

Polynomy 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. ÚNORA 2025

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Mějme polynom $P \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že pro každé kladné celé číslo n dává $P(P(n))$ po dělení n zbytek $n - 1$. Dokažte, že P nemá žádný celočíselný kořen.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Je dáno celé číslo $n \geq 4$. Na tabuli je předepsáno

$$\square x^n + \square x^{n-1} + \dots + \square x + \square.$$

Annička a Bára hrají následující hru: v jednom tahu si hráč zvolí některé dosud prázdné políčko a vepíše do něj nenulové racionální číslo podle svého výběru. Annička hraje jako první a hráči se následně v tazích střídají. Hra končí, jakmile jsou zaplněna všechna políčka, tedy když bude na tabuli napsán polynom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x].$$

Annička zvítězí, pokud má P racionální kořen, v opačném případě vítězí Bára. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Celé číslo nazveme *bezčtvercovým*, pokud není násobkem p^2 pro žádné prvočíslo p . Rozhodněte, zda existuje nekonstantní polynom $P \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že pro každé celé číslo n je $P(n)$ bezčtvercové číslo.

Polynomy 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Mějme polynom $P \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že pro každé kladné celé číslo n dává $P(P(n))$ po dělení n zbytek $n - 1$. Dokažte, že P nemá žádný celočíselný kořen.

ŘEŠENÍ:

Protože je $P \in \mathbb{Z}[x]$, využijeme tvrzeníčko ze seriálu, které říká, že $a - b \mid P(a) - P(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$. Pak tedy

$$n - 0 \mid P(n) - P(0) \mid P(P(n)) - P(P(0)),$$

čili $P(P(0)) \equiv P(P(n)) \equiv -1 \pmod{n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Na levé straně máme konstantu nezávislou na n a když zvolíme $n > |P(P(0))| + 1$, tak z kongruence plyne $n \mid P(P(0)) + 1$, ale protože je $n > |P(P(0))| + 1$, musí nutně $|P(P(0))| + 1 = 0$. Tedy dostáváme, že $P(P(0)) = -1$. Dále pro spor předpokládejme, že existuje celočíselný kořen k . Potom

$$P(0) - 0 \mid P(P(0)) - P(0), \text{ z čehož plyne } P(0) \mid P(P(0)) = -1, \text{ a tedy } P(0) \in \{1, -1\},$$

$$k - 0 \mid P(k) - P(0) = -P(0), \text{ tedy } k \in \{1, -1\}.$$

Protože $P(0)$ není kořen, musí platit $k = -P(0)$. Pak ale $2k = k - P(0) \mid P(k) - P(P(0)) = 1$, což je spor, protože na levé straně máme sudé číslo, jenomže 1 je liché.

Úloha 2.

Je dáno celé číslo $n \geq 4$. Na tabuli je předepsáno

$$\square x^n + \square x^{n-1} + \dots + \square x + \square.$$

Annička a Bára hrají následující hru: v jednom tahu si hráč zvolí některé dosud prázdné políčko a vepíše do něj nenulové racionální číslo podle svého výběru. Annička hraje jako první a hráči se následně v tazích střídají. Hra končí, jakmile jsou zaplněna všechna políčka, tedy když bude na tabuli napsán polynom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x].$$

Annička zvítězí, pokud má P racionální kořen, v opačném případě vítězí Bára. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii.

ŘEŠENÍ:

Dokážeme, že pro sudá n zvítězí Annička, zatímco pro ta lichá Bára.

Nejprve uvažujme sudé n . Polynom stupně n má $n+1$ koeficientů, které je třeba vybrat, poslední tah proto bude mít Annička. Nehledě na to, jaké koeficienty (a na kterých pozicích) zvolí ve svých předchozích tazích, i na to, jak bude hrát Bára, bude před Anniččiným posledním tahem na tabuli

napsán polynom $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$ a poslední prázdné políčko $\square x^j$ pro nějaké $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, do něhož bude Annička zbývat zvolit poslední koeficient a_j .

Jelikož se do políček vyplňují nenulové koeficienty, bude F mít stupeň buďto $n - 1$ (pokud $j = n$, takže F postrádá člen s x^n), nebo n (jinak). Speciálně tedy $\deg(F) \geq n - 1 \geq 3$, takže je F nekonstantní. Určitě proto má jen konečně mnoho kořenů – ať si pak Annička zvolí libovolné $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, jež není kořenem F , a zvolí jako koeficient $a_j = -F(r)/r^j$. Díky volbě r půjde o nenulové racionální číslo, takže je to validní tah. Výsledným polynomem pak bude $P(x) = F(x) + a_j x^j$ a dosazením r zjistíme $P(r) = F(r) - \frac{F(r)}{r^j} \cdot r^j = 0$. Ve výsledku tak bude P mít racionální kořen a Annička vyhraje.

Nyní ať je n liché, takže poslední tah bude mít Bára. Díky $n \geq 5$ také víme, že Bára bude mít ve hře alespoň tři tahy. Předepišme jí následující strategii: nejprve ať během svých prvních dvou tahů zajistí, že budou zvoleny koeficienty a_n a a_0 . Tím myslíme, aby je libovolně zvolila, pokud tak už předtím nečiní Annička. V dalších tazích kromě posledního ať hraje Bára libovolně. Následně ukažme, že bude schopna zvolit poslední koeficient tak, aby P neměl racionální kořen. Ať je před posledním tahem na tabuli napsán polynom $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$ spolu s posledním prázdným políčkem $\square x^j$, kde $0 < j < n$ a do něhož zbývá Báře zvolit a_j .

Budeme chtít použít větu o racionálním kořeni, která však hovoří o racionálních kořenech polynomu ze $\mathbb{Z}[x]$. BÚNO si ale Bára může všechny koeficienty ve hře „v duchu“ přenásobit jakýmkoliv kladným celým číslem m , a situace se nezmění – racionální kořen stále zůstane kořenem, koeficienty budou stále nenulové a racionální, a pokud po přenásobení bude chtít zvolit nějaké $a_j = k$, ve skutečnosti zvolí $a_j = \frac{k}{m}$. Vyberme nějaké m , které je společným násobkem všech jmenovatelů koeficientů F , a přenásobením pak můžeme BÚNO uvažovat, že koeficienty F jsou dokonce celá čísla.

Ať potom Bára také vybírá a_j jen z nenulových celých čísel – tímto omezením si zajistí, že výsledný polynom P bude v $\mathbb{Z}[x]$. Vedoucí a absolutní koeficienty a_n, a_0 už jsou určeny a oba jsou nenulové. Z věty o racionálním kořeni pak víme, že jakýkoliv racionální kořen $\frac{u}{v}$ (v základním tvaru) polynomu P by musel splňovat $u \mid a_0, v \mid a_n$. Nenulové celé číslo má jen konečně mnoho dělitelů, takže přichází v úvahu jen konečně mnoho různých u a konečně mnoho různých v , dohromady tedy i jen konečně mnoho různých „potenciálních kořenů“ $\frac{u}{v}$ – ostatní racionální čísla se kořenem $P(x)$ nestanou, ani kdyby se o to Bára snažila. Pro jedno zvolené $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ bude $P(r) = 0$ právě tehdy, když $a_j = -F(r)/r^j$, takže každý potenciální kořen r zakazuje nanejvýš jedno celé číslo a_j . Navíc $r = 0$ kořenem nikdy nebude, protože $a_0 \neq 0$. Našimi konečně mnoha potenciálními kořeny je tak zakázáno jen konečně mnoho možných nenulových celočíselných koeficientů a_j , Báře proto určité zbude nějaký, který může zvolit, aby P neměl racionální kořen.

POZNÁMKY:

Úloha se ukázala být trochu zrádnou díky množství drobných technických pastí, do nichž bylo možné se chytit. Např. v Anniččině strategii je nutno ošetřit, aby zvolený koeficient skutečně byl nenulový, v Bářině strategii je zase potřeba nějakým způsobem omezit, odkud volíme koeficienty (na celá čísla, anebo na „celá po přenásobení“), jinak by se mohlo rozbít použití věty o racionálním kořeni. Za tato klopýtnutí jsem typicky strhával bod. (Matěj Doležálek)

Úloha 3.

Celé číslo nazveme *bezčtvercovým*, pokud není násobkem p^2 pro žádné prvočíslo p . Rozhodněte, zda existuje nekonstantní polynom $P \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že pro každé celé číslo n je $P(n)$ bezčtvercové číslo.

ŘEŠENÍ:

Dokážeme, že takový nekonstantní polynom P neexistuje. K tomu uvažíme kromě samotného P i jeho formální derivaci P' . Předpokládejme pro spor, že máme dáno nekonstantní P takové, že pro každé $n \in \mathbb{Z}$ je $P(n)$ skutečně bezčtvercové. Z Henselova lemmatu pak plyne, že kdykoliv nějaké

prvočíslo q dělí $P(n)$, pak musí dělit i $P'(n)$, jinak by nám totiž zmíněné lemma dalo nějaké $n_2 \in \mathbb{Z}$, pro něž $P(n_2) \equiv 0 \pmod{q^2}$.

BÚNO ať má P kladný vedoucí koeficient. Z nekonstantnosti P víme, že P' není konstantní nula a následně má taktéž kladný vedoucí koeficient. Ze seriálu víme, že $\deg(P') = \deg P - 1$. Polynom vyššího stupně přitom pro dostatečně velké argumenty převyší polynom nižšího stupně a speciálně polynomy s kladnými vedoucími koeficienty jsou pro dost velké argumenty kladné. Vezměme si tedy nějaké $n \in \mathbb{Z}$ dost velké na to, aby obě čísla $P(n)$, $P'(n)$ byla kladná a přitom bylo $P(n) > P'(n)$.

Podívejme se na prvočíselný rozklad $P(n)$. Bezčtvercovost znamená, že se v prvočíselném rozkladu vyskytne každé prvočíslo nanejvýš v první mocnině, $P(n)$ tedy můžeme rozepsat jako

$$P(n) = q_1 \cdots q_k,$$

kde $q_1, \dots, q_k$ jsou navzájem různá prvočísla. Z pozorování výše pak plyne $q_i \mid P'(n)$ pro každé $i = 1, \dots, k$. To ale znamená, že každé z těchto prvočísel je zastoupeno v prvočíselném rozkladu $P'(n)$, takže jej dělí jejich součin. Tedy

$$P(n) = q_1 \cdots q_k \mid P'(n).$$

Tuto dělitelnost ale dovedeme zeslabit na nerovnost $P(n) \leq P'(n)$ (využíváme, že obě strany dělitelnosti jsou kladné), což je spor s $P(n) > P'(n)$.

Obdrželi jsme spor s původním předpokladem, tedy libovolné nekonstantní P musí mít nějakou hodnotu, která není bezčtvercová.

POZNÁMKY:

Většina řešení správně odhadla, že se bude hodit Henselovo lemma. Ke správnému řešení bylo typicky potřeba v nějaké podobě přidat poznatek o růstu polynomů většího a menšího stupně. Pokusy o dořešení jiným způsobem než asymptotickým růstem povětšinou neuspěly.

(Matěj Doležálek)