

UFO

1. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 30. ZÁŘÍ 2024

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Terka si do roviny kreslí plánek kolonizace Marsu. Nejprve si do plánu umístí 6 trojúhelníkových bodů a následně každý s každým propojí úsečkou. Poradte Terce, jak body rozmístit, aby po propojení vzniklo právě 17 nedeGENEROVANÝCH trojúhelníků s vrcholy v trojúhelníkových bodech.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Z hlubin vesmíru doputovala na Zemi následující zpráva:

$$1 \square 2 \square 3 \square \dots \square 4320 \square 4321.$$

Dopíšte do ní znaménka $+$ nebo $-$ tak, aby výsledná hodnota byla co nejmenší kladná.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Miško se ocitl na vesmírném parkovišti tvaru tabulky 4×4 . V každém z jeho šestnácti sektorů parkoval nezáporný počet létajících talířů. Miško spočítal, kolik talířů se nacházelo v každém řádku a každém sloupci a vyšly mu samé mocniny dvojky. Dokažte, že se nemohlo jednat o osm různých mocnin dvojky.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Naty si vybrala přirozené číslo n a následně si vypsala všechna n -písmenná slova¹ složená z písmen U , F a O . Dokažte, že těch, v nichž se každé z podslov UF a UO vyskytuje suděkrát, je mezi vypsávanými slovy ostře více než těch, v nichž se každé z těchto podslov vyskytuje lichékrát.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Luxusní čtvrť na Marsu tvoří $(2m + 1) \times (2n + 1)$ čtvercových parcel. Na každé parcele stojí vila, kterou obývá jeden Marťan. Každý Marťan má buď červenou, nebo zelenou barvu. *Hlavní barvou řádku (resp. sloupce)* rozumíme barvu Marťanů, která je v řádku (resp. sloupci) zastoupena v nadpoloviční většině. Dokažte, že alespoň $m + n + 1$ Marťanů má hlavní barvu svého řádku i svého sloupce.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Na poli se záhadně objevily kružnice k a ℓ se stejným poloměrem. Protínají se v bodech A a B . Přímka procházející bodem A protíná k a ℓ postupně v bodech C a D . Kolmice z B na přímku CD protíná k a ℓ postupně v bodech E a F . Dokažte, že $CEDF$ je rovnoběžník.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Kuba objevuje mimozemskou kulturu. Dozvěděl se, že jsou pro ni posvátná čísla x , p , n , ale nikdo mu nechce říct, jaká čísla to jsou. Ví jenom, že x je celé číslo, p je prvočíslo a n je přirozené číslo a že splňují vztah $x^3 + x^2 + x + 1 = p^n$. Pomozte Kubovi najít všechny možné takové trojice.

¹Za *slovo* považujeme jakoukoliv posloupnost písmen. *Podslovem* pak rozumíme úsek několika po sobě jdoucích písmen v daném slově.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice ω . Bod M nazveme *neidentifikovaným létajícím*, pokud $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|MD|}{|MC|}$. Dokaž, že existují čtyři neidentifikované létající body ležící na ω takové, že čtyřúhelník, který tvoří, má kolmé úhlopříčky.

UFO

1. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

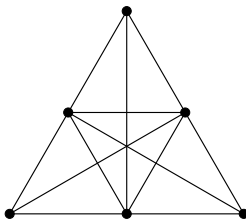
Úloha 1.

Terka si do roviny kreslí plánec kolonizace Marsu. Nejprve si do plánu umístí 6 triangulačních bodů a následně každý s každým propojí úsečkou. Poradte Terce, jak body rozmístit, aby po propojení vzniklo právě 17 nedegenerovaných trojúhelníků s vrcholy v triangulačních bodech.

ŘEŠENÍ:

Uvažujme nejprve, že máme 6 bodů v tzv. obecné poloze, tedy mějme body rozmístěné tak, že každé tři body tvoří nedegenerovaný trojúhelník. Potom z bodů umíme vytvořit právě $\binom{6}{3} = 20$ trojúhelníků, protože libovolná trojice těchto bodů nám vytvoří trojúhelník. Jelikož $\binom{6}{3} = 20$ a my chceme, aby trojúhelníků bylo jen 17, musíme právě tři trojúhelníky degenerovat. Trojúhelník je degenerovaný, když všechny jeho vrcholy leží na jedné přímce. Degeneraci tří trojúhelníků tedy můžeme udělat tak, že si vybereme tři trojice bodů a každou z nich položíme na jednu přímku. Tím se nám tři trojúhelníky zdegenerují, jejich počet se tedy skutečně sníží o 3 a budeme hotovi. Pozor na to, že kdybychom na jednu přímku umístili čtveřici bodů nebo víc, zdegenerujeme tím alespoň $\binom{4}{3} = 4$ trojúhelníky, což je pro nás příliš.

Příklad správného rozmístění bodů je například:



POZNÁMKY:

Došlá řešení byla vesměs správná, téměř všem se podařilo najít vyhovující konstrukci. Výjimkou bylo pouze pár řešení, ve kterých řešitelé dokazovali trochu jinou úlohu, protože zadání pochopili jinak.

(Lenka Poljaková)

Úloha 2.

Z hlubin vesmíru doputovala na Zemi následující zpráva:

$$1 \square 2 \square 3 \square \dots \square 4320 \square 4321.$$

Dopíšte do ní znaménka $+$ nebo $-$ tak, aby výsledná hodnota byla co nejmenší kladná.

ŘEŠENÍ:

Nejmenší kladné číslo je 1, proto chceme v ideálním případě najít takové doplnění znamének, aby byl součet právě 1. Jednička na začátku se vždy přičítá, její znaménko nemůžeme ovlivnit. Naším cílem je tedy dostat ve zbytku řady součet 0. Všimneme si, že čtyřem po sobě jdoucím číslům můžeme doplnit znaménka tak, aby se sečetla na nulu, například +, −, −, +, protože platí

$$n - (n + 1) - (n + 2) + (n + 3) = n - n - 1 - n - 2 + n + 3 = 0.$$

Číslo 4320, což je počet znamének, která musíme doplnit, je dělitelné čtyřmi. To znamená, že můžeme čísla od 2 do 4321 rozdělit na čtveřice po sobě jdoucích čísel, v rámci kterých umíme dostat součet 0. Součet celé zprávy tedy bude 1 a výsledné doplnění může vypadat například takto:

$$1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (4318 - 4319 - 4320 + 4321) = 1.$$

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správná a postupovala podobně jako vzorové. Část řešitelů zvolila složitější postup, který většinou také vedl ke správnému výsledku. Nejčastější chybou bylo neuvědomění si, že změnou znaménka před nějakým číslem se součet změní až o dvojnásobek tohoto čísla.

(Anna Weberová)

Úloha 3.

Miško se ocitl na vesmírném parkovišti tvaru tabulky 4×4 . V každém z jeho šestnácti sektorů parkoval nezáporný počet létajících talířů. Miško spočítal, kolik talířů se nacházelo v každém řádku a každém sloupci a vyšly mu samé mocniny dvojky. Dokažte, že se nemohlo jednat o osm různých mocnin dvojky.

ŘEŠENÍ:

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že počet létajících talířů v každém sloupci a v každém řádku je jiná mocnina dvojky. Označme počty talířů v řádcích a sloupcích $2^a, 2^b, \dots, 2^h$, kde $a, \dots, h \in \mathbb{N}_0$ jsou nezáporná celá čísla. Dále si všimneme, že součet talířů ve všech sloupcích musí být stejný jako součet talířů ve všech řádcích. Tedy: $2^a + 2^b + 2^c + 2^d = 2^e + 2^f + 2^g + 2^h$. Vzhledem k tomu, že se jedná o různé mocniny dvojky, jedna z osmi mocnin musí být nejmenší. Nechť to je BÚNO 2^a . Když celou rovnici vydělíme 2^a , dostaneme

$$1 + 2^{b-a} + 2^{c-a} + 2^{d-a} = 2^{e-a} + 2^{f-a} + 2^{g-a} + 2^{h-a}.$$

Vzhledem k tomu, že a byl nejmenší (nezáporný celý) exponent, jsou rozdíly v exponentech celá kladná čísla. Na levé straně tedy zůstal součet jedničky a tří sudých čísel, což je číslo liché. Na pravé straně pak zůstal součet čtyř sudých čísel, což je číslo sudé. A to je spor, neboť liché číslo se nikdy nemůže rovnat číslu sudému.

POZNÁMKY:

Většina došlých řešení byla správná a podobala se vzorovému řešení nebo měla alespoň podobnou myšlenku. Klíčové bylo uvědomit si, že počet létajících talířů ve sloupcích je roven počtu létajících talířů v řádcích.

(Johana Kubatová)

Úloha 4.

Naty si vybrala prirodzené číslo n a následně si vypsalá všechna n -písmenná slova¹ složená z písmen U , F a O . Dokažte, že těch, v nichž se každé z podslov UF a UO vyskytuje suděkrát, je mezi vypsanými slovy ostře více než těch, v nichž se každé z těchto podslov vyskytuje lišěkrát.

ŘEŠENÍ:

Slova, v kterých sa podslová UF aj UO vyskytujú nepárnekrát, budem volať *nepárne* a tie, kde sa vyskytujú párnekrát, budem volať *párne*.

Najprv si všimnime, že podslová zo zadania sa nedajú zapísať za seba tak, aby sa prekrývali (napríklad UF a FO by sa tak dali zapísať). To znamená, že môžeme vymeniť niektoré UF za UO a hoci nepoznáme zvyšok slova, viem, že počet výskytov ostatných UF a UO to nezmení (čo by pri UF a FO neplatilo, napríklad pri slove UFO , ak zmeníme FO za OF , zmení to aj počet výskytov podslova UF).

Teraz sa môžeme pozrieť na nejaké nepárne slovo. O nepárnom slove vieme, že má aspoň jedno podslovo UF alebo UO . Ak vymeníme posledný výskyt podslova za to druhé (UF za UO , alebo UO za UF), počet výskytov jedného podslova klesne a počet druhého stúpne o jedna, takže sa oba počty zmenia na párne. Takto sme ku každému nepárnemu slovu priradili párne. Okrem toho, keď zoberieme nejaké takto vzniknuté párne slovo, tak môžeme zmeniť posledný výskyt UF alebo UO naspäť, čo nám vráti pôvodné nepárne slovo. To znamená, že to nepárne slovo je jediné, čo sa mohlo zmeniť na toto párne a teda rôzne nepárne slova sa nám priradia ku rôznym párnym. To znamená, že párných je aspoň toľko, čo nepárných.

Okrem popárovovaných párných slov existujú aj také, kde počty výskytov UF aj UO sú rovné nule, teda majú počet výskytov párný. Tie určite nie sú spárované so žiadnym nepárnym (nedá sa na ne dostať zmenou podslova UF alebo UO , keďže žiadne nemajú). Vďaka nim je počet párných určite väčší ako počet nepárných.

POZNÁMKY:

Mali sme viacero rôznych riešení, tak by som tu rád spomenul niektoré funkčné. Veľa riešiteľov spočítalo pre každý možný súčet počtov výskytov UF a UO , koľko možností tvoria párne a nepárne slova. Ešte jedna možnosť bola indukciou sa pozrieť na krok zo slova dlhého n na slovo dlhé $n + 1$. Na toto bolo treba vytvoriť si neznáme pre každú kombináciu parít a podľa toho, či sa slovo končí na U . Potom sa dalo správne zrátať z neznámych pre n neznáme pre $n + 1$, no toto riešenie bolo o niečo zdĺhavejšie a zložitejšie.

(Martin Šindelář)

Úloha 5.

Luxusní čtvrt' na Marsu tvoří $(2m + 1) \times (2n + 1)$ čtvercových parcel. Na každé parcele stojí vila, kterou obývá jeden Martan. Každý Martan má buď červenou, nebo zelenou barvu. Hlavní barvou řádku (resp. sloupce) rozumíme barvu Martanů, která je v řádku (resp. sloupci) zastoupena v nadpoloviční většině. Dokažte, že alespoň $m + n + 1$ Martanů má hlavní barvu svého řádku i svého sloupce.

ŘEŠENÍ:

Nechť je luxusní čtvrt' tvořena $BÚNO$ $2m + 1$ řádky a $2n + 1$ sloupci. V každém řádku, resp. sloupci, přitom vždy existuje nadpoloviční většina těch Martanů, kteří mají hlavní barvu svého řádku, resp. sloupce, neboť čísla $2m + 1$ i $2n + 1$ jsou lichá (jinak řečeno, počty červených a zelených Martanů se nemohou rovnat). V každém řádku je tak vždy alespoň $n + 1$ Martanů majících jeho barvu, v celé čtvrti je proto alespoň $(2m + 1)(n + 1)$ Martanů, kteří mají barvu svého řádku. Podobně můžeme říci, že v každém sloupci je nanejvýš m Martanů nemajících jeho barvu, v celé čtvrti je

¹Za slovo považujeme jakoukoliv posloupnost písmen. Podslovem pak rozumíme úsek několika po sobě jdoucích písmen v daném slově.

proto nanejvýš $(2n+1)m$ Marťanů, kteří nemají barvu svého sloupce. Ze všech Marťanů, kteří mají barvu svého řádku, tudíž alespoň

$$(2m+1)(n+1) - (2n+1)m = 2mn + 2m + n + 1 - 2mn - m = m + n + 1$$

musí mít i barvu svého sloupce, což jsme chtěli ukázat.

Alternativně můžeme přidat odhad počtu Marťanů, kteří mají barvu svého sloupce; těch musí být alespoň $(2n+1)(m+1)$. Celkem takto napočítáme alespoň $(2m+1)(n+1) + (2n+1)(m+1)$ Marťanů, z nichž ovšem alespoň

$$(2m+1)(n+1) + (2n+1)(m+1) - (2m+1)(2n+1) = (2m+1)(n+1) - (2n+1)m = m + n + 1$$

muselo být započítáno dvakrát. To jsou ale právě ti Marťané, kteří musí mít barvu svého řádku i sloupce, takže jsme hotovi.

POZNÁMKY:

Mnoho řešitelů se vydalo podobnou cestou jako vzorové řešení a zpravidla s úspěchem; někteří řešitelé přeházeli řádky a sloupce, zavedli pro ně specifické značení a za využití podobných odhadů jako ve vzoráku (a občas i trochy rozebírání) došli také k cíli, jiní zase použili důkaz sporem. Zbylá řešení jsem ohodnotil buď částečnými body za trefná pozorování, nebo 0 body, pokud se objevily pouze konstrukce konkrétních příkladů či byla dokazována neplatná tvrzení. (Štěpán Varhaník)

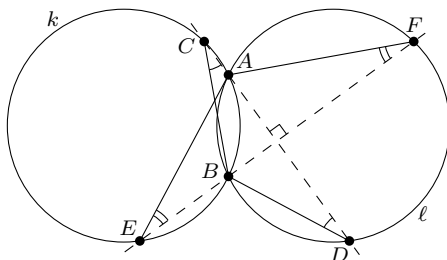
Úloha 6.

Na poli se záhadně objevily kružnice k a ℓ se stejným poloměrem. Protínají se v bodech A a B . Přímka procházející bodem A protíná k a ℓ postupně v bodech C a D . Kolmice z B na přímku CD protíná k a ℓ postupně v bodech E a F . Dokažte, že $CEDF$ je rovnoběžník.

ŘEŠENÍ:

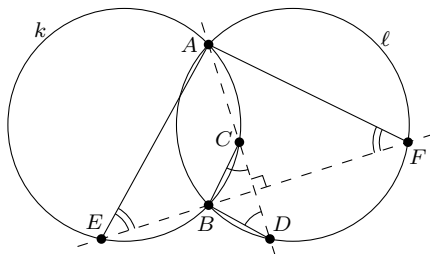
Nejprve si všimneme, že záleží, jestli bod A leží mezi C a D . Tož nastane právě tehdy, když C i D leží na delších obloucích AB . Pokud je jeden z nich na kratším oblouku, potom bod A leží mimo úsečku BC . Stejná situace je i u bodů B , E a F . Celkově tedy existují 3 různé konfigurace (podle toho, na kterých obloucích jsou body), kterékoli jiné lze na tyto snadno „přepísmenkovat“².

První konfigurace vypadá tak, že žádný z bodů C , E , D , F neleží na kratším z oblouků AB . Pak z věty o obvodovém úhlu platí, že $|\angle ACB| = |\angle ADB|$ (kružnice mají stejný poloměr, takže stejné dlouhá tětiva bude příslušet stejně velkému obvodovému úhlu), a proto je $\triangle BCD$ rovnoramenný a $|BC| = |BD|$. Výška z vrcholu B v $\triangle BCD$ leží na kolmici na úsečku CD procházející bodem B , a tedy i na přímce EF . Pata této výšky leží z rovnoramennosti v polovině úsečky CD , tudíž přímka EF půlí úsečku CD . Naprosto analogicky $|\angle AEB| = |\angle AFB|$, $\triangle AEF$ je rovnoramenný, tedy i CD půlí úsečku EF .

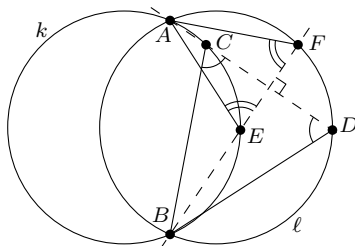


²Přepísmenkováním je míněno to, že můžeme přepsat body $C \leftrightarrow D$ a zároveň $E \leftrightarrow F$ (a potažmo názvy kružnic $k \leftrightarrow l$) a nic se nezmění, protože je vše osově souměrné podle AB . Stejně tak můžeme prohodit $A \leftrightarrow B$ a s nimi i názvy příslušných bodů $C \leftrightarrow E$ a $D \leftrightarrow F$, protože to je osově souměrné podle spojnice středů k a l . Takto můžeme situaci upravit tak, aby byly na kratších obloucích stejné body jako ve zmíněných BÚNO.

Druhá konfigurace vypadá tak, že na kratších obloucích AB leží právě 1 z bodů C, D, E a F . BÚNO nechť je tento bod C . Pak z věty o obvodovém úhlu platí, že $|\angle ADB| = \pi - |\angle ACB|$. Současně platí $\pi - |\angle ACB| = |\angle BCD|$ a odsud $|\angle ADB| = |\angle BCD|$, a tedy $\triangle BCD$ je rovnoramenný a EF půlí úsečku DC . Stejně jako v první konfiguraci $|\angle AEB| = |\angle AFB|$, $\triangle AEF$ je rovnoramenný, a tak i CD půlí úsečku EF .



Třetí konfigurace má na kratších stranách právě dva ze zmiňovaných bodů (snadno nahlédneme, že tři nebo čtyři tam být nemohou) a využívá stejné myšlenky jako předchozí dvě. BÚNO nechť jsou tyto dva body C a E (alternativně by to mohla být jen dvojice D a F) a stejně jako v předchozí konfiguraci platí, že $|\angle ADB| = \pi - |\angle ACB|$ a $\pi - |\angle ACB| = |\angle BCD|$, což naprosto totožně dokazuje, že $\triangle BCD$ je rovnoramenný a EF půlí úsečku CD . Platí, že $|\angle AEF| = \pi - |\angle AEB|$ a $\pi - |\angle AEB| = |\angle AFB|$, což naprosto totožně dokazuje, že $\triangle AEF$ je rovnoramenný a CD půlí úsečku EF .



Nehledě na konfiguraci, čtyřúhelník, jehož úhlopříčky se navzájem půlí, je rovnoběžník, takže tvrzení máme dokázáno pro všechny tři konfigurace.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů úlohu řešila podobně jako vzorák, akorát mnoho z nich neřešilo, že existuje více konfigurací. Tomuto problému se šikovně vyhnulo pár řešitelů, kteří použili (nebo alespoň zmínili) orientované úhly. Našlo se také pár pěkných řešení, která používala posunutí bodů, pomocí kterého se dokazovaly rovnoběžnosti, nebo třeba mocnost bodu ke kružnici. Úlohu šlo řešit i analyticky, ale jak jeden řešitel ověřil, bylo to zbytečně složité. (Barbora Klusáková)

Úloha 7.

Kuba objevuje mimozemskou kulturu. Dozvěděl se, že jsou pro ni posvátná čísla x, p, n , ale nikdo mu nechce říct, jaká čísla to jsou. Ví jenom, že x je celé číslo, p je prvočíslo a n je přirozené číslo a že splňují vztah $x^3 + x^2 + x + 1 = p^n$. Pomozte Kubovi najít všechny možné takové trojice.

ŘEŠENÍ:

Nejprve si levou stranu rovnice rozložíme, čímž dostaneme $(x+1)(x^2+1) = p^n$. Díky tomu víme, že v prvočíselném rozkladu levé strany rovnice je pouze prvočíslo p , a tedy platí tyto rovnice:

$$(x+1) = p^a,$$

$$(x^2+1) = p^b,$$

kde a, b jsou nezáporná celá čísla. Zároveň platí, že $x^2 \geq x$, tedy $x^2 + 1 \geq x + 1$, a proto $b \geq a$. To znamená, že $\frac{x^2+1}{x+1}$ je celé číslo. Pokud tento polynom vydělíme, dostaneme $x - 1 + \frac{2}{x+1}$.

Jelikož tento výraz má být celočíselný a $x - 1$ je vždy celé, musí být $\frac{2}{x+1}$ také celé. To nastane pouze pro čtyři různé hodnoty x , a to $-3, -2, 0$ a 1 . Po jejich dosazení do levé strany původní rovnice získáme čísla $-20, -5, 1$ a 4 , která se mají rovnat p^n .

Protože nejmenší prvočíslo je 2 a nejmenší přirozené číslo je 1 , bude p^n alespoň 2 . Z našich výsledků to tedy může být pouze 4 , a tedy jediné x , které vychází, je $x = 1$. Lze snadno ověřit, že jediné p a n , pro které $p^n = 4$ jsou $p = 2$ a $n = 2$. A tedy jediná trojice splňující zadání je $x = 1, p = 2$ a $n = 2$.

POZNÁMKY:

Někteří řešitelé ve svém řešení tvrdili, že p^{b-1} a p^{a-1} jsou celá čísla (nebo, že p dělí p^b a p^a), což ovšem neplatí, pokud se a nebo b rovnají 0 . (Lukáš Trojan)

Úloha 8.

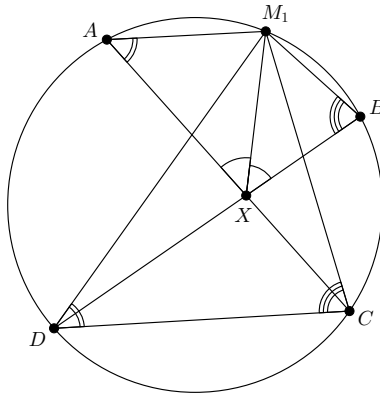
Čtýřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice ω . Bod M nazveme *neidentifikovaným létajícím*, pokud $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|MD|}{|MC|}$. Dokaž, že existují čtyři neidentifikované létající body ležící na ω takové, že čtýřúhelník, který tvoří, má kolmé úhlopříčky.

ŘEŠENÍ:

Označme si přesečník úhlopříček štvoruholníka $ABCD$ ako X . Ďalej si vyznačíme osi uhlov AXB a BXC . Ich prieniky s kružnicou ω na oblúkoch AB, BC, CD, DA označíme postupne M_1, M_2, M_3, M_4 . Platí

$$|\angle M_1 X M_2| = |\angle M_1 X B| + |\angle B X M_2| = \frac{|\angle AXB|}{2} + \frac{|\angle BXC|}{2} = \frac{|\angle AXC|}{2} = 90^\circ.$$

Úhlopriečky štvoruholníka $M_1 M_2 M_3 M_4$ sú teda na seba kolmé. Stačí teraz dokázať, že jeho vrcholy sú zároveň naozaj neidentifikované lietajúce.



Dokážeme to najskôr pre bod M_1 . Zo sínusovej vety vieme, že pomer strany ku sínusu protíhlého uhla je pre všetky strany v trojuholníku rovnaký. Preto, keď sa pozrieme na trojuholník AM_1X , vidíme, že

$$\frac{|XM_1|}{\sin(|\angle XAM_1|)} = \frac{|M_1A|}{\sin(|\angle M_1XA|)}. \quad (1)$$

Podobne z trojuholníka BXM_1 a následne rovnosti veľkostí uhlov M_1XA a M_1XB vidíme, že

$$\frac{|XM_1|}{\sin(|\angle XBM_1|)} = \frac{|M_1B|}{\sin(|\angle M_1XB|)} = \frac{|M_1B|}{\sin(|\angle M_1XA|)}. \quad (2)$$

Teraz ľavú stranu rovnosti (1) predelíme ľavou stranou rovnosti (2) a pravú stranu (1) pravou stranou (2). Všimneme si, že na ľavej strane sa čitatele a na pravej strane menovatele vykrátia. Dostávame, že

$$\frac{\sin(|\angle XBM_1|)}{\sin(|\angle XAM_1|)} = \frac{|M_1A|}{|M_1B|}.$$

Teraz sa pozrieme na trojuholník CM_1D . Zo sínusovej vety vieme, že

$$\frac{|M_1C|}{\sin(|\angle M_1DC|)} = \frac{|M_1D|}{\sin(|\angle M_1CD|)}.$$

Z vety o obvodovom uhle vieme, že $|\angle M_1DC| = |\angle M_1AC| = |\angle XAM_1|$. Podobne $|\angle M_1CD| = |\angle M_1BD| = |\angle XBM_1|$. Poďme teda tieto uhly dosadiť do predošlej rovnosti a upravovať ďalej.³

$$\begin{aligned} \frac{|M_1C|}{\sin(|\angle XAM_1|)} &= \frac{|M_1D|}{\sin(|\angle XBM_1|)}, \\ \frac{\sin(|\angle XBM_1|)}{\sin(|\angle XAM_1|)} &= \frac{|M_1D|}{|M_1C|}. \end{aligned}$$

Keď rovnosti spojíme, dostávame, že

$$\frac{|M_1A|}{|M_1B|} = \frac{\sin(|\angle XBM_1|)}{\sin(|\angle XAM_1|)} = \frac{|M_1D|}{|M_1C|},$$

čo sme chceli dokázať. Rovnaký postup vieme aplikovať aj na body M_2 , M_3 a M_4 . Štvoruholník $M_1M_2M_3M_4$ má teda vrcholy v neidentifikovaných lietajúcich bodoch na ω aj kolmé uhlopriečky.

POZNÁMKY:

Aj keď tie rovnosti vyzerajú možno na prvý pohľad hrozivo, netreba sa ich báť. Vzorové riešenie sa oplatí prečítať, nezje ťa. (Alica Dományová)

³Pri prenášaní obvodových uhlov sa nám môže stať, že uhol bude na opačnom oblúku, a teda keď mal pôvodný uhol veľkosť α , nový bude mať veľkosť $180^\circ - \alpha$. To nám ale nevadí, keďže $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.