

Geometrie a geografie

2. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. BŘEZNA 2025

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Existuje konvexní čtyřúhelník takový, že když ho rozdělíme podle kterékoliv úhlopříčky na dva trojúhelníky, budou vždy oba tupoúhlé?

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Konvexní pětiúhelník $PRASE$ splňuje, že $PRAS$ je čtverec a $|SE| = |PR|$. Určete velikost úhlu $\sphericalangle AEP$.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Matouš našel nekonečnou rovinnou mapu PraSestánu. V každém bodě mapy je vyznačena reálná nadmořská výška¹ daného bodu. Matouš si po dlouhém počítání všiml, že pro každý čtverec, který nakreslí do této mapy, je průměrná nadmořská výška vrcholů tohoto čtverce nulová. Rozhodněte, zda musí být nadmořská výška v každém bodě PraSestánu nulová.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Alicka a Ben hrají hru na glóbu. Na začátku je na glóbu konečně mnoho bodů. Začíná Alicka, která v každém svém tahu, pokud je na glóbu n bodů, na něj libovolně nakreslí dalších $n + 1$ bodů. Ben si ve svém tahu zvolí rovinu procházející středem glóbu, následně si vybere jednu ze dvou polosfér určených touto rovinou a vymaže všechny body na této polosféře (včetně hranice dané rovinou). Ben zvítězí, pokud po jeho tahu na glóbu nebudou žádné body. Rozhodněte, zda dovede Ben zvítězit nezávisle na počáteční konfiguraci bodů a Alicčině strategii.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Souostroví Rypáčky ovládají čtyři státy, každý je tvořen čtyřmi ostrovy. Mezi některými dvojicemi ostrovů jezdí trajekt.² Vítek plánuje okružní cestu po Rypáccích. Všiml si, že každá okružní cesta po ostrovech, která nevyužije žádný trajekt dvakrát, navštíví všechny čtyři státy. Okružní cesta smí začínat (a opět končit) na libovolném ostrově a musí využít alespoň jeden trajekt.³ Kolik nejvíce trajektů může v Rypáccích plout?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Buďte M , N po řadě středy stran AD , AB čtverce $ABCD$. Přímka p je zvolena tak, aby procházela bodem M a obraz bodu N v osově souměrnosti podle p ležel na diagonále BD . Necht' je E průsečíkem AB s p . Dokažte, že $|ME| = |AB|$.

¹Nadmořská výška může být i záporná.

²Každý trajekt jezdí jen mezi dvěma ostrovy.

³Jinými slovy, nehnout se z ostrova není okružní cesta.

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Miško má n ohrádek a hraje hru s z žirafami. Žirafy se na začátku rozmístí do ohrádek. Následně Miško v každém tahu vybere dvě ohrádky a jedna žirafa z některé z nich se přesune do druhé z nich. Pokud v žádné ze dvou zvolených ohrádek žádná žirafa není, Miško vyhrává. Pro dané n nalezněte nejmenší z , pro které se žirafy mohou rozmístit a hrát tak, že Miško v konečném počtu tahů nevyhraje.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Jsou dány kružnice k a ℓ , jež se protínají v bodech P a Q . Na kružnici k zvolíme bod C různý od P , Q a označíme $A \neq P$ druhý průsečík ℓ s přímkou CP a $B \neq Q$ druhý průsečík ℓ s přímkou CQ . Ukažte, že střed kružnice opsané ABC leží na pevné kružnici, která nezávisí na volbě C .

Geometrie a geografie

2. JARNÍ SÉRIE

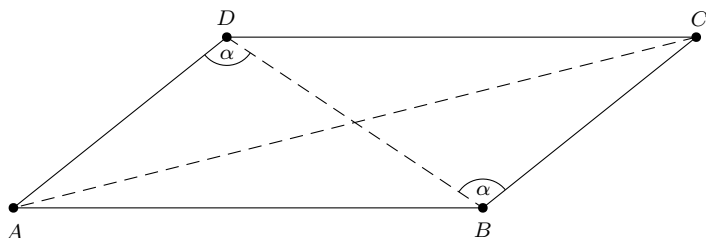
VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Existuje konvexní čtyřúhelník takový, že když ho rozdělíme podle kterékoliv úhlopříčky na dva trojúhelníky, budou vždy oba tupohlé?

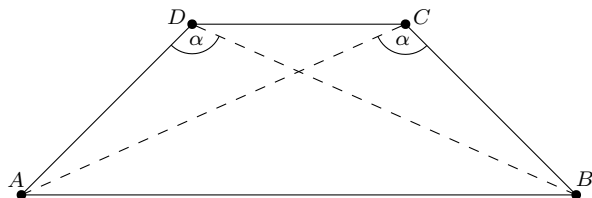
ŘEŠENÍ:

Takový čtyřúhelník existuje. Jeden z možných vznikne tak, že k sobě přiložíme dva shodné trojúhelníky s tupým úhlem α tak, aby vznikl rovnoběžník.



JINÉ ŘEŠENÍ:

Rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s tupými úhly $|\angle ADB| = |\angle ACB| = \alpha$ splňuje zadání.



POZNÁMKY:

Mezi došlými řešeními bylo velké množství různých čtyřúhelníků, ale rovnoběžník a lichoběžník patřily mezi nejčastější. Skoro všechna došlá řešení byla správná, ale bohužel se někteří zamotali a snažili se neúspěšně dokázat, že takový čtyřúhelník neexistuje.

Těm bych doporučila k úloze přistupovat obráceně – když se nedaří najít rovnou správný čtyřúhelník, tak lze zkusit naopak pracovat se dvěma tupohlémi trojúhelníky a hledat, zda by je nešlo nějak spojit, aby vznikl hledaný čtyřúhelník.

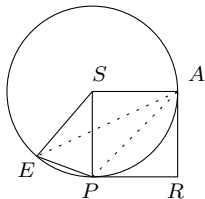
(Káťa Danilina)

Úloha 2.

Konvexní pětiúhelník $PRASE$ splňuje, že $PRAS$ je čtverec a $|SE| = |PR|$. Určete velikost úhlu $\sphericalangle AEP$.

ŘEŠENÍ:

Jelikož $PRAS$ je čtverec a platí $|SE| = |PR|$, leží body E , A a P na kružnici se středem S a poloměrem $|SE|$. Protože je pětiúhelník $PRASE$ konvexní, bod E leží na delším z oblouků AP . Potom z věty o obvodovém a středovém úhlu platí $|\sphericalangle AEP| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASP| = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, tedy velikost úhlu AEP je 45° .



POZNÁMKY:

Všechna odevzdaná řešení byla správně. Velká část řešitelů postupovala podobně jako vzorové řešení. Zbývající řešitelé použili jednu z úhlopříček pětiúhelníku vedoucí do vrcholu E , vyjádřili si úhly pomocí neznámých a vyřešili soustavu rovnic pro velikosti úhlů. (Klárka Grinerová)

Úloha 3.

Matouš našel nekonečnou rovinnou mapu PraSestánu. V každém bodě mapy je vyznačena reálná nadmořská výška¹ daného bodu. Matouš si po dlouhém počítání všiml, že pro každý čtverec, který nakreslí do této mapy, je průměrná nadmořská výška vrcholů tohoto čtverce nulová. Rozhodněte, zda musí být nadmořská výška v každém bodě PraSestánu nulová.

ŘEŠENÍ:

Uvažme libovolný bod E doplněný o čtvercovou síť s vrcholy A až I a výškami a až i jako na obrázku. Jelikož součet výšek vrcholů libovolného čtverce je 0 (neboť jejich aritmetický průměr je 0), platí rovnosti

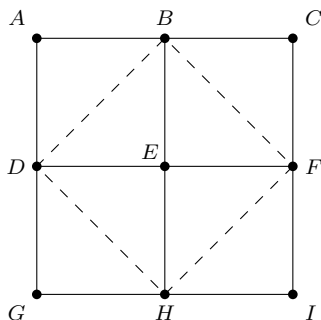
$$a + b + e + d = d + e + h + g = b + c + f + e = e + f + i + h = 0.$$

Jejich sečtením získáme rovnost

$$\begin{aligned} 4e + 2 \cdot (b + d + h + f) + (a + c + i + g) &= \\ &= (a + b + e + d) + (d + e + h + g) + (b + c + f + e) + (e + f + i + h) = 0, \end{aligned}$$

a jelikož čtyřúhelníky $BDHF$ a $ACIG$ jsou také čtverce, platí $4e + 0 + 0 = 0$, a tedy $e = 0$. Protože byl bod E zvolen libovolně, musí být výška každého bodu v PraSestánu nutně rovna 0.

¹Nadmořská výška může být i záporná.



POZNÁMKY:

Přišla spousta správných řešení, jež se v drtivé většině ubírala stejným směrem jako to vzorové.

(Štěpán Varhaník)

Úloha 4.

Alicka a Ben hrají hru na glóbu. Na začátku je na glóbu konečně mnoho bodů. Začíná Alicka, která v každém svém tahu, pokud je na glóbu n bodů, na něj libovolně nakreslí dalších $n + 1$ bodů. Ben si ve svém tahu zvolí rovinu procházející středem glóbu, následně si vybere jednu ze dvou polosfér určených touto rovinou a vymaže všechny body na této polosféře (včetně hranice dané rovinou). Ben zvítězí, pokud po jeho tahu na glóbu nebudou žádné body. Rozhodněte, zda dovede Ben zvítězit nezávisle na počáteční konfiguraci bodů a Alicčíně strategii.

ŘEŠENÍ:

Ukážeme, že Ben vždy zvládne zvítězit. Označme k počet bodů na kouli, když je na tahu Ben. Pokud vezmeme libovolnou rovinu procházející středem koule, tak alespoň na jedné polosféře bude alespoň polovina všech bodů. V našem případě $\frac{k}{2}$ bodů. To je však příliš málo. Zvolíme tedy rovinu, která prochází středem a dvěma body a tyto dva body odebereme z koule, protože ať vybereme libovolnou polosféru, tak budou ležet na její hranici. Pak na jedné z polosfér p bude alespoň polovina z $k - 2$ bodů, což je $\frac{k}{2} - 1$ bodů. Tedy pokud zvolíme p , odebereme alespoň $\frac{k}{2} + 1$ bodů.

Tedy na kouli zbyde nanejvýš $\frac{k}{2} - 1$ bodů. Alicka přidá nanejvýš $(\frac{k}{2} - 1) + 1$, tedy po každém kole hry počet bodů na kouli klesne alespoň o jeden. Dříve nebo později nezbyde na kouli jediný bod, protože hra začíná s konečným počtem bodů, a hra tak bude trvat konečně dlouho.

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správně. Musím všechny řešitele pochválit za rozumná řešení.

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

Úloha 5.

Souostroví Rypáčky ovládají čtyři státy, každý je tvořen čtyřmi ostrovy. Mezi některými dvojicemi ostrovů jezdí trajekt.² Vítek plánuje okružní cestu po Rypáčkách. Všiml si, že každá okružní cesta po ostrovech, která nevyužije žádný trajekt dvakrát, navštíví všechny čtyři státy. Okružní cesta smí začínat (a opět končit) na libovolném ostrově a musí využít alespoň jeden trajekt.³ Kolik nejvíce trajektů může v Rypáčkách plout?

²Každý trajekt jezdí jen mezi dvěma ostrovy.

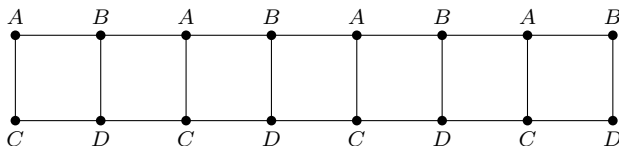
³Jinými slovy, nehnout se z ostrova není okružní cesta.

ŘEŠENÍ:

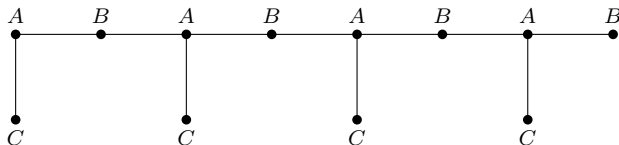
Dokážeme, že maximální počet trajektů je 22. Označme si státy jako A, B, C, D . Úlohu můžeme reprezentovat grafem, kde ostrovy budou vrcholy a trajekty budou hranami.⁴ Uvažujme nyní podgraf tvořený vrcholy patřící státům A, B, C a všemi hranami mezi nimi. Tento podgraf nesmí obsahovat cyklus. Graf o n vrcholech bez cyklů může mít nanejvýš $n - 1$ hran (má-li přesně $n - 1$ hran, jde o tzv. *strom*).

Náš podgraf s 12 vrcholy tak může mít maximálně 11 hran. Analogickou úvahu provedeme pro libovolnou trojici států. Sečteme-li hrany uvažovaných čtyř podgrafů, dostaneme celkem nanejvýš 44 hran. Každou z nich jsme ale započítali alespoň dvakrát (třikrát, vede-li mezi vrcholy ze stejného státu). Proto je celkový počet hran nanejvýš $44/2 = 22$.

Zbývá ukázat, že vhodné rozložení o dvaadvaceti hranách existuje. Může vypadat například takto:



Toto rozložení splňuje podmínku zadání, protože v podgrafu tvořeném kterýmikoliv třemi státy nezbude žádný cyklus – viz např. pro A, B, C :



POZNÁMKY:

Většina správných řešení postupovala podobným způsobem. Za správnou konstrukci ale chybné zdůvodnění jsem pak uděloval bod. (Jakub Vlček)

Úloha 6.

Buďte M, N po řadě středy stran AD, AB čtverce $ABCD$. Přímka p je zvolena tak, aby procházela bodem M a obraz bodu N v osové souměrnosti podle p ležel na diagonále BD . Necht' je E průsečíkem AB s p . Dokažte, že $|ME| = |AB|$.

ŘEŠENÍ:

Označme si obraz bodu N podle p jako N' a obraz bodu M podle přímky AB jako M'' . Budeme chtít dokázat, že $\angle AME = 60^\circ$, protože pak je díky pravému úhlu AME trojúhelník $MM''E$ rovnostranný. Z toho už pak snadno dostaneme, že $|ME| = 2|MA| = |AB|$, což po nás chce zadání.

Ze sinové věty pro trojúhelník DMN' víme, že

$$\frac{|MD|}{\sin \angle MN'D} = \frac{|MN'|}{\sin \angle MDN'}.$$

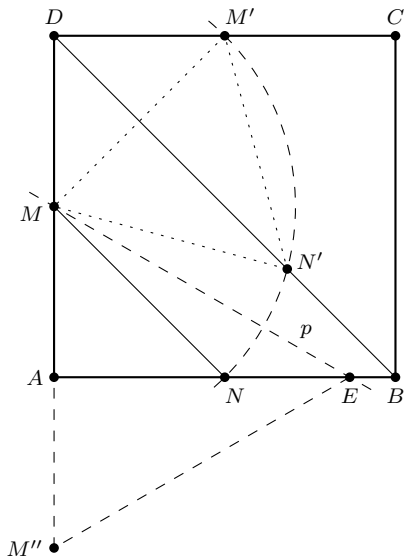
Osová souměrnost zachovává délky úseček, takže $|MN| = |MN'|$ a z Pythagorovy věty dostáváme $|MN| = \sqrt{2} \frac{|AB|}{2} = |MN'|$. Ze zadání jistě víme, že $|MD| = \frac{|AB|}{2}$ a $\angle MDN' = 45^\circ$,

⁴Pokud o grafech slyšíš poprvé, doporučujeme Ti k seznámení první díl PraSečího seriálu *Letem grafovým světem* ze 34. ročníku: <https://prase.cz/archive/34/uvod1s.pdf>.

protože úhlopříčka ve čtverci svírá se stranami úhel 45° . Takže po dosazení do sinové věty v DMN' dostaneme

$$\frac{\frac{|AB|}{2}}{\sin |\angle MN'D|} = \frac{\sqrt{2} \frac{|AB|}{2}}{\sin 45^\circ}.$$

Odsud ekvivalentními úpravami a dosazením $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ získáme $\sin |\angle MN'D| = \frac{1}{2}$, přičemž je jasné, že bude menší než 90° . Nutně tedy $|\angle MN'D| = 30^\circ$. Úsečka MN je střední příčkou trojúhelníku ABD , takže MN a BD jsou rovnoběžky. Díky tomu platí, že $|\angle MN'D| = |\angle N'MN| = 30^\circ$ a díky osové souměrnosti máme $|\angle NME| = \frac{|\angle N'MN|}{2} = 15^\circ$. Odsud vidíme, že $|\angle AME| = 60^\circ$ (dostaneme sečtením úhlů u M), což nám stačilo dokázat.



ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ:

Uvažme střed strany DC a označme jej M' . Můžeme jej interpretovat jako obraz bodu M v osové souměrnosti podle diagonály BD (podle BD je osově souměrný celý čtverec, tedy i jeho příslušné středy). Odsud jasně vidíme, že $|M'N'| = |MN'| = |MN| = |MM'|$, a tedy trojúhelník $MM'N$ je rovnostranný, proto $|\angle MN'D| = 30^\circ$ (opět využíváme osové souměrnosti, tj. $|\angle MN'D| = |\angle M'N'D| = \frac{60^\circ}{2}$).

Posléze už se k $|ME| = |AB|$ dostaneme stejně jako v prvním řešení.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů úlohu vyřešila správně a používala všemožné chytré úhlení. Někteří zkoušeli úlohu řešit i algebraicky v kartézských souřadnicích.

(Bára Klusáková)

Úloha 7.

Miško má n ohrádek a hraje hru s žirafami. Žirafy se na začátku rozmístí do ohrádek. Následně Miško v každém tahu vybere dvě ohrádky a jedna žirafa z některé z nich se přesune do druhé z nich. Pokud v žádné ze dvou zvolených ohrádek žádná žirafa není, Miško vyhrává. Pro dané n naleznete nejmenší z , pro které se žirafy mohou rozmístit a hrát tak, že Miško v konečném počtu tahů nevyhraje.

ŘEŠENÍ:

Když si s úlohou budeme chvilku hrát, přijdeme na to, že žirafy Miška porazí, pokud je jich alespoň $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$. Nejprve ukažme, že:

Tvrzení A. Pokud je žiraf méně než $\binom{n}{2}$, Miško dokáže v konečném počtu tahů vyhrát – vytvořit dvě prázdné ohrádky.

K tomu nám pomůže následující lemma.

Lemma. Pokud se v n ohrádkách nachází dohromady $z < \binom{n}{2}$ žiraf, musí existovat dvě ohrádky se stejným počtem žiraf.

Důkaz lemmatu. Předpokládejme, že v každé ohrádce by se nacházel různý počet žiraf. Označme tyto počty BÚNO $z_1 < z_2 < \dots < z_n$. Potom nutně $z_1 \geq 0, z_2 \geq 1, \dots, z_n \geq n-1$ a tudíž celkový počet žiraf by byl $z > 0+1+\dots+(n-1) = \binom{n}{2}$. To je spor, takže v některých ohrádkách se musí nacházet stejný počet žiraf. $\square$

Lemma platí, pusťme se nyní do důkazu hlavního tvrzení.

Důkaz tvrzení A. Pokud je v ohrádkách dohromady méně než $\binom{n}{2}$ žiraf, podle lemmatu musí existovat dvě ohrádky se stejným počtem žiraf. Miškova strategie v každém tahu je vybrat tyto dvě ohrádky. Označme počet žiraf v jedné z nich jako z_x . Pokud tyto ohrádky obě obsahují $z_x = 0$ žiraf (jsou prázdné), Miško vyhrál. Pokud ne ($z_x > 0$), přesune se mezi nimi jedna žirafa, takže v jedné z ohrádek bude $z_x + 1$ a ve druhé $z_x - 1$ žiraf.

Nyní ukažme, že toto nemůže Miško dělat do nekonečna, tedy že po konečném počtu tahů musí vyhrát. Zaveďme si veličinu $K = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$, K je tedy druhá mocnina počtu žiraf v každé ohrádce sečtená přes všechny ohrádky. Miško vybere ohrádky se stejným počtem žiraf $z_x > 0$ a jedna žirafa se přesune. Analyzujme, jak toto změní veličinu K . V celém součtu se změní pouze dva členy z_x^2 . A změna celého součtu bude

$$(z_x + 1)^2 + (z_x - 1)^2 - z_x^2 - z_x^2 = 2z_x + 1 - 2z_x + 1 = 2.$$

Hodnota K tedy při každém Miškově tahu vzroste o 2. Protože ale máme n ohrádek, kde v žádné nemůže být nikdy více než z žiraf, je jasné, že $K \leq nz^2$. Takže Miško nemůže své tahy provádět do nekonečna a v konečném počtu tahů musí vyhrát. $\square$

Nyní ještě musíme ukázat, že pro $\binom{n}{2}$ žiraf už Miško vyhrát nemůže.

Tvrzení B. Pokud je žiraf $\binom{n}{2}$, mohou hrát tak, aby Miško nebyl schopen v konečném počtu tahů vyhrát.

Důkaz tvrzení B. Žirafy budou mít následující strategii. Každá z $\binom{n}{2}$ žiraf dostane na starosti jednu dvojici ohrádek (mezi n ohrádkami je přesně $\binom{n}{2}$ různých dvojic). Na začátku si každá žirafa stoupne do jedné z těchto svých ohrádek. Pokud nyní Miško vybere dvojici ohrádek, bude vždy existovat žirafa, která má tuto dvojici ohrádek na starosti a tato žirafa se přesune do své druhé ohrádky. Vidíme, že ať bude Miško hrát jakkoliv, žirafí strategie zaručí, že v každé dvojici ohrádek se bude vždy nacházet alespoň jedna žirafa (která ji má na starosti). Miško tedy nikdy nemůže vyhrát. $\square$

Nejmenší počet žiraf z , pro které nemůže Miško v konečném počtu tahů vyhrát, je $z = \binom{n}{2}$.

POZNÁMKY:

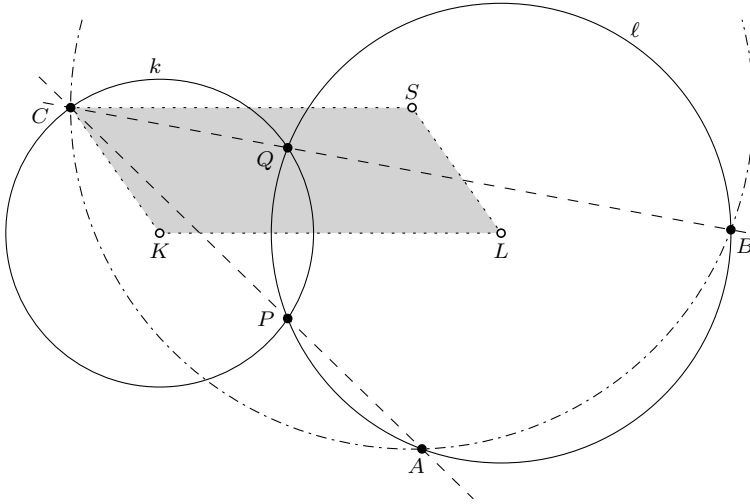
Většina řešitelů se dopracovala ke správnému počtu $z = \binom{n}{2}$ žiraf. Důkaz prvního tvrzení měli jenom někteří, druhé tvrzení se nepodařilo dokázat nikomu. (Ondra Trinkewitz)

Úloha 8.

Jsou dány kružnice k a ℓ , jež se protínají v bodech P a Q . Na kružnici k zvolíme bod C různý od P, Q a označíme $A \neq P$ druhý průsečík ℓ s přímkou CP a $B \neq Q$ druhý průsečík ℓ s přímkou CQ . Ukažte, že střed kružnice opsané ABC leží na pevné kružnici, která nezávisí na volbě C .

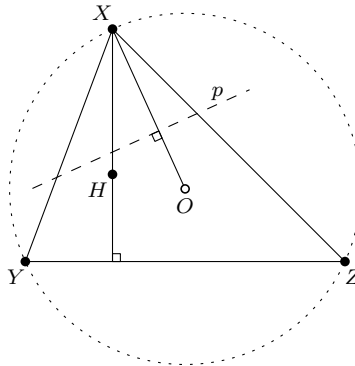
ŘEŠENÍ:

Označme K, L postupně středy kružnic k a ℓ , a nech S je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC . Ukážeme, že $CSLK$ je rovnoběžník.



Budeme používat následující lemu.

Lema. Nech O je středem kružnice opsané trojúhelníku XYZ a nech p je antirovnoběžka⁵ k YZ vzhledem na uhol YXZ . Potom $XO \perp p$.



⁵Čo sú to antirovnoběžky a kamaráti? Zistiš tu: <https://prase.cz/library/AntirovnobeznostMR/AntirovnobeznostMR.pdf>

Dôkaz. Nech H je ortocentrum trojuholníka XYZ . Z toho, že O a H sú „kamaráti“, máme, že XH a XO sú izogonály vzhľadom na uhol YXZ . To znamená, že preklopením XH cez os uhla YXZ dostaneme XO . Zároveň, keď cez túto os preklopíme YZ , dostaneme rovnobežku s p . To znamená, že uhol, ktorý zvierajú priamky XH a YZ , bude rovnaký ako uhol, ktorý zvierajú priamky XO a p . Avšak $XH \perp YZ$, takže $XO \perp p$. $\square$

Keďže K je stredom kružnice opísanej CQP a priamky PQ a AB sú antirovnobežné vzhľadom na uhol BCA , platí $CK \perp AB$. Zároveň platí $SL \perp AB$, keďže S i L ležia na osi strany AB . Takže máme $CK \parallel SL$.

Podobne, keďže S je stredom kružnice opísanej ABC a priamky PQ a AB sú antirovnobežné vzhľadom na uhol BCA , platí $CS \perp PQ$. Zároveň platí $KL \perp PQ$, keďže K i L ležia na osi strany PQ . Takže máme $CS \parallel PQ$. To spolu s $CK \parallel SL$ dáva, že $CSLK$ je rovnobežník.

Keďže $CSLK$ je rovnobežník, platí $|SL| = |CK|$. Všimnime si, že dĺžka úsečky CK je rovná polomeru kružnice k , a teda nezávisí od polohy bodu C . To znamená, že ani dĺžka úsečky SL nezávisí od polohy bodu C . Tým sme dokázali, že bod S leží na pevnej kružnici, ktorá má stred L a jej polomer je rovný polomeru kružnice k .

POZNÁMKY:

Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Niektoré odovzdané riešenia boli ako vzorové, niektoré boli zložitejšie a ostatné ešte zložitejšie. (Michal „Miško“ Pecho)