

V lese

3. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. DUBNA 2025

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Matěj chtěl vysázet les. Do každého políčka čtvercové tabulky 8×8 zasadil jeden strom, přičemž některé z nich byly duby a zbylé buky. Je možné, aby v každém řádku rostl různý počet buků, ale v každém sloupci jich rostl stejný počet?

ÚLOHA 2. (3 BODY)

V lese roste 50 stromů s výškami 1, 2, $\dots$, 50 metrů. Rozhodněte, zda si Lukáš může vybrat 33 z nich, aby výška žádného z vybraných stromů nebyla přesně dvojnásobkem výšky jiného vybraného stromu.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

José vedl skupinku čtyř účastníků krátkého výletu, ale po cestě zpátky na objekt se ztratili. Po dlouhém bloudění se dostali na křižovatku, ze které (kromě cesty, po které na ni přišli) vedou čtyři cesty, přičemž dojít na konec libovolné z nich trvá 20 minut. José ví, že objekt leží na konci jedné z těchto cest, ale nepamatuje si na které. Také ví, že dva z účastníků jsou správní a poctiví a vždy mluví pravdu, kdežto dva jsou nezbedové a mohou jak mluvit pravdu, tak lhát. Bohužel ale neví, kteří účastníci jsou nezbedové. José může provádět tyto akce:

- Vyslat účastníka po některé cestě, ten pak poslušně dojde na konec a vrátí se. Poté se ho José může zeptat, zda na konci cesty našel objekt, nebo ne.
- Sám se vydat některou z cest, dojít na konec a vrátit se.
- Vzít všechny účastníky, vydat se s nimi na konec některé cesty a už se nevracet.

José může účastníkům dávat příkazy pouze tehdy, když se setkají na křižovatce. Existuje strategie, s níž dovede José nejvýše po 100 minutách stanout spolu se všemi účastníky na objektu?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Klárka a 2025 lesních zvířátek hrají hru na nekonečné čtvercové mřížce. Každý hráč si ve svém tahu vybere zatím neobarvenou stranu jednotkového mřížového čtverečku a obarví ji. Začíná Klárka, poté postupně táhne každé z 2025 zvířátek, a takto pořád dokola. Klárka vyhraje, pokud v nějaký moment nastane situace, že některý obdélník 2×1 **nebo** 1×2 má obarvený celý svůj obvod, ale nikoliv svou jedinou vnitřní (jednotkovou) úsečku. Může si Klárka zaručit v konečném počtu tahů vítězství?

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Ukažte, že existuje přirozené číslo s , pro něž existuje alespoň 2025 dvojic různých přirozených čísel ℓ , e splňujících

$$\frac{1}{\ell - e} = \frac{1}{\ell} - \frac{1}{e} + \frac{1}{s}.$$

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

Pro prvočíslo p definujeme posloupnost celých čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vztahy $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ a

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - pa_n$$

pro všechna přirozená čísla n . Nalezněte všechny možné hodnoty p , pro které se v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vyskytne hodnota -1 .

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

V PraSestánu operuje $n \geq 4$ letišť. Letecká společnost PraSér provozuje mezi každými dvěma letišti právě jednu (obousměrnou) leteckou linku, v rámci snížení emisí by jich ale chtěla co nejvíc zrušit. Zákon o letecké dopravě nařizuje, že:

- (1) Letecké linky se smí rušit jen postupně, jedna po druhé.
- (2) Letecká linka mezi letišti A a B se smí zrušit pouze tehdy, pokud existují další dvě letiště C , D taková, že linky mezi B a C , mezi C a D a mezi D a A jsou stále v provozu.

Určete v závislosti na n , kolik nejvíce linek může PraSér zrušit.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Bud' $O_1O_2O_3O_4O_5O_6O_7O_8$ konvexní osmiúhelník, jehož všechny strany jsou stejně dlouhé a jehož protější strany¹ O_iO_{i+1} a $O_{i+4}O_{i+5}$ jsou pro každé $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ rovnoběžné. Bod L_i nechť je pro $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ průsečíkem O_iO_{i+4} s $O_{i-1}O_{i+1}$. Dokažte, že existuje $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$, pro nějž

$$\frac{|L_k L_{k+4}|}{|O_k O_{k+4}|} \geq \frac{2}{3}.$$

¹Číslování všech bodů uvažujeme modulo 8, tedy $O_9 = O_1$, $L_{10} = L_2$, apod.

V lese

3. JARNÍ SÉRIE

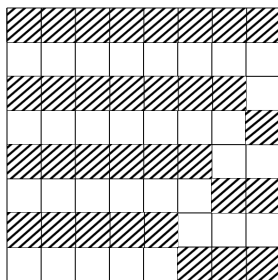
VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Matěj chtěl vysázet les. Do každého políčka čtvercové tabulky 8×8 zasadil jeden strom, přičemž některé z nich byly duby a zbylé buky. Je možné, aby v každém řádku rostl různý počet buků, ale v každém sloupci jich rostl stejný počet?

ŘEŠENÍ:

V každém z osmi řádků tabulky může být právě jeden z devíti možných počtů buků z množiny $\{0, 1, \dots, 8\}$, tudíž právě jeden z nich nebude využit; označme ho m , kde $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$. Celkový počet buků je pak roven $S = 0 + 1 + \dots + 8 - m = 36 - m$. Navíc musí S být dělitelný 8, neboť každý sloupec má obsahovat stejný počet buků. Díky tomu, že $28 \leq S \leq 36$, už nutně $S = 32 = 36 - 4$, takže tabulka se musí skládat z řádků s 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 buky, přičemž v každém sloupci musí být právě čtyři buky. Takovou tabulku je přitom možné nalézt, viz příklad níže (kde šrafovaný čtvereček značí dub a bílý značí buk):



POZNÁMKY:

Přišla spousta správných řešení, která se zpravidla lišila jen ve zvolené tabulce. K získání plného počtu bodů přitom stačilo ukázat vyhovující tabulku, postup k nalezení řešení jako výše je spíše orientační, ovšem není špatné ho do řešení napsat. (Štěpán Varhaník)

Úloha 2.

V lese roste 50 stromů s výškami 1, 2, $\dots$, 50 metrů. Rozhodněte, zda si Lukáš může vybrat 33 z nich, aby výška žádného z vybraných stromů nebyla přesně dvojnásobkem výšky jiného vybraného stromu.

ŘEŠENÍ:

Ukážeme, že Lukáš může vybrat 33 stromů splňujících zadání. Jelikož se chceme vyhnout tomu, aby výška jednoho stromu byla dvojnásobkem výšky jiného vybraného stromu, zaměříme se na mocninu dvojky v prvočíselném rozkladu. Pokud vybereme všechny stromy s výškami, jejichž prvočíselný

rozklad obsahuje dvojku v sudé mocnině, pak bude platit, že výška žádného vybraného stromu není dvojnásobkem výšky jiného vybraného stromu. Pro 2^0 dostáváme stromy liché výšky, kterých je 25, pro 2^2 dostáváme stromy s výškami 4, 12, 20, 28, 36 a 44, pro 2^4 potom 16 a 48. Celkem tak máme $25 + 6 + 2 = 33$ stromů, které Lukáš mohl vybrat.

POZNÁMKY:

Všechna odevzdaná řešení byla správně. Velká část řešitelů zvolila podobné řešení, jako je to vzorové, tedy nejprve vybrali všechny stromy liché výšky a následně je doplnili o dalších 8 stromů sudé výšky. Někteří nejprve vybrali stromy s výškou alespoň 26 a následně je vhodně doplnili o stromy, jejichž výška je nejvýše 12. (Klárka Grinerová)

Úloha 3.

José vedl skupinku čtyř účastníků krátkého výletu, ale po cestě zpátky na objekt se ztratili. Po dlouhém bloudění se dostali na křižovatku, ze které (kromě cesty, po které na ni přišli) vedou čtyři cesty, přičemž dojít na konec libovolné z nich trvá 20 minut. José ví, že objekt leží na konci jedné z těchto cest, ale nepamatuje si na které. Také ví, že dva z účastníků jsou správní a poctiví a vždy mluví pravdu, kdežto dva jsou nezbedové a mohou jak mluvit pravdu, tak lhát. Bohužel ale neví, kteří účastníci jsou nezbedové. José může provádět tyto akce:

- Vyslat účastníka po některé cestě, ten pak poslušně dojde na konec a vrátí se. Poté se ho José může zeptat, zda na konci cesty našel objekt, nebo ne.
- Sám se vydat některou z cest, dojít na konec a vrátit se.
- Vzít všechny účastníky, vydat se s nimi na konec některé cesty a už se nevracet.

José může účastníkům dávat příkazy pouze tehdy, když se setkají na křižovatce. Existuje strategie, s níž dovede José nejvýše po 100 minutách stanout spolu se všemi účastníky na objektu?

ŘEŠENÍ:

Konstrukcí algoritmu ukážeme, že strategie existuje. José pošle všechny účastníky po první cestě a sám se vydá druhou. Po 40 minutách se všichni vrátí na křižovatku, kde se José účastníků zeptá, zda viděli objekt. Zde mohou nastat tři případy:

- (1) José našel objekt, všichni tedy vyrazí na objekt.
- (2) Tři nebo čtyři účastníci odpověděli stejně. José tudíž ví, že v této skupince musí být oba pravdomluvní účastníci, a ví tedy, zda se na konci cesty objekt nachází. Pokud je odpověď ano, vydají se k objektu, jinak půjde José třetí cestou, čímž určí, zda je objekt na této cestě, či na poslední zbývající. Ze třetí cesty se vrátí v 80. minutě a pak se všichni za 20 minut dostanou na objekt.
- (3) Dva účastníci řekli ano a dva ne. V tomto případě si José zapamatuje, kdo říkal co, vyše účastníky po třetí cestě a sám se vydá tou první.

Všichni se vrátí v 80. minutě, přičemž José ví, zda je na první cestě objekt, či ne. Pokud je, není co řešit a všichni vyrazí k objektu, jinak umí určit, kteří účastníci jsou nezbedové a kteří jsou pravdomluvní. Zeptá se pravdomluvných účastníků, zda je objekt na třetí cestě, či ne. V případě, že odpoví ano, vyrazí všichni třetí cestou, jinak se vydají čtvrtou. Tímto dojdou na objekt za dalších 20 minut.

POZNÁMKY:

Všechna správná řešení až na jedno používala stejný postup jako je ten ve vzorovém řešení.

(Petr Hladík)

Úloha 4.

Klárka a 2025 lesních zvířátek hrají hru na nekonečné čtvercové mřížce. Každý hráč si ve svém tahu vybere zatím neobarvenou stranu jednotkového mřížového čtverečku a obarví ji. Začíná Klárka, poté postupně táhne každé z 2025 zvířátek, a takto pořád dokola. Klárka vyhraje, pokud v nějaký moment nastane situace, že některý obdélník 2×1 **nebo** 1×2 má obarvený celý svůj obvod, ale nikoliv svou jedinou vnitřní (jednotkovou) úsečku. Může si Klárka zaručit v konečném počtu tahů vítězství?

ŘEŠENÍ OPRAVENÉHO ZADÁNÍ:

Ano, může. Nejprve si všimněme, že pokud se na herní ploše kdykoli během hry objeví čtverec s délkou strany $n \geq 2$ (tj. jeho strana sestává z n jednotkových úseček mřížky), jenž má celý svůj obvod obarvený, ale alespoň jedna jednotková úsečka ve vnitřku tohoto čtverce je neobarvená, má Klárka vítězství v kapse. Objeví-li se totiž takový čtverec, tak Klárce stačí usilovat o to, aby byl „vyplněn“, tj. postupně bude obarvovat úsečky ve vnitřku tohoto čtverce. Ať už budou zvířátka též obarvovat úsečky ve vnitřku nebo ne, dřív nebo později nastane chvíle, kdy v celém čtverci zbyde pouze jedna neobarvená úsečka. Pak ale oba jednotkové čtverečky, které tuto úsečku mají na svém obvodu, mají obarven celý svůj obvod až na tuto sdílenou úsečku – tvoří tedy kýžený obdélník 2×1 nebo 1×2 a Klárka vyhrála (nevyhrála-li již někdy předtím).

Nyní si rozmysleme, že takovýto čtverec si Klárka dokáže v konečném počtu kroků vytvořit – stačí, aby si zvolila nějaký čtverec s délkou strany $n \geq 4051$, jak si nyní dokážeme. Idea je taková, že potřebuje zvolit n dostatečně velké na to, aby stihla obarvit celý obvod čtverce předtím, než zvířátka (i kdyby se o to cíleně snažila) stihnou obarvit všechny jednotkové úsečky uvnitř čtverce. Obarvení celého obvodu jí potrvá nejvýše $4n$ tahů (některé ze zvířátek totiž může svým tahem mimoděk přispět), zvířátka mezitím stihnou obarvit právě $(4n - 1) \cdot 2025$ úseček. Jelikož ve vnitřku zvoleného čtverce bude právě $2n(n - 1)$ úseček, musí Klárka zvolit n splňující nerovnost

$$(4n - 1) \cdot 2025 < 2n(n - 1).$$

Ta ovšem platí, kdykoli $n \geq 4051$ (napravo je kvadratický člen, takže i bez počítání víme, že bude platit pro dost velká n). Klárce tedy stačí si na začátku hry zvolit její oblíbený čtverec s délkou strany 4051 a pak, dle výše uvedeného, zaručeně v konečném počtu kroků vyhraje.

ŘEŠENÍ PŮVODNÍHO (CHYBNÉHO) ZADÁNÍ:

Ne, nemůže, neboť zvířátka mají neprohrávající strategii, kterou si nyní popíšeme.

Nechť Klárka ve svém tahu obarvila nějakou svislou jednotkovou úsečku. Pak každé zvířátko obarví libovolnou neobarvenou svislou úsečku (nějaká vždy existuje, protože herní mřížka je nekonečná). Nechť Klárka naopak obarvila nějakou vodorovnou úsečku. Pak první čtyři zvířátka obarví ty čtyři svislé úsečky, které se Klárčiny úsečky dotýkají (pokud již některá obarvená byla, obarví libovolnou svislou úsečku na herní ploše), zbylá zvířátka opět obarví nějaké svislé úsečky. Všimněme si, že pak Klárkou obarvená úsečka nemůže být součástí obdélníka 2×1 , který by dosvědčoval její vítězství, neboť všem čtyřem obdélníkům 2×1 , jichž součástí je Klárčina úsečka, zvířátka právě obarvila jejich vnitřní úsečku. Vidíme tedy, že při této strategii se na herní ploše nemůže v konečném počtu tahů objevit kýžený obdélník 2×1 a Klárka tudíž nemůže vyhrát.

POZNÁMKY:

Někteří řešitelé zřejmě nemají rádi jméno „Klárka“, neb si ji přejmenovali na „Ádu“ nebo „Aničku“. Vyjma toho a několika dalších kuriozit a drobností byla však většina došlých řešení správná a postupovala obdobně jako jedno ze vzorových. (Josef „José“ Soural)

Úloha 5.

Ukažte, že existuje přirozené číslo s , pro něž existuje alespoň 2025 dvojic různých přirozených čísel ℓ, e splňujících

$$\frac{1}{\ell - e} = \frac{1}{\ell} - \frac{1}{e} + \frac{1}{s}.$$

ŘEŠENÍ:

Nejprve si upravme rovnici na

$$\frac{1}{\ell - e} - \frac{1}{\ell} + \frac{1}{e} = \frac{1}{s} =: \frac{a}{b}.$$

Dosadíme-li nějaká ℓ a e , nemusí nutně existovat přirozené číslo s , které splňuje danou rovnici, ale $\frac{1}{\ell - e} - \frac{1}{\ell} + \frac{1}{e}$ určitě musí být racionální. Tedy existují nějaká celá čísla a a b taková, že $\frac{a}{b} = \frac{1}{\ell - e} - \frac{1}{\ell} + \frac{1}{e}$.

Pokud se nám podaří nalézt ℓ a e taková, že $a \mid b$, získali jsme alespoň jednu vyhovující dvojici. Můžeme si všimnout, že pokud e, ℓ a b zvětšíme k -krát, rovnice bude stále platit. Pokud tedy zvolíme $k = a$, pak $a \mid ab$ a získáme hledanou dvojici e, ℓ a k nim $s = b$. Tímto způsobem umíme získat libovolné množství trojic e_i, ℓ_i a s_i takových, že

$$\frac{1}{\ell_i - e_i} - \frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{e_i} = \frac{1}{s_i}.$$

Uvědomme si, že všechny trojice mohou mít různá s_i . To nám ale nevadí, protože můžeme najít společný násobek všech s_i , zvolit jej jako s a dále každou trojici (ℓ_i, e_i, s_i) zvětšit s/s_i -krát. Dle předchozího pozorování, vynásobíme-li e_i, ℓ_i a s_i číslem s/s_i , rovnice bude stále platit.

Ukázali jsme tedy, že pro libovolná počáteční čísla $\ell'_1, e'_1, \dots, \ell'_{2025}, e'_{2025}$ umíme nalézt přirozené s a k němu vyhovující $\ell_1, e_1, \dots$, taková že $\ell_i/\ell'_i = e_i/e'_i$.

Nakonec ještě musíme ukázat, že umíme zvolit ℓ'_i, e'_i tak, abychom získali 2025 různých dvojic ℓ_i, e_i . Stačí ale zvolit $\ell_i = i + 1$ a $e_i = 1$ pro i od 1 do 2025. Všimněme si, že poměr ℓ_i a e_i při zvětšení k -krát zůstane stejný. Tedy všechny trojice budou různé.

Nyní zbývá jen jediné. Mohla by nám nastat taková drobná nepříjemnost, že je $\frac{a}{b}$ menší než 0. Můžeme si ale všimnout, že pokud zvolíme $e = 1$ a $\ell > e$, je $\frac{a}{b}$ kladné. Tedy hledané s opravdu existuje.

POZNÁMKY:

Sešlo se hodně různých přístupů, některé byly hezčí než jiné. Jednou z možností bylo tipnout si, že $s = 2026!$ je rozumná volba. Mnohá řešení postupovala více analyticky, ale v konečném důsledku všechna používala podobné myšlenky: svázat e, ℓ nějakým rozumným vztahem například $e = k\ell$ a následně upravovat a upravovat, dokud něco nevyšlo. (Vojta „Dlážka“ Gadurek)

Úloha 6.

Pro prvočíslo p definujeme posloupnost celých čísel $(a_n)_{n=1}^\infty$ vztahy $a_1 = 0, a_2 = 1$ a

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - pa_n$$

pro všechna přirozená čísla n . Nalezněte všechny možné hodnoty p , pro které se v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$ vyskytne hodnota -1 .

ŘEŠENÍ:

Dokážeme, že jediné vyhovující řešení je $p = 5$. Nejprve uvažujme $p = 2$. Pokud bychom v n -tém členu dostali číslo -1 , platilo by $-1 = a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} \equiv 0 \pmod{2}$, což zjevně nelze.

Mějme tedy prvočíslo $p \geq 3$. Indukcí ukážeme, že pro $n \geq 2$ platí

$$a_n \equiv 2^{n-2} \pmod{p}.$$

Pro $n = 2$ máme $a_2 = 1 = 2^0$. Předpokládejme platnost pro n , potom

$$a_{n+1} = 2a_n - pa_{n-1} \equiv 2a_n \equiv 2 \cdot 2^{n-2} \equiv 2^{n-1} \pmod{p}.$$

Dále ukážeme, že platí kongruence

$$a_n \equiv n - 1 \pmod{p - 1}.$$

Postupovat budeme opět indukci. V prvním kroku musíme ověřit platnost pro první dva členy. Pro $n = 1$ a $n = 2$ ji ale vidíme hned ze zadání. Předpokládáme-li platnost pro n a $n - 1$, máme

$$a_{n+1} = 2a_n - pa_{n-1} \equiv 2a_n - a_{n-1} \equiv 2(n - 1) - (n - 2) = n \pmod{p - 1}.$$

Uvažujme nyní $a_{n+1} = -1$. Z prvního pozorování máme $-1 \equiv 2^{n-1} \pmod{p}$, což po přenásobení čtyřkou dává $-4 \equiv 2^{n+1} \pmod{p}$. Druhé pozorování tvrdí $-1 \equiv n \pmod{p - 1}$, neboli $n + 1 \equiv 0 \pmod{p - 1}$. Označme přirozené číslo $\frac{n+1}{p-1}$ jako k . Víme, že $p \geq 3$ je prvočíslo, tedy p a 2 jsou nesoudělná. Můžeme proto aplikovat malou Fermatovu větu $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Dohromady tedy získáváme

$$-4 \equiv 2^{n+1} = (2^{p-1})^k \equiv 1 \pmod{p}$$

a z toho nutně platí $5 \equiv 0 \pmod{p}$, což dává $p = 5$.

Číslo -1 volbou $p = 5$ opravdu dosáhneme: $a_3 = 2$, $a_4 = -1$.

POZNÁMKY:

Správná řešení postupovala podobně jako vzorák, trochu zrádná byla nutnost vyřešit $p = 2$ zvlášť. Někteří řešitelé se snažili úlohu dokázat pomocí nalezení explicitní formule pomocí charakteristického polynomu. Posloupnost ale není monotónní, tedy nelze argumentovat růstem absolutní hodnoty prvků (limitně posloupnost roste exponenciálně, to nám ale nic neříká o jejím chování v prvních konečně mnoha členech), na čemž si tato řešení vylámala zuby. Za správné uvedení čísla pět jsem uděloval bod.

(Jakub Vlček)

Úloha 7.

V PraSestánu operuje $n \geq 4$ letišť. Letecká společnost PraSér provozuje mezi každými dvěma letišti právě jednu (obousměrnou) leteckou linku, v rámci snížení emisí by jich ale chtěla co nejvíc zrušit. Zákon o letecké dopravě nařizuje, že:

- (1) Letecké linky se smí rušit jen postupně, jedna po druhé.
- (2) Letecká linka mezi letišti A a B se smí zrušit pouze tehdy, pokud existují další dvě letiště C , D taková, že linky mezi B a C , mezi C a D a mezi D a A jsou stále v provozu.

Určete v závislosti na n , kolik nejvíce linek může PraSér zrušit.

ŘEŠENÍ:

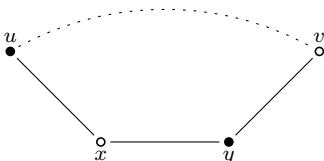
Nejprve si úlohu představme jako graf¹. Letiště budou vrcholy, letecké linky hrany vedoucí mezi nimi. Na začátku máme úplný graf, podmínky nám udávají, že rušíme hrany vyskytující se ve čtyřcyklech (původně máme hrany (A, B) , (B, C) , (C, D) a (D, A) , z nich rušíme jednu). Uvědomme si, že díky podmínkám neporušíme souvislost grafu, když budeme rušit linky.

Dokážeme, že v PraSestánu může zbýt nanejvýš n linek, tedy že lze zrušit maximálně

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

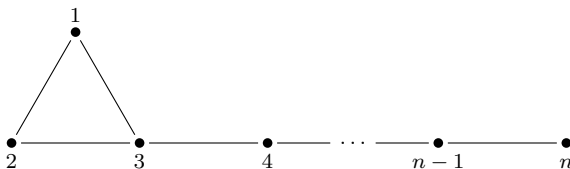
Potřebujeme tedy dokázat, že méně linek zůstat nemůže a že umíme najít postup, který na konci zanechá jen n nezrušených linek. Pro zjednodušení budeme postupovat opačně, budeme tedy uvažovat graf se zbylými hranami a pokusíme se z něj zpětně rekonstruovat úplný graf. Podmínky nám nyní říkají, že přidáváme hrany postupně a že hranu (A, B) lze přidat jen tehdy, když existují hrany (B, C) , (C, D) a (D, A) .

Pro spor dostaneme rušením linek graf na n vrcholech obsahující $n-1$ hran. Tento graf musí být souvislý, jedná se tedy o strom. Strom je bipartitní graf, můžeme tedy jeho vrcholy obarvit černě a bíle tak, že mezi žádnými dvěma stejně barevnými vrcholy nevede hrana. Zkusme nyní přidávat hrany. Můžeme-li přidat hranu (u, v) , víme, že existovaly hrany (u, x) , (x, y) , (y, v) pro nějaké vrcholy x, y . BÚNO ať byl u obarven černě. Pak víme, že x musí být bílý, y černý a v bílý. Nová hrana, kterou přidáváme, tudíž povede mezi černým a bílým vrcholem, bipartitnost grafu tedy neporuší.



My ale víme, že úplný graf na $n \geq 4$ vrcholech bipartitní není (např. proto, že obsahuje trojúhelník), víme, že přidáním hrany bipartitnost neporušíme, z našeho stromu se tedy na úplný graf nemůžeme žádným způsobem dostat, ekvivalentně tedy z úplného grafu nedostaneme náš strom, čímž získáváme kýžený spor. Musí tedy zbýt alespoň n hran.

Mějme nyní graf na n vrcholech, očíslovme jeho vrcholy $1, 2, \dots, n$ a veďme hrany mezi vrcholy $i, i+1$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n-1\}$ a mezi vrcholy 1 a 3. Máme tedy celkem n hran. Budeme chtít dokázat, že z tohoto grafu umíme přidáváním hran podle podmínky zrekonstruovat úplný graf.



Uvědomme si, že umíme postupně přidat všechny hrany ve tvaru $(1, x)$ pro $x \geq 4$ (hrany pro $x \leq 3$ už máme) – víme totiž, že hrany $(1, x-2)$, $(x-2, x-1)$ a $(x-1, x)$ už existují. Obdobně pak umíme postupně získat všechny hrany tvaru $(2, x)$ pro $x \geq 4$, neboť máme hrany $(2, 1)$, $(1, x-1)$ a $(x-1, x)$. Zbývá tedy propojit vrcholy i, j , kde $i, j \geq 3$. To už ale lze snadno, neboť máme jisté hrany $(i, 1)$, $(1, 2)$ a $(2, j)$.

Tím jsme zpětně zrekonstruovali hrany mezi libovolnou dvojicí vrcholů, máme tedy úplný graf a konstrukce je platná. PraSér může tedy opravdu zrušit nejvíce $\frac{n(n-3)}{2}$ linek.

¹Pokud jsi o grafu ještě neslyšel(a), takovým hezkým průvodcem je například seriál Letem grafovým světem, který si můžeš prohlédnout zde: <https://prase.cz/archive/34/serial.pdf>.

POZNÁMKY:

Klíčovými prvky řešení bylo uvědomit si správnou odpověď, dokázat, že $n - 1$ linek nemůže zbýt, a najít konstrukci pro n . Za správnou odpověď jsem udílela bod, dva body za konstrukci a dva za důkaz dolního odhadu. Skoro každé řešení (které se s konstrukcí obtěžovalo) vymyslelo nějakou originální a rovněž originálních způsobů mávání dolního odhadu bylo nemálo.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)

Úloha 8.

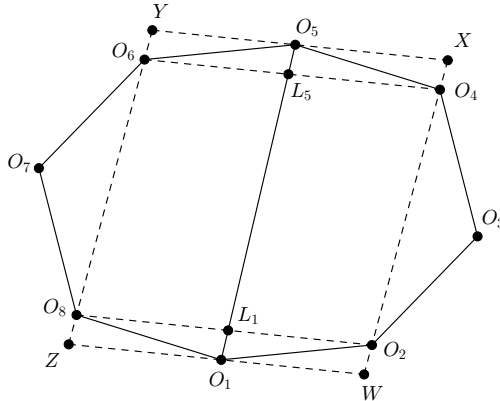
Bud' $O_1O_2O_3O_4O_5O_6O_7O_8$ konvexní osmiúhelník, jehož všechny strany jsou stejně dlouhé a jehož protější strany² O_iO_{i+1} a $O_{i+4}O_{i+5}$ jsou pro každé $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ rovnoběžné. Bod L_i necht' je pro $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ průsečíkem O_iO_{i+4} s $O_{i-1}O_{i+1}$. Dokažte, že existuje $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$, pro nějž

$$\frac{|L_k L_{k+4}|}{|O_k O_{k+4}|} \geq \frac{2}{3}.$$

ŘEŠENÍ:

Značme $[A_1 \dots A_n]$ obsah mnohoúhelníka $A_1 \dots A_n$. Dokazované tvrzení docela rychle převedeme na nerovnost mezi obsahy, kterou dokážeme počítáním mnoha obsahů a jednou fikanou nerovností.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že obsah trojúhelníka $O_8O_1O_2$ je nejmenší mezi všemi trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou po sobě jdoucí vrcholy osmiúhelníka. Tento předpoklad využijeme na konci řešení, kde ukážeme, že $\frac{|L_1 L_5|}{|O_1 O_5|} \geq \frac{2}{3}$.



Nejprve si všimněme, že z věty *sus* jsou trojúhelníky $O_2O_3O_4$ a $O_6O_7O_8$ shodné, tedy úsečky O_2O_4 a O_6O_8 jsou shodné a rovnoběžné, tedy čtyřúhelník $O_2O_4O_6O_8$ je rovnoběžník. Sestrojme nyní rovnoběžník $WXYZ$ tak, že strana WX obsahuje úsečku O_2O_4 , XY obsahuje bod O_5 , YZ obsahuje úsečku O_6O_8 , úsečka ZW obsahuje bod O_1 a $XY \parallel O_4O_6$. Pak podíl délek úseček $\frac{|L_1 L_5|}{|O_1 O_5|}$ je roven podílu obsahů rovnoběžníků $O_2O_4O_6O_8$ a $WXYZ$ (jelikož mají stejné výšky kolmé na úsečku O_1O_5). Náš cíl nyní bude spočítat obsah rovnoběžníka $WXYZ$. K tomu se ve zbytku řešení dobereme pomocí chytrého počítání obsahů. Označme si nejprve bod P takový, že čtyřúhelník $O_1O_2PO_8$ je rovnoběžník.

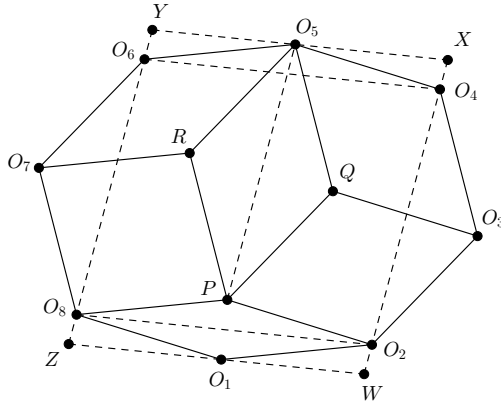
Máme

$$[WXYZ] = [WO_2O_8Z] + [O_2O_4O_6O_8] + [XYO_6O_4].$$

²Číslování všech bodů uvažujeme modulo 8, tedy $O_9 = O_1$, $L_{10} = L_2$, apod.

Spočítat krajní dva obsahy není těžké, totiž trojúhelníky $O_8O_1O_2$ a $O_4O_5O_6$ jsou shodné a tedy mají shodný obsah, platí tedy $[WO_2O_8Z] = 2[O_1O_2O_8] = [O_1O_2PO_8] = 2[O_4O_5O_6] = [XYO_6O_4]$.

Jak nyní vyjádřit prostřední obsah? S tímto cílem v mysli sestrojme další dva body Q , R takové, že PO_2O_3Q a PO_8O_7R jsou rovnoběžníky. Uvědomme si, že úsečky PO_2 , QO_3 , O_8O_1 jsou stejně dlouhé, shodně orientované a rovnoběžné, tedy speciálně jsou tyto úsečky stejně dlouhé a rovnoběžné i s úsečkou O_5O_4 . Proto je čtyřúhelník $PO_2O_4O_5$ rovnoběžník. Uvědomme si pak, že z toho platí, že $|PO_5| = |O_2O_4|$ a tedy dle věty *sss* máme shodnost trojúhelníků $PQO_5 \cong O_2O_3O_4$ (jsou navzájem posunuté o vektor $\overrightarrow{O_2P}$), což dává rovnost obsahů $[PQO_5] = [O_2O_3O_4]$. Analogicky platí $O_5RP \cong O_6O_7O_8$, z čehož platí $[O_5RP] = [O_6O_7O_8]$. Obsah čtyřúhelníka PQO_5R je tedy roven součtu $[O_2O_3O_4] + [O_6O_7O_8]$.



Konečně, z dokázané shodnosti trojúhelníků $O_8O_1O_2$ a $O_4O_5O_6$ plyne, že

$$[O_2PO_8] = [O_8O_1O_2] = [O_4O_5O_6].$$

Nyní dáme všechno dohromady. „Přesouváním obsahů“ získáme

$$\begin{aligned} [O_2O_4O_6O_8] &= [O_2O_4O_5O_6O_8P] = [PO_2O_3O_4O_5Q] + [PRO_5O_6O_7O_8] = \\ &= [PO_2O_3Q] + [QO_3O_4O_5] + [PRO_7O_8] + [RO_5O_6O_7], \end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne z rozdělení čtyřúhelníka PQO_5R na trojúhelníky $O_5QP \cong O_4O_3O_2$ a $O_5RP \cong O_6O_7O_8$. Máme proto

$$\begin{aligned} \frac{[WXYZ]}{[O_2O_4O_6O_8]} &= 1 + \frac{[WO_2O_8Z] + [XYO_6O_4]}{[O_2O_4O_6O_8]} = \\ &= 1 + \frac{2[O_1O_2PO_8]}{[PO_2O_3Q] + [QO_3O_4O_5] + [PRO_7O_8] + [RO_5O_6O_7]}. \end{aligned}$$

Nyní tvrdíme, že každý ze čtyř obsahů ve jmenovateli je alespoň tolik, co je obsah rovnoběžníka $O_1O_2PO_8$, z čehož už plyne dokazované tvrzení. Čtyřúhelník $QO_3O_4O_5$ je rovnoběžník, jelikož $QO_3 \parallel O_5O_4$ a $|QO_3| = |O_5O_4|$, analogicky je i $RO_5O_6O_7$ rovnoběžník. Nerovnosti obsahů $[QO_3O_4O_5] \geq [O_1O_2PO_8]$ a $[RO_5O_6O_7] \geq [O_1O_2PO_8]$ tedy platí z předpokladu, že obsah trojúhelníka $O_8O_1O_2$ je mezi analogickými obsahy nejmenší. Pro zbylé dva obsahy to ukážeme trochu fikaněji.

Podívejme se na výšky z bodů O_1 a O_4 na stranu O_2O_3 . Tvrdíme, že jedna z nich bude nejvýše tak velká jako výšky na tuto stranu z bodů P a Q . Totiž, jeden z úhlů $\angle QO_3O_2$ a $\angle O_3O_2P$

Všechny čtyři obsahy ve jmenovateli jsou rovny nejvýše tolik, co je obsah v čitateli, proto

$$\frac{[WXYZ]}{[O_2O_4O_6O_8]} = 1 + \frac{2[O_1O_2PO_8]}{[PO_2O_3Q] + [QO_3O_4O_5] + [PRO_7O_8] + [RO_5O_6O_7]} \leq 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2},$$

POZNÁMKY:

(Zdeněk Pezlar)