

Polynomy 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. PROSINCE 2024

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Nalezněte všechna reálná čísla q , pro které má polynom $x^4 - 40x^2 + q$ čtyři reálné kořeny, jež tvoří aritmetickou posloupnost.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Najděte všechny dvojice polynomů $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, jež splňují $Q(x^2) = (x+1)^4 - xP(x)^2$ pro všechny komplexní hodnoty x .

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Buď $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ polynom, který má stupeň 2024, vedoucí koeficient 1 a pro každé celé číslo n takové, že $1 \leq |n| \leq 1012$, splňuje $P(\frac{1}{n}) = n^2$. Najděte všechna další reálná čísla r , jež splňují $P(\frac{1}{r}) = r^2$.

Polynomy 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Nalezněte všechna reálná čísla q , pro které má polynom $x^4 - 40x^2 + q$ čtyři reálné kořeny, jež tvoří aritmetickou posloupnost.

ŘEŠENÍ:

Mějme nějaké q vyhovující zadání. Ukážeme, že pak již nutně $q = 144$.

Označme kořeny našeho polynomu r_1, r_2, r_3, r_4 . Tyto kořeny jsou reálné a tvoří aritmetickou posloupnost, existují tedy¹ $s, d \in \mathbb{R}$ taková, že $r_1 = 3s, r_2 = 3s + d, r_3 = 3s + 2d, r_4 = 3s + 3d$. Z Viètova vztahu pro koeficient u x^3 dostáváme

$$12s + 6d = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0,$$

aneb $d = -2s$. Můžeme tedy psát $r_1 = 3s, r_2 = s, r_3 = -s, r_4 = -3s$. Nyní ze vztahu pro koeficient u x^2 obdržíme

$$-10s^2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = -40,$$

neboli $s = \pm 2$. V obou případech dosazením do vzorce pro absolutní člen dostáváme

$$q = r_1r_2r_3r_4 = 9s^4 = 9 \cdot 16 = 144.$$

Jediným kandidátem na řešení je tudíž $q = 144$. Musíme však ještě ověřit, že q skutečně vyhovuje(!), tedy že pro toto q má polynom čtyři reálné kořeny tvořící aritmetickou posloupnost. To uděláme snadno, neboť dosazením $s = \pm 2$ do výše odvozených vztahů získáme $d = -4$ a $r_1 = 6, r_2 = 2, r_3 = -2, r_4 = -6$ (resp. $d = 4$ a $r_1 = -6, r_2 = -2, r_3 = 2, r_4 = 6$) a jejich „kořenovost“ ověříme přímým výpočtem.

POZNÁMKY:

Přibližně polovina došlých řešení postupovala jako vzorové, leč bohužel často zapomínala získaného kandidáta $q = 144$ ověřit. To šlo buď přímým dosazením, jako je uvedeno výše, nebo ověřením, že nalezené kořeny (a difference) splňují i třetí Viètovův vztah (pak to již kořeny být musí). Druhý častý postup byl substituování $t = x^2$ a řešení výsledné kvadratické rovnice. (Josef „José“ Soural)

¹Zde schválně bereme $3s$, abychom se později vyhnuli zlomkům ;).

Úloha 2.

Najděte všechny dvojice polynomů $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, jež splňují $Q(x^2) = (x+1)^4 - xP(x)^2$ pro všechny komplexní hodnoty x .

ŘEŠENÍ:

Všimněme si, že $\deg((x+1)^4) = 4$ a $\deg(xP(x)^2) = 2\deg(P) + 1$. Pokud $\deg(P) \geq 2$, pak $\deg(xP(x)^2) \geq 5$. Nemůže se tedy rovnat stupni $(x+1)^4$, takže

$$\deg((x+1)^4 - xP(x)^2) = \max\{4, \deg(xP(x)^2)\} = 2\deg(P) + 1$$

je kladný a lichý. Zároveň ale $\deg(Q(x^2)) = 2\deg(Q(x))$, takže se nikdy nerovná kladnému lichému číslu. Musí tedy platit $\deg(P) \leq 1$.

Díky tomu $P(x) = ax + b$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{C}$ a

$$(x+1)^4 - xP(x)^2 = x^4 + (4-a^2)x^3 + (6-2ab)x^2 + (4-b^2)x + 1.$$

Tento polynom se rovná $Q(x^2)$ pro nějaké $Q \in \mathbb{C}[x]$, právě když jsou koeficienty u lichých mocnin x nulové, tedy právě když $a = \pm 2$ a $b = \pm 2$. Z $Q(x^2)$ je možné jednoznačně určit Q , takže pro každou volbu a, b vyhovuje právě jedna dvojice P, Q :

$$\begin{aligned} a = 2, \quad b = 2 &\implies P(x) = 2x + 2, \quad Q(x) = x^2 - 2x + 1, \\ a = 2, \quad b = -2 &\implies P(x) = 2x - 2, \quad Q(x) = x^2 + 14x + 1, \\ a = -2, \quad b = 2 &\implies P(x) = -2x + 2, \quad Q(x) = x^2 + 14x + 1, \\ a = -2, \quad b = -2 &\implies P(x) = -2x - 2, \quad Q(x) = x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

POZNÁMKY:

Mnoho důkazů toho, že $\deg(P) \leq 1$ nebylo úplně přesvědčivých: několik řešitelů si například neuvědomilo, že pro polynomy $R, S \in \mathbb{C}[x]$ rovnost $\deg(R+S) \leq \max\{\deg(R), \deg(S)\}$ nemusí platit pokud $\deg(R) = \deg(S)$.
(Tomáš Flídr)

Úloha 3.

Buď $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ polynom, který má stupeň 2024, vedoucí koeficient 1 a pro každé celé číslo n takové, že $1 \leq |n| \leq 1012$, splňuje $P(\frac{1}{n}) = n^2$. Najděte všechna další reálná čísla r , jež splňují $P(\frac{1}{r}) = r^2$.

ŘEŠENÍ:

Uvažujme polynom $Q(x) = x^2P(x) - 1$. Platí, že $P(\frac{1}{r}) = r^2$ právě tehdy, když je $\frac{1}{r}$ kořenem $Q(x)$. Známe tedy již 2024 kořenů Q , a to $\frac{1}{n}$ pro celá čísla n taková, že $1 \leq n \leq 1012$. Stupeň Q je 2026, ze základní věty algebry má tedy ještě další dva kořeny (které můžou být komplexní). Označme tyto dva kořeny r_1 a r_2 . Potom je odpověď $\frac{1}{r_1}$ a $\frac{1}{r_2}$.

Zbývá určit r_1 a r_2 , což uděláme pomocí Viětových vztahů pro konstantní a lineární člen Q . Označme S součin všech kořenů Q . Vedoucí koeficient Q je 1, neboť vedoucí koeficient P je 1. Protože konstantní člen Q je -1 a lineární je 0, platí

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)^{2026} S = S = r_1 r_2 \cdot \prod_{n=1}^{1012} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{-n} = (-1)^{1012} \cdot r_1 r_2 \cdot \frac{1}{(1012!)^2} = r_1 r_2 \cdot \frac{1}{(1012!)^2}, \\ 0 &= (-1)^{2025} \cdot \left(\frac{S}{r_1} + \frac{S}{r_2} + \sum_{n=1}^{1012} \left(\frac{S}{n} + \frac{S}{-n} \right) \right) = -S \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned}$$

Jelikož nula zjevně není kořenem Q , můžeme druhou rovnost upravit na $r_2 = -r_1$. Z první rovnosti potom dostáváme $r_1^2 = (1012!)^2$. Tudíž $r_{1,2} = \pm 1012!$.

Odpověď je tedy $\pm \frac{1}{1012!}$.

POZNÁMKY:

Jak si povšimla *Svatava Šimečková*, není na první pohled jasné, že polynom P je jednoznačně daný. To lze buď vyřešit tím, že ukážeme jednoznačnost P , nebo stejně jako ve vzorovém řešení pracujeme s nějakým takovým polynomem P a protože Q se ukáže být jednoznačně daný, je jednoznačný i P .

Většina došlých řešení se vydala stejnou cestu jako to vzorové. Největším oříškem se ukázalo uvědomění si, že kořen Q je převrácená hodnota čísla splňujícího podmínku v zadání. V hodně řešeních mi také chyběla zmínka, že používáme základní větu algebry. Jinak bychom totiž ani nevěděli, že nalezená r_1 a r_2 vskutku jsou kořeny Q .
(*Magdaléna Mišinová*)