

Prostory a roviny

2. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. LISTOPADU 2024

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Ondra má papír ve tvaru čtverce o straně délky 3. Poradte mu, jak z papíru vystříhnout souvislý útvar o obsahu 6, ze kterého pak bude moci složit krychli o hraně délky 1.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Alicka našla krychli o hraně délky 1 a obdélníkový proužek papíru 1×12 . Jak lze proužek obmotat kolem krychle tak, aby všechny její stěny byly v každém bodě pokryty dvěma vrstvami papíru? Proužek se smí přehýbat, ale ne stříhat.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Rozhodněte, zda existuje rovina, jejíž řez pravidelným dvanáctistěnem je pravidelný šestiúhelník.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Planeta Čuník je dokonalá koule. Vědci z hlavního města Rypáček postavili supermoderní vesmírnou loď Ocásek s inovativním pohonem. Ocásek si každou vteřinu vybere nějakou přímkou tečnou k Čuníku, na které se nachází, a popoletí po ní o libovolnou celočíselnou vzdálenost. Ocásek vyrazil na testovací misi, která začala v Rypáčku a skončila opět někde na povrchu Čuníka. Dokažte, že Ocásek na misi uletěl sudou celočíselnou vzdálenost.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Rozhodněte, zda lze šest hran libovolného nedegenerovaného čtyřstěnu rozdělit na dvě trojice tak, aby z každé z nich šel poskládat nedegenerovaný trojúhelník.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
V PraSeploše stojí několik měst. Mezi každou dvojicí měst vede nanejvýš jedna silnice. Silnice se smí libovolně klikatit, ale nemohou se křížit (ani mimoúrovňově).¹ Dokažte, že z nich lze udělat jednosměrné silnice tak, aby z každého města šlo vycestovat nanejvýš třemi silnicemi.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
V prostoru je dán **konvexní** mnohostěn M a uvnitř něj bod P , kterým prochází několik (alespoň jedna) přímek $\ell_1, \dots, \ell_n$. Význačnou přímkou stěny mnohostěnu M nazveme tu z přímek $\ell_1, \dots, \ell_n$, která s její rovinou svírá největší úhel. Svírá-li více přímek tentýž největší úhel, volíme za význačnou libovolnou z nich. Dokažte, že existuje stěna mnohostěnu M , která je protnuta svou význačnou přímkou.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Úhlopříčky základny $ABCD$ čtyřbokého jehlanu $ABCD S$ jsou navzájem kolmé. Navíc je jejich průsečík P zároveň kolmým průmětem vrcholu S na základnu. Dokažte, že všechny čtyři kolmé průměty bodu P na roviny ABS , BCS , CDS a DAS leží na jedné kružnici.

¹Formálně řečeno tedy města a silnice představují *nakreslení rovinného grafu*. O rovinných grafech se lze více dozvědět v seriálu Letem grafovým světem zde: <https://prase.cz/archive/34/serial2.pdf>.

Prostory a roviny

2. PODZIMNÍ SÉRIE

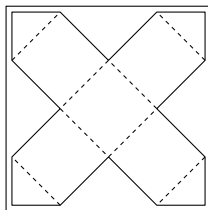
VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Ondra má papír ve tvaru čtverce o straně délky 3. Poradte mu, jak z papíru vystříhnout souvislý útvar o obsahu 6, ze kterého pak bude moci složit krychli o hraně délky 1.

ŘEŠENÍ:

Pokud se pokusíme na papír dostat nějakou ze známých sítí sestávajících ze 6 čtverců, rychle zjistíme, že se Ondrovi na papír nevejde. Můžeme ale zachovat nějakou její část, v našem případě 5 čtverců, a poslední čtverec nějak šikově rozdělit na více částí. Jeden příklad, jak může Ondra takový útvar vytvořit, je na obrázku.



POZNÁMKY:

Někteří řešitelé se bohužel příliš upnuli na představu klasické sítě sestávající ze 6 čtverců, která se vsutku na Ondrův papír nevejde. Jiní řešitelé zvolili alternativní přístup, kdy papír rozdělili na 36 shodných čtverečků, ze kterých pak vytvořili méně či více divoký útvar, ze kterého lze krychli složit. (Klárka Grinerová)

Úloha 2.

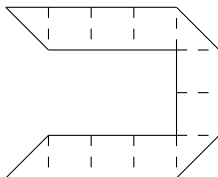
Alicka našla krychli o hraně délky 1 a obdélníkový proužek papíru 1×12 . Jak lze proužek obmotat kolem krychle tak, aby všechny její stěny byly v každém bodě pokryty dvěma vrstvami papíru? Proužek se smí přehýbat, ale ne stříhat.

ŘEŠENÍ:

Jedno z možných řešení je níže. Nejprve si proužek rozdělíme na 12 čtverců, poté některé čtverce ohneme podél úhlopříčky (tím nám na nákrese vzniknou trojúhelníky) a nakonec každou čárkovanou hranu ohneme tak, aby spolu sousední stěny svíraly úhel 90° .

Rozmysleme si, že uvedené řešení skutečně splňuje zadání. Dvě spolu sousedící stěny krychle se pokryjí dvěma pravoúhlými trojúhelníky (které mají tloušťku dvou vrstev proužku). Z každé z těchto stěn pak vede úsek tří čtverců, který začíná v jednom z trojúhelníků dané stěny, obmotává se dokola kolem krychle a končí v druhém z trojúhelníků. Tyto dva úseky dohromady pokryjí další

dvě stěny krychle dvěma vrstvami proužku a zbylé dvě stěny jednou vrstvou. Tyto poslední dvě stěny jsou pak doobaleny úsekem dvou čtverců, který spojuje zmiňované stěny s trojúhelníky.



POZNÁMKY:

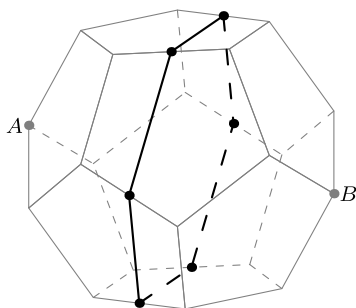
Uvedené řešení je cyklické, takže pokud bychom spolu spojili volné konce a přestřihli bychom libovolnou čárkovanou hranu, dostaneme rovněž validní řešení. (Lukáš Trojan)

Úloha 3.

Rozhodněte, zda existuje rovina, jejíž řez pravidelným dvanáctistěnem je pravidelný šestiúhelník.

ŘEŠENÍ:

Taková rovina existuje, jeden možný řez vypadá jako na obrázku, přičemž vrcholy šestiúhelníku leží vždy ve středu hrany dvanáctistěnu.



Protože dvanáctistěn je symetrický, je všech šest znázorněných vrcholů stejně vzdálených od vrcholů A a B – tedy znázorněné vrcholy skutečně leží v jedné rovině a jde o šestiúhelník. Protože strany šestiúhelníku tvoří stejně vytvořené úsečky ve stěnách pravidelného dvanáctistěnu, jsou stejně dlouhé. Tedy skutečně jde o pravidelný šestiúhelník.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů si s úlohou poradila a nějakým způsobem se jim podařilo řez zkonstruovat, v některých řešeních ale bohužel chybělo zdůvodnění, proč je zkonstruovaný řez skutečně pravidelným šestiúhelníkem. (Jolana Štraitová)

Úloha 4.

Planeta Čuník je dokonalá koule. Vědci z hlavního města Rypáček postavili supermoderní vesmírnou loď Ocásek s inovativním pohonem. Ocásek si každou vteřinu vybere nějakou přímkou tečnou k Čuníku, na které se nachází, a popoletí po ní o libovolnou celočíselnou vzdálenost. Ocásek vyrazil na testovací misi, která začala v Rypáčku a skončila opět někde na povrchu Čuníka. Dokažte, že Ocásek na misi uletěl sudou celočíselnou vzdálenost.

ŘEŠENÍ:

Nechť je poloměr Čuníka roven r a necht' se Ocásek nachází právě ve vzdálenosti s od povrchu Čuníka. Nazvěme *tečnovou vzdáleností* vzdálenost Ocásku od bodu dotyku vybrané tečny k Čuníkovi. Ta je pak podle Pythagorovy věty vždy rovna $\sqrt{(r+s)^2 - r^2}$, takže její hodnota nezávisí na volbě tečny.

Jelikož se každé pohnutí Ocásku během jeho mise odehrává na nějaké tečně k Čuníkovi, vzdálenost uražená při daném pohnutí vždy odpovídá změně jeho tečnové vzdálenosti. Aby se přitom Ocásek mohl vrátit na povrch Čuníka (a jeho tečnová vzdálenost tedy byla rovna 0), musí se součet jeho nalétaných vzdáleností směrem od Čuníka rovnat součtu nalétaných vzdáleností směrem k Čuníkovi. Protože jsou oba tyto součty celočíselné, jejich součtem, tedy dvojnásobkem jednoho z nich, je sudé celé číslo, což jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

S úlohou se dalo popasovat různými způsoby, ať už podobně jako ve vzoráku (kde se dívání na změny tečnové vzdálenosti dalo ekvivalentně převést na létání Ocásku po jedné tečně, čehož někteří řešitelé využili), nebo nějakým druhem zjednodušení trasy mise, dokazovalo se ale i indukcí. Mnoha řešitelům jsem bohužel musel strhávat body buď za opomenutí, nebo za nedostatečné okomentování klíčových kroků jejich řešení.

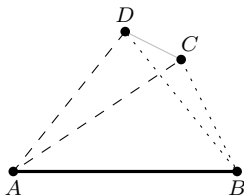
(Štěpán Varhaník)

Úloha 5.

Rozhodněte, zda lze šest hran libovolného nedegenerovaného čtyřštěnu rozdělit na dvě trojice tak, aby z každé z nich šel poskládat nedegenerovaný trojúhelník.

ŘEŠENÍ:

Trojúhelník je nedegenerovaný, pokud pro něj platí všechny tři trojúhelníkové nerovnosti. Označme vrcholy čtyřštěnu $ABCD$ tak, že AB je jeho nejdelší hrana. Ukážeme, že lze vytvořit nedegenerovaný trojúhelník z hran AB , AC , AD nebo z hran AB , BC , BD .



Z trojúhelníkových nerovností pro trojúhelníky ABC a ABD víme, že

$$\begin{aligned} |AC| + |CB| &> |AB|, \\ |AD| + |BD| &> |AB|. \end{aligned}$$

Sečtením získáme

$$|AC| + |CB| + |AD| + |BD| > 2 \cdot |AB|.$$

Z toho musí nutně platit $|AC| + |AD| > |AB|$ nebo $|BC| + |BD| > |AB|$, dále budeme předpokládat, že platí první možnost. Druhá možnost je symetrická.

Protože hrana AB je nejdelší, jsou zbylé dvě nerovnosti splněny triviálně, a tedy hrany AB , AC , AD tvoří nede degenerovaný trojúhelník. Druhý trojúhelník tvoří hrany BC , CD , BD , protože již tvoří jednu stěnu čtyřstěnu. Tímto jsme ukázali, že vždy umíme najít dvě trojice hran generující nede degenerovaný trojúhelník.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů použila řešení podobné tomu vzorovému, objevila se však i řešení, kde se rozebíraly možnosti umístění nejkratších či nejdelších hran, nebo řešení pomocí Heronova vzorce.

(Petr Hladík)

Úloha 6.

V PraSeploše stojí několik měst. Mezi každou dvojicí měst vede nanejvýš jedna silnice. Silnice se smí libovolně klikatit, ale nemohou se křížit (ani mimoúrovňově).¹ Dokažte, že z nich lze udělat jednosměrné silnice tak, aby z každého města šlo vycestovat nanejvýš třemi silnicemi.

ŘEŠENÍ:

Představme si PraSeplochu jako neorientovaný rovinný graf (města budou vrcholy a silnice hrany). Naší úlohou je pak zorientovat všechny hrany tak, aby z každého vrcholu vedly maximálně tři. Označme si E jako množinu hran a V jako množinu vrcholů. V řešení budeme používat známé tvrzení platící pro rovinné grafy, $|E| \leq 3|V| - 6$, které snadno vyplývá z Eulerovy věty². Jako stupeň vrcholu v budeme označovat počet orientovaných hran, které vedou z v do jiného vrcholu.

Úlohu dokážeme algoritmicky. Zorientujeme hrany v grafu náhodně. Mějme množinu M , ve které jsou všechny vrcholy, z nichž vedou alespoň 4 hrany. Budeme postupně snižovat součet stupňů vrcholů v M (bude to náš monovariant). Pokusíme se najít orientovanou cestu z vrcholu v v M do vrcholu se stupněm nanejvýš 2. Pokud takovou cestu najdeme, stačí obrátit orientace všech jejích hran. Tím o 1 zvětšíme stupeň koncového vrcholu, o 1 zmenšíme stupeň počátečního a zbylé stupně zachováme.

Tvrdím, že existuje alespoň 1 hrana, která vede z M do zbytku grafu. Nechť pro spor taková hrana neexistuje. Podgraf rovinného grafu je jistě stále rovinný graf, tedy množina vrcholů M spolu s množinou hran, které z těchto vrcholů vedou, tvoří rovinný graf. Jelikož ale z každého vrcholu vedou alespoň 3 hrany (dokonce alespoň 4), platí: $|E_M| \geq 3|V_M|$, jenže podle tvrzení zmíněného výše musí zároveň platit $3|E_M| \leq 3|V_M| - 6$, čímž získáme spor. Tudíž existuje alespoň 1 hrana, která vede ven z množiny M .

Označme si N množinu všech vrcholů stupně 3 dosažitelných z M (tedy takových, do kterých vede cesta z vrcholů M). Uvědomme si, že pro množinu vrcholů $M \cup N$ rovněž platí nutnost existence hrany vedoucí z ní (odhad, který jsme použili, byl natolik slabý, že platí i po přidání vrcholů se stupněm 3). Na konci této hrany jistě bude vrchol v se stupněm maximálně dva (jinak by byl v množině M nebo N). Tudíž víme, že buď přímo z nějakého vrcholu z M vede hrana do v , nebo do něj vede hrana z nějakého vrcholu z N , ten je ovšem dosažitelný z nějakého vrcholu z M , takže získáme kýženou cestu.

Po jejím přeorientování se nám buď stupeň vrcholu z M sníží na 3, a tedy jej z M vyřadíme, nebo bude stále větší než 3 a v M zůstane, ale součet stupňů v M o 1 klesne.

Jelikož jsme cestu našli pro libovolnou neprázdnou množinu M , můžeme takto pokračovat až do chvíle, kdy nějaká M existuje, zároveň jelikož součet stupňů vrcholů v M stále klesá, algoritmus skončí a graf po jeho skončení splňuje požadavek ze zadání.

Skutečně tedy lze takové jednosměrné silnice udělat.

¹Formálně řečeno tedy města a silnice představují *nakreslení rovinného grafu*. O rovinných grafech se lze více dozvědět v seriálu Letem grafovým světem zde: <https://prase.cz/archive/34/serial.pdf>.

²Pokud toto tvrzení neznáš, podívej se do výše zmíněného seriálu.

POZNÁMKY:

Pokud máme nějaký maximální rovinný graf, tak nejsme nutně schopni vytvořit každý možný rovinný graf pouze odebráním hran. Například vždy jsme schopni udělat maximální rovinný graf, kde každý vrchol má stupeň maximálně 3 a z něj triviálně nejsme schopni udělat žádný graf s vrcholem stupně víc než 3 pouze odebráním hran. (Ada Žáčková a Lukáš Trojan)

Úloha 7.

V prostoru je dán konvexní mnohostěn M a uvnitř něj bod P , kterým prochází několik (alespoň jedna) přímek $\ell_1, \dots, \ell_n$. Význačnou přímkou stěny mnohostěnu M nazveme tu z přímek $\ell_1, \dots, \ell_n$, která s její rovinou svírá největší úhel. Svírá-li více přímek tentýž největší úhel, volíme za význačnou libovolnou z nich. Dokažte, že existuje stěna mnohostěnu M , která je protnuta svou význačnou přímkou.

ŘEŠENÍ:

Všimneme si, že máme-li dva body A, B na rovině H a nějaký bod P mimo rovinu H a $|AP| < |BP|$, pak AP svírá větší úhel s H než BP . Průsečík stěny, popřípadě roviny, na níž stěna leží, s její význačnou přímkou nazveme *význačný bod* dané stěny. Ukážeme, že nejbližší význačný bod k bodu P leží na stěně, ke které je význačný. Daný bod si nazveme A , stěnu S a přímku l .

Tvrzení dokážeme sporem. Tedy řekněme, že A neleží na S . Pak z konvexity existuje nějaká stěna S' taková, že ji l protíná mezi A a P , průsečík označme B . Všimněme si, že $|AP| > |BP|$. Nyní mohou nastat dva případy. Buď B je význačný bod a leží na S' a pak se dostáváme do sporu s minimalitou vzdálenosti $|AP|$. A nebo existuje nějaký jiný význačný bod K pro S' . Takový bod ale musí být blíže P než B , tedy $|AP| > |BP| > |KP|$, dle tvrzení na začátku důkazu, což je opět spor.

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správných.

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

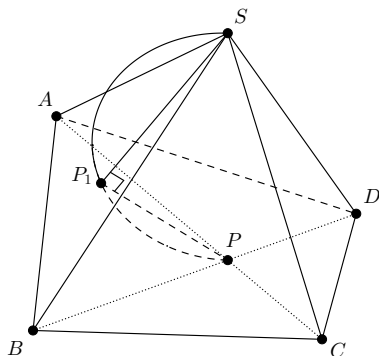
Úloha 8.

Úhlopříčky základny $ABCD$ čtyřbokého jehlanu $ABCD S$ jsou navzájem kolmé. Navíc je jejich průsečík P zároveň kolmým průmětem vrcholu S na základnu. Dokažte, že všechny čtyři kolmé průměty bodu P na roviny ABS , BCS , CDS a DAS leží na jedné kružnici.

ŘEŠENÍ:

Průměty bodu P do rovin ABS , BCS , CDS a DAS budeme označovat P_1, P_2, P_3, P_4 .

Nejprve si všimněme, že $\angle SP_i P = 90^\circ$ pro libovolné i . Potom bod P_i leží na oblouku *Thaletovy kružnice* nad úsečkou PS , tj. jeho vzdálenost od středu úsečky PS , který provizorně označíme T , je rovna $\frac{|PS|}{2}$. Vidíme, že každý z bodů P_1, P_2, P_3, P_4 má od bodu T stejnou vzdálenost $\frac{|PS|}{2}$. Proto všechny tyto body musí ležet na sféře (kterou bychom mohli nazvat „Thaletovou sférou“ nad úsečkou PS).



Nyní bychom chtěli ještě dokázat, že body P_1, P_2, P_3, P_4 leží zároveň v jedné rovině. V takovém případě by totiž musely ležet v průniku sféry a roviny, což je kružnice. Zde použijeme pomocné tvrzení.

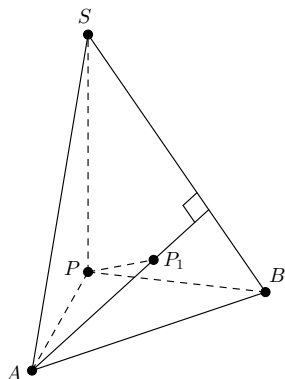
Tvrzení. Průměty P_1, P_2, P_3, P_4 jsou ortocentry trojúhelníkových stěn jehlanu, ve kterých se nacházejí.

Důkaz provedeme pro P_1 , pro ostatní body se tvrzení dokáže analogicky.

Důkaz. Máme v prostoru body A, B, P, S, P_1 , kde $AP \perp BP$ – úhlopříčky AC, BD podstavy jsou kolmé a $SP \perp AP, SP \perp BP$, protože P je kolmou projekcí S na podstavu $ABCD$. Potom P_1 vzniklo kolmým promítnutím P na rovinu ABS , takže $PP_1 \perp ABC$.

Protože je úsečka AP kolmá na BP a zároveň $AP \perp SP$, je AP kolmá na celou rovinu BSP . Potom každá úsečka této roviny, takže i BS , je kolmá na AP . Dále víme, že úsečka PP_1 je kolmá na ABS , tím pádem je kolmá i na $BS \subset ABS$. Z toho, že $AP \perp BS$ a $PP_1 \perp BS$, už nám ale plyne, že celá rovina APP_1 je kolmá na úsečku BS . A jelikož $AP_1 \subset APP_1$, je také $AP_1 \perp BS$. Zjistili jsme, že v trojúhelníkové stěně ABS je spojnice AP_1 kolmá na stranu BS , je to tedy výška z bodu A .

Úplně stejným způsobem lze dokázat (díky symetrii úlohy), že BP_1 je výška v ABS z bodu B . Díky tomu P_1 musí ležet na průsečíku výšek ABS a je to tedy ortocentrum.

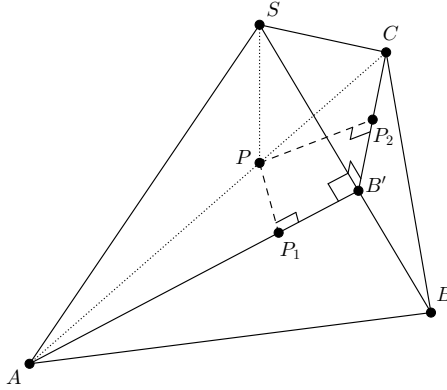


Označme si A_0 patu výšky z bodu A v trojúhelníku ABS a C_0 patu výšky z bodu C v trojúhelníku BCS . Dokážeme, že tyto paty jsou vlastně jeden bod $A_0 = C_0$. Použijme poznatek, že

$A_0 = BS \cap APP_1$ a obdobně $C_0 = BS \cap CPP_2$. Jelikož obě roviny APP_1 a CPP_2 jsou kolmé na jednu úsečku BS , musí být rovnoběžné $APP_1 \parallel CPP_2$.

Protože $P \in APP_1 \cap CPP_2$, tj. obě roviny procházejí bodem P , musí být totožné $APP_1 = CPP_2$. Potom je ale $A_0 = BS \cap APP_1 = BS \cap CPP_2 = C_0$, čili obě paty jsou stejné. Tento jeden bod od teď budeme značit B' .

To, že paty výšek ze dvou sousedních stěn leží v jednom bodě, se analogicky dokáže i pro zbylé tři hrany jehlanu AS , CS , DS . Paty budeme dále označovat A' , C' , D' .



Nyní už pojďme dokázat tvrzení.

Tvrzení. Body P_1 , P_2 , P_3 , P_4 leží v jedné rovině.

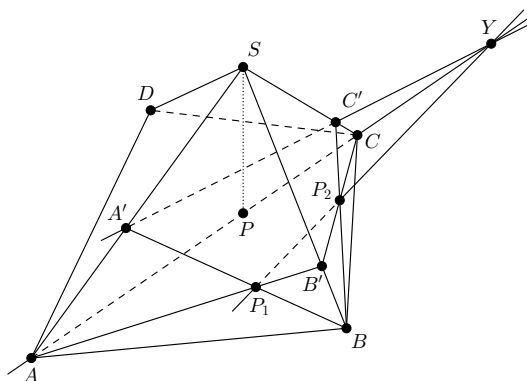
Důkaz. Nejprve vezmeme přímku P_1P_2 . Protože P_1 leží na výšce AB' a P_2 leží na výšce CB' , leží přímka P_1P_2 v rovině $AB'C$. Zároveň protože $P_1 \in A'B$ a $P_2 \in C'B$, leží přímka P_1, P_2 také v rovině $A'BC'$. Proto P_1P_2 musí být průsečnicí rovin $P_1P_2 = AB'C \cap A'BC'$.

Úplně stejným způsobem dojdeme k tomu, že $P_3P_4 = AD'C' \cap A'DC'$.

Nyní uvažme body A , A' , C , C' . Ty leží všechny v jedné rovině ACS , proto přímky AC a $A'C'$ jsou buď rovnoběžné nebo různoběžné.

Pokud jsou různoběžné, můžeme vzít jejich průsečík $Y = AC \cap A'C'$, potom Y leží v obou rovinách $Y \in AC \subset AB'C$ a $Y \in A'C' \subset A'BC'$. Proto musí ležet na jejich průsečnici $Y \in AB'C \cap A'BC' = P_1P_2$. Obdobně $Y \in AC \subset AD'C$ a $Y \in A'C' \subset A'DC'$ a z toho dostaneme, že $Y \in P_3P_4$. Nyní vidíme, že $Y \in P_1P_2 \cap P_3P_4$, tj. přímky P_1P_2 , P_3P_4 se protínají v bodě Y . Jsou tedy nutně různoběžné a body P_1 , P_2 , P_3 , P_4 leží v jedné rovině.

Druhou možností je, že přímky AC a $A'C'$ jsou rovnoběžné $AC \parallel A'C'$. Víme, že $BDS \perp AC$, díky rovnoběžnosti je potom také $BDS \perp A'C'$. Když je $AC \perp BDS$, je i rovina $AB'C \perp BDS$ a stejně tak když $A'C' \perp BDS$, je i $A'BC' \perp BDS$. Pokud jsou ale obě roviny $AB'C$, $A'BC'$ kolmé na BDS , musí být i jejich průsečnice $AB'C \cap A'BC' = P_1P_2$ kolmá na BDS . Tím, že $P_1P_2 \perp BDS \perp AC$, musí být $P_1P_2 \parallel AC$. Pokud bychom celý tento postup zopakovali pro body P_3 , P_4 a roviny $AD'C$ a $A'DC'$, došli bychom k $P_3P_4 \parallel AC$. Zjišťujeme tedy, že $P_1P_2 \parallel P_3P_4$, a to už stačí, aby P_1 , P_2 , P_3 a P_4 ležely v jedné rovině.



Ukázali jsme, že průměty P_1, P_2, P_3, P_4 leží v rovině a zároveň na povrchu sféry. Průnikem sféry s rovinou je kružnice, takže body leží na kružnici.

POZNÁMKY:

Mnoho řešitelů řešilo úlohu pouze pro jehlan s kosočtvercovou podstavou. Toto ovšem důkaz výrazně zjednodušilo, takže jsem za něj (pokud byl správný) udělil pouze 1 bod. Nemalá část lidí se rozhodla použít analytiku. U této úlohy to celkem fungovalo, každopádně to určitě není preferovaný způsob řešení. Například úlohy v reálných soutěžích bývají často vybírány speciálně tak, aby nešly analyticky upočítat.

(Ondra Trinkewitz)