), \quad f(f(kn)), \quad f(f(f(kn))), \quad \dots$$

se vyskytne číslo 1.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Štěpán si nakreslil svůj oblíbený nedegenerovaný trojúhelník. Poté v každém kroku opakoval následující: změřil délky stran a , b , c svého současného trojúhelníku, smazal jej a pokusil se nakreslit nový trojúhelník s délkami stran $a + b - c$, $a + c - b$, $b + c - a$. Pokud z úseček s těmito délkami nešel sestavit nedegenerovaný trojúhelník, Štěpán kreslení zanechal. Určete všechny možné délky stran prvního trojúhelníku, pokud víte, že Štěpán kreslil nové a nové trojúhelníky do nekonečna.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno $k \in \mathbb{N}$ splňující $f^k(n) \leq n + k + 1$.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Lukáš na tabuli napsal konečně mnoho racionálních čísel. Poté přišla Bára, z tabule zvolila dvě čísla x, y (ne nutně různá) taková, že $xy \neq 1$, a připsala na tabuli také číslo $\frac{x+y}{1-xy}$. Toto mohla libovolně mnohokrát zopakovat. Dokažte, že ať napsal Lukáš na tabuli jakákoliv čísla, vždy existovalo nějaké $q \in \mathbb{Q}$, které Bára na tabuli nemohla dostat, ať se snažila sebevíc.

Opakování

3. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Pro kladné celé číslo n definujeme

$$f(n) = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11 \dots 1}_{n\text{-krát}},$$

kde sčítáme n sčítanců. Určete nejmenší n takové, že $f(n)$ je násobkem 45.

ŘEŠENÍ:

Označme si

$$\varphi(n) := \underbrace{11 \dots 1}_{n\text{-krát}}.$$

Potom $f(n)$ můžeme zapsat jako $f(n) = \sum_{k=1}^n \varphi(k)$. Všimněme si, že $f(n)$ je násobkem 45 právě tehdy¹, když je násobkem 5 a zároveň 9. Rozeberme nejprve dělitelnost pěti. Nejprve si všimněme, že dekadický zápis $\varphi(k)$ končí jedničkou pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, čili $\varphi(k) \equiv 1 \pmod{10}$. Potom je také $\varphi(k) \equiv 1 \pmod{5}$. Protože $f(n)$ je součet n čísel, která dávají zbytek 1 modulo 5, bude výsledek dávat zbytek n :

$$f(n) = \sum_{k=1}^n \varphi(k) \equiv \sum_{k=1}^n 1 = n \pmod{5}.$$

Vidíme, že aby mohlo $5 \mid f(n)$, musí $5 \mid n$.

Nyní se podívejme na dělitelnost devíti. Vyřešíme nejprve, kolik je $\varphi(n)$ modulo 9. Platí, že zbytek po dělení číslem 9 je stejný jako zbytek jeho ciferného součtu po dělení 9. Proto $\varphi(n) \equiv n \pmod{9}$. Můžeme tedy spočítat zbytek

$$f(n) = \sum_{k=1}^n \varphi(k) \equiv \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \pmod{9}.$$

Proto aby platilo $9 \mid f(n)$, musí $9 \mid \frac{n(n+1)}{2}$, tedy $9 \mid n(n+1)$. Trojka nemůže zároveň dělit dvě po sobě jdoucí čísla, takže musí buď $9 \mid n$, nebo $9 \mid n+1$.

Dejme nyní vše dohromady. Zjistili jsme, že $5 \mid n$ a zároveň $9 \mid n$, nebo $9 \mid n+1$. Vyřešíme tedy dva případy. Uvažme nejprve $5 \mid n$ a $9 \mid n$. To platí právě tehdy, když $45 \mid n$, takže n je nějaký násobek 45. Nejmenší takový násobek je $n = 45$. Pro druhý případ $5 \mid n$ a $9 \mid n+1$ vyzkoušíme několik možností. Aby $9 \mid n+1$, musí $n = 9k - 1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Dostáváme postupně čísla 8, 17, 26, 35. Nejmenší, které je dělitelné 5, je 35.

Protože $35 < 45$, nejmenší řešení je $n = 35$.

¹Ekvivalence platí, protože 5 a 9 jsou nesoudělná

POZNÁMKY:

Většina řešitelů vyřešila úlohu správně. Nejčastější chybou bylo tvrdit, že ciferný součet $f(n)$ se rovná $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Toto neplatí pro větší n . (Zkus si dosadit $n = 10$.) Čísla pouze dávají stejný zbytek modulo 9. (Ondra Trinkewitz)

Úloha 2.

Označme $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Určete $f^{2025}(2024)$.

ŘEŠENÍ:

Podíváme se, co se stane, pokud $f(x)$ několikrát opakujeme.

$$\begin{aligned}f^1(x) &= \frac{1}{1-x} \\f^2(x) &= \frac{1}{1-f^1(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} \\f^3(x) &= \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1-x}{-x}} = \frac{1}{\frac{-1}{-x}} = x\end{aligned}$$

Vidíme, že $f^3(x) = x$, a tak platí $f^{3k}(x) = x$ pro každé přirozené k . Jelikož $2025 = 3 \cdot 675$, tak $f^{2025}(x) = f^3(x) = x$, tedy $f^{2025}(2024) = 2024$.

POZNÁMKY:

Všichni řešitelé si s úlohou velmi dobře poradili, jen někteří trochu válčili s úpravami výrazů nebo se zbytky po dělení číslem 3, jelikož $f(x) = f^1(x)$ nikoliv $f^0(x)$. (Klárka Grinerová)

Úloha 3.

Johy na tabuli napsala čísla 5, 7 a 11. Poté v každém kroku vybrala z tabule dvě čísla a , b a připsala tam také číslo $5a - 4b$. Mohlo se na tabuli po konečném počtu kroků objevit číslo 2024?

ŘEŠENÍ:

Všimneme si, že na tabuli sú iba nepárne (liché) čísla. Ak sú na tabuli iba nepárne čísla, vieme v jednom kroku pripísať iba ďalšie nepárne číslo. Prečo? Zoberme si dve čísla z tabule, keďže sú nepárne, vieme ich zapísať napríklad ako $a = 2k + 1$ a $b = 2m + 1$, kde k a m sú celé. Potom pripíšeme číslo

$$5(2k + 1) - 4(2m + 1) = 10k + 5 - 8m - 4 = 2(5k - 4m) + 1,$$

čo je vždy nepárne.

To znamená, že na to, aby sme na tabuľu dopísali párne (sudé) číslo, musí už nejaké párne číslo na tabuli byť. V našom príklade tam na začiatku nie je, a tak sa nikdy nedostaneme do stavu, že pripíšeme prvé párne číslo. Nikdy sa tak na tabuli neobjaví žiadne párne číslo, teda ani 2024.

POZNÁMKY:

Väčšina riešiteľov riešila úlohu pomocou parity. Dá sa to ale napríklad aj cez zvyšky po delení 4 alebo 5, môžeš si to vyskúšať. (Alica Dományiová)

Úloha 4.

Označme $\mathbb{P}$ množinu všech prvočísel. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ takové, že pro libovolná $p, q \in \mathbb{P}$ platí

$$\text{NSD}(p, q) = \text{NSD}(f^p(q), f^q(p)).$$

ŘEŠENÍ:

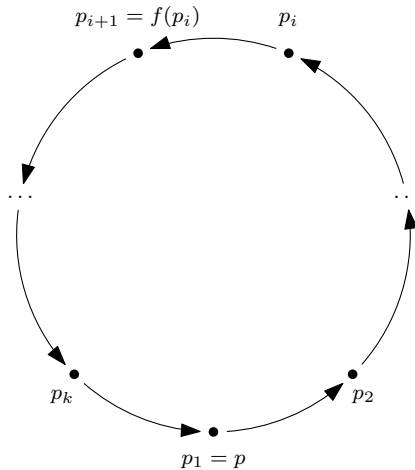
Všimněme si, že $f(x) = x$ rovnost splňuje. Dále ukážeme, že žádná jiná funkce rovnost nesplňuje.

Uvažme vyhovující funkci, která není identita. Pak jistě existují nějaká prvočísla $p \neq q$ taková, že $f(p) = q$. Ze vztahu ze zadání pro dvojici prvočísel p, p platí: $p = \text{NSD}(p, p) = \text{NSD}(f^p(p), f^p(p)) = f^p(p)$. Co to vlastně znamená? Pokud máme prvočíslu p , vrátíme se po p aplikacích funkce f zpět na hodnotu p , pro každé prvočíslu tak funkce vytvoří cyklus.

Mějme cyklus C_p prvočísel $p_1, \dots, p_k$ takový, že $k \mid p$ (neboť víme, že po p krocích se opět dostaneme na začátek cyklu), $p_1 = p$, $p_2 = q$, pro $i < k$ platí $f(p_i) = p_{i+1}$ a $f(p_k) = p_1$. Protože p je prvočíslu, může být k pouze 1 nebo p . Jelikož p a $f(p) = q$ jsou dva různé prvky cyklu, nemůže k být rovno 1, musí být tedy rovno p .

Analogicky získáme i cyklus C_q délky q obsahující q . Cykly C_q a C_p oba obsahují prvočíslu q , tedy platí $C_q = C_p$. To je ale spor, protože mají rozdílné délky.

Jediná funkce, která splňuje rovnici je opravdu $f(p) = p$.



POZNÁMKY:

Spousta řešení byla správných. Ovšem hodně jich máchalo rukama, nohama, za což jsem bohužel musel strhávat body. :(

(Vojta „Dlážďa“ Gadurek)

Úloha 5.

Nechť $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je funkce daná předpisem

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{pokud je } n \text{ sudé,} \\ 3n + 1, & \text{pokud je } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ lze zvolit $k \in \mathbb{N}$ takové, že v nekonečné posloupnosti

$$kn, \quad f(kn), \quad f(f(kn)), \quad f(f(f(kn))), \quad \dots$$

se vyskytne číslo 1.

ŘEŠENÍ:

Nejprve si uvědomme, že jakmile se dostaneme k číslu 2^i pro libovolné nezáporné i , po i iteracích naší funkce se dostaneme na 1. Naším cílem bude tedy pro dané n najít takové k , které by argument funkce eventuálně přetvořilo na mocninu dvou.

Vyjádříme si naše dané n jako $2^\ell x$, kde x je liché a $\ell \geq 0$. Jistě takto můžeme vyjádřit libovolné n (uvědomme si, že pro liché n bude $\ell = 0$). Zřejmě při prvních ℓ iteracích budeme argument funkce pouze dělit dvěma. Předpokládejme, že naše k je liché (pokud by bylo sudé, pouze bychom přidali iterace, které by argument dělily dvěma, až bychom se eventuálně dostali k nějakému lichému k'). Po nějakém počtu iterací tedy budeme mít číslo kx , které je liché, po další iteraci bude $3kx + 1$.

Ukážeme, že existují k, j , pro něž platí $3kx + 1 = 2^j$, tedy, že výše zmíněný výraz je mocninou dvou. Vyjádříme si $k = \frac{2^j - 1}{3x}$. Jelikož k musí být přirozené, musí $3x$ dělit $2^j - 1$, chceme tedy vybrat takové j , že $2^j \equiv 1 \pmod{3x}$.

Nyní můžeme být hrozně fancy a vzpomenout si, že existuje Eulerova věta. Ta nám říká, že pro každé přirozené n a každé přirozené a nesoudělné s m platí, že $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Pokud tedy do Eulerovy věty za m dosadíme $3x$ a za a dosadíme 2 (což je jistě s lichým číslem $3x$ nesoudělné), dostaneme $2^{\varphi(3x)} \equiv 1 \pmod{3x}$. Získáme tak, že nějaké takové vyhovující j bude například $\varphi(3x)$.

Pokud si náhodou na Eulerovu větu nevzpomeneme, můžeme si uvědomit, že mezi prvními $3x + 1$ mocninami 2 budou z Dirichletova principu určitě dvě se stejným zbytkem modulo $3x$. Nechť to jsou 2^a a 2^b , kde BÚNO $a \geq b$. Pak platí $2^a \equiv 2^b \pmod{3x}$. Jelikož 2^b a $3x$ jsou nesoudělné, můžeme kongruenci vydělit 2^b . Tím získáme $2^{a-b} \equiv 1 \pmod{3x}$. Pokud tedy zvolíme $j = a - b$, máme příslušný vyhovující exponent, který lze jednoduše získat spočtením prvních několika mocnin 2 a jejich zbytků modulo $3x$.

Dokázali jsme, že takové j lze zvolit, tedy lze zvolit i příslušné k . Tím pádem bude i nějaký člen naší posloupnosti mocninou 2 a opravdu se v posloupnosti eventuálně vyskytne číslo 1.

POZNÁMKY:

Naprostá většina řešitelů postupovala stejným směrem, jako vzorové řešení. Někteří řešitelé byli odvážní a vydali se jinudy. Některým to vyšlo, jiní se bohužel ztratili v nefungujících argumentech. Byla jsem přísná a za neocitování vět/nedovysvětlené věci jsem strhávala bod. Za řešení, kterým chybělo si uvědomit, že existuje něco jako Eulerova věta, jsem dávala 3 body.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)

Úloha 6.

Štěpán si nakreslil svůj oblíbený nedegenerovaný trojúhelník. Poté v každém kroku opakoval následující: změřil délky stran a, b, c svého současného trojúhelníku, smazal jej a pokusil se nakreslit nový trojúhelník s délkami stran $a + b - c, a + c - b, b + c - a$. Pokud z úseček s těmito délkami nešel sestavit nedegenerovaný trojúhelník, Štěpán kreslení zanechal. Určete všechny možné délky stran prvního trojúhelníku, pokud víte, že Štěpán kreslil nové a nové trojúhelníky do nekonečna.

ŘEŠENÍ:

Ukážme, že jestli se Štěpánovi podařilo kreslit trojúhelníky do nekonečna, jistě začal s rovnostranným trojúhelníkem.

Bez újmy na obecnosti pro spor předpokládejme, že máme nerovnostranný trojúhelník se stranami a, b, c , kde $a \geq b \geq c > 0$, takový, že by mohl Štěpán kreslit trojúhelníky do nekonečna. Označme si $S = a + b + c$. Po prvním kroku se nám délky stran změní na $a + b - c, b + c - a, c + a - b$. Všimněme si, že tyto délky umíme zapsat jako $a + b - c = S - 2c, b + c - a = S - 2a, c + a - b = S - 2b$. Vzhledem k předpokladu $a \geq b \geq c > 0$ budou délky stran nového trojúhelníku seřazeny následovně: $S - 2c \geq S - 2b \geq S - 2a$.

Podívejme se nyní na rozdíl nejdelší a nejkratší strany. Na začátku to byly po řadě strany a a c , jejich rozdíl byl tedy roven $a - c$. V dalším kroku to pak je rozdíl stran $S - 2c$ a $S - 2a$, tedy $S - 2c - S + 2a = 2(a - c)$. To ovšem znamená, že se rozdíl nejdelší a nejkratší strany v každém kroku zdvojnásobí. Pokud tedy na začátku Štěpán dostal trojúhelník, kde je tento rozdíl větší než

0, a víme, že v každém kroku $2x$ vzroste, po nějakém kroku zmíněný rozdíl jistě přesáhne i hodnotu S .

Také ale platí, že se součet stran trojúhelníku na začátku a po prvním kroku nezmění, jelikož $a + b + c = S$ a zároveň

$$S - 2a + S - 2b + S - 2c = 3S - 2(a + b + c) = 3S - 2S = S.$$

Tím pádem zůstává obvod trojúhelníku stejný a zároveň, jak už víme, rozdíl nejdelší a nejkratší strany v nějakém kroku přesáhne hodnotu S . Označme si délky stran takového trojúhelníku jako $c \leq b \leq a > c + S$. Jelikož je nutně každá strana trojúhelníku menší než jeho obvod, platí $S > a > c + S$, tedy strana c by musela být záporná. Dostáváme tak spor s předpokladem, že rozdíl nejdelší a nejkratší strany je na začátku nenulový (že je trojúhelník nerovnostranný), tudíž tento rozdíl musí být roven 0. Pak ovšem na začátku platilo $a \geq b \geq c = a \implies a = b = c$.

Pro rovnostranný trojúhelník s délkami stran a, a, a dostaneme v dalším kroku trojúhelník o délce každé strany $a + a - a$, tedy opět a . Vidíme, že trojúhelník vůbec nezměníme, takže ho opravdu můžeme (ne)obměňovat do nekonečna.

Závěrem je, že se Štěpánovi mohlo povést kreslit trojúhelníky do nekonečna právě tehdy, když začal s rovnostranným trojúhelníkem.

POZNÁMKY:

Na tuto úložku nám dorazila spousta různých řešení! Každý řešitel k zadání přistupoval trochu jinak – některé postupy byly o dost pracnější než postup, který jsem použila ve vzoráku. To v některých případech vedlo k menším chybám nebo k nepořádným důkazům a v takových případech jsem strhávala bodíky. I techničtější cestou se ale většině řešitelů podařilo dojít ke správnému závěru a všichni se s úložkou náležitě poprali!

(Lenka Poljaková)

Úloha 7.

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno $k \in \mathbb{N}$ splňující $f^k(n) \leq n + k + 1$.

ŘEŠENÍ:

Nechť f je libovolná funkce vyhovující zadání. Sporem o ní dokážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňuje $f(n) > n + 1$. Pro spor tedy předpokládejme, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $f(n_1) \leq n_1 + 1$. Označme $n_2 = f(n_1)$. Pro n_2 ze zadání existuje k_2 takové, že $f^{k_2}(n_2) \leq n_2 + k_2 + 1$. Dosazením za n_2 dostáváme:

$$\begin{aligned} f^{k_2}(f(n_1)) &\leq f(n_1) + k_2 + 1, \\ f^{k_2+1}(n_1) &\leq f(n_1) + k_2 + 1 \leq (n_1 + 1) + k_2 + 1 = n_1 + (k_2 + 1) + 1, \end{aligned}$$

kde druhá nerovnost plyne z $f(n_1) \leq n_1 + 1$. Pro n_1 je tedy hodnota k , která splňuje nerovnost ze zadání, $k_2 + 1$. To je ale spor, protože platí $f^1(n_1) \leq n_1 + 1 + 1$ a nerovnost je tedy splněna i pro $k = 1$, což je nutně jiná hodnota ($k_2 \neq 0$). Dostali jsme spor a pro každé n tedy platí $f(n) > n + 1$. Tedy $f(n) \geq n + 2$, z čehož plyne $f^k(n) \geq n + 2k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Zvolme si nyní konkrétní n' . Pro něj existuje unikátní k' , pro které je splněna nerovnost ze zadání $f^{k'}(n') \leq n' + k' + 1$ a zároveň platí nerovnost $f^{k'}(n') \geq n' + 2k'$. Musí proto platit:

$$\begin{aligned} n' + k' + 1 &\geq n' + 2k', \\ 1 &\geq k'. \end{aligned}$$

A jelikož $k' \in \mathbb{N}$, tak z toho již $k' = 1$. Právě jsme tedy dokázali, že aby funkce vyhovovala zadání, tak pro všechna n musí být hodnota k splňující nerovnost v zadání rovna jedné. Tedy $f(n) \leq n + 2$ pro všechna n . Máme však i opačnou nerovnost a dohromady tedy $f(n) = n + 2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Taková funkce je již jednoznačně určena a stačí ukázat, že skutečně vyhovuje zadání. To je však již jednoduché, protože zřejmě pro libovolné n a $k = 1$ je nerovnost splněna, ale pro $k \geq 2$ dostáváme $f^k(n) = n + 2k \geq n + k + 2$. Jediná funkce vyhovující zadání je tedy $f(n) = n + 2$.

POZNÁMKY:

Nejtěžší na řešení bylo ukázat, že je funkce pro všechna n rostoucí, což došla řešení dělala rozmanitými způsoby. Vždy však bylo nejdůležitější neztratit se v nerovnostech. Některá řešení si nedala pozor, že které hodnotě n patří dané k a pak například odečetla k , která vůbec nebyla stejná.

Důležité také bylo nepředpokládat o funkci nic, co nemusí platit - funkce například nemusí mít žádný předpis polynomem a může se pro různé hodnoty chovat velmi odlišně. No a pak je také důležité nezapomínat, že když člověk dojde ke konci důkazu a správně určí, že funkce vyhovující zadání nemůže mít jiný předpis než $f(n) = n + 2$, tak je ještě důležité alespoň zmínit, že tento předpis již zadání splňuje. (Martin „Fofík“ Fof)

Úloha 8.

Lukáš na tabuli napsal konečně mnoho racionálních čísel. Poté přišla Bára, z tabule zvolila dvě čísla x, y (ne nutně různá) taková, že $xy \neq 1$, a připsala na tabuli také číslo $\frac{x+y}{1-xy}$. Toto mohla libovolně mnohokrát zopakovat. Dokažte, že ať napsal Lukáš na tabuli jakákoliv čísla, vždy existovalo nějaké $q \in \mathbb{Q}$, které Bára na tabuli nemohla dostat, ať se snažila sebevíc.

ŘEŠENÍ:

Když si zkusíme dosadit za racionální čísla $x = \frac{a}{b}$ a $y = \frac{c}{d}$, zjistíme, že $\frac{x+y}{1-xy} = \frac{ad+bc}{bd-ac}$. Toto nám začne připomínat násobení komplexních čísel: $(b+ai)(d+ci) = (bd-ac) + (ad+bc)i$; případně Brahmaguptovu identitu: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad+bc)^2 + (bd-ac)^2$. Pro libovolné $x \in \mathbb{Q}$ v základním zlomkovém tvaru $x = \frac{a}{b}$ tedy označme a zkoumejme $\hat{x} = a^2 + b^2$. Všimněme si, že $\hat{x} \in \mathbb{N}$. Pokud vezmeme nějaké Bárou vytvořené číslo $z = \frac{x+y}{1-xy} = \frac{ad+bc}{bd-ac}$ a převedeme zlomek do základního tvaru vydělením čitatele i jmenovatele číslem D , kde $D = \text{NSD}(ad+bc, bd-ac)$, pak pro $\hat{x}, \hat{y}$ a $\hat{z}$ definovaná stejně jako výše bude platit:

$$\hat{z} = \frac{(ad+bc)^2}{D^2} + \frac{(bd-ac)^2}{D^2} \mid (ad+bc)^2 + (bd-ac)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = \hat{x} \cdot \hat{y}.$$

Označme $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ množinu čísel, která Lukáš na začátku napsal. Kdykoliv Bára na tabuli přidala nějaké číslo $z = \frac{x+y}{1-xy}$, víme, že $\hat{z} \mid \hat{x} \cdot \hat{y}$. Potom ale platí, že množina prvočísel, která dělí $\hat{z}$, musí nutně být podmnožinou prvočísel, která dělí $\hat{x} \cdot \hat{y}$. To ale znamená, že pro každé z , které kdy Bára na tabuli vytvoří, může být $\hat{z}$ dělitelné pouze prvočísly (tedy mít ve svém rozkladu pouze prvočísla), která dělila $\hat{x}_i$ pro některé z počátečních čísel $x_i \in X$. Volně řečeno, pomocí Bářiny operace nemůže v rozkladu $\hat{z}$ vzniknout žádné „nové“ prvočíslo.

Nyní tedy vezmeme nějaké prvočíslo $p \equiv 1 \pmod{4}$ (k čemu bude tato vlastnost potřeba, uvidíme později) takové, že $p \nmid \hat{x}_i$ pro každé $x_i \in X$. To jde vždycky, protože prvočísel kongruentních 1 modulo 4 je nekonečně mnoho.

Tudíž p nemůže dělit $\hat{z}$ pro žádné z , které kdy Bára umí na tabuli vytvořit. Kdybychom tedy našli nějaké $w \in \mathbb{Q}$ takové, že $p \mid \hat{w}$, máme vyhráno, protože je Bára určitě nevyrobí.

Nyní si vzpomeneme na známé tvrzení, že pro každé prvočíslo p kongruentní 1 modulo 4 je -1 kvadratický zbytek, tedy že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $k^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Potom ale platí $p \mid k^2 + 1^2$, kde si můžeme všimnout, že $k^2 + 1^2 = \left(\frac{1}{k}\right)$. Takže když zvolíme naše $w = \frac{1}{k}$, platí $p \mid \hat{w}$ a máme vyhráno.

Našli jsme $w \in \mathbb{Q}$, které Bára nikdy nemůže na tabuli dostat.

POZNÁMKY:

Na úloze bylo nejdůležitější získat náhled, že se Bářina funkce chová pěkně k výrazu $\hat{x} = a^2 + b^2$. Zbytek úlohy se dal dořešit různě, osobně se mi líbilo elegantní řešení od *Dominika Rigasze* pomocí Gaussových prvočísel². (Ondra Trinkewitz)

²O Gaussových prvočíslech si můžeš pěkně počíst například tady: https://prase.cz//library/s_AlgebraickaTC_1/s_AlgebraickaTC_1.pdf, nebo trochu obsáhleji od strany 29 zde: <https://prase.cz//library/KomplexniCislaJHJO/KomplexniCislaJHJO.pdf>.