

Mocnění

1. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. ÚNORA 2025

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Rozhodněte, zda existují reálná necelá čísla a, b taková, že pro libovolné přirozené n je $a^n + b^n$ celé číslo.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Řekneme, že přirozené číslo n je *zdvořilé*, jestliže je možné jej zapsat jako součet $k + (k+1) + \dots + \ell$, kde $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k < \ell$. Dokažte, že žádná přirozená mocnina dvojky není zdvořilá.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Nalezněte všechna celá nezáporná n taková, že $2^n + n$ dělí $2^{2^n} + n$.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) \geq 4^x, \quad f(x+y) \geq f(x)f(y).$$

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že $S(3^{n+1}) \leq S(3^n)$, kde $S(a)$ značí ciferný součet čísla a .

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Buď ABC trojúhelník. Nechť t_B, t_C jsou přímky, které se dotýkají kružnice opsané trojúhelníku ABC postupně v bodech B, C . Zvolme kružnici k_B se středem ležícím na t_B procházející bodem B . Podobně zvolme kružnici k_C se středem ležícím na t_C procházející bodem C . Předpokládejme, že k_B a k_C se protínají ve dvou různých bodech X a Y . Dokažte, že existuje pevný bod P nezávislý na volbě k_B a k_C takový, že body X, Y a P leží na přímce.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Uvažujme všechna 2025ciferná čísla, jejichž každá cifra je prvkem množiny $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Kolik z nich je dělitelných 2^{2025} ?

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{2n+1-k}{k+1} \right)^k \leq 2^n.$$

Mocnění

1. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Rozhodněte, zda existují reálná necelá čísla a, b taková, že pro libovolné přirozené n je $a^n + b^n$ celé číslo.

ŘEŠENÍ:

Pro libovolná opačná čísla x a $-x$ a liché n platí $x^n + (-x)^n = 0$. Zároveň pro každou druhou odmocninu přirozeného čísla je její sudá mocnina celočíselná, a sudé mocniny jakýchkoli x a $-x$ se navíc shodují. Zadání proto splníme pomocí kterékoli necelé druhé odmocniny přirozeného čísla, požadovaná čísla a, b tedy existují a jsou nimi například $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$.

POZNÁMKY:

Mnoho řešení se podobalo tomu vzorovému, ale kromě toho spousta chytře používala zlatý řez a fakt, že generuje Fibonacciho posloupnost. (Lukáš Trojan)

Úloha 2.

Řekneme, že přirozené číslo n je zdvořilé, jestliže je možné jej zapsat jako součet $k + (k+1) + \dots + \ell$, kde $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k < \ell$. Dokažte, že žádná přirozená mocnina dvojky není zdvořilá.

ŘEŠENÍ:

Dokážeme, že každé zdvořilé číslo n se dá přepsat takto: $k + (k+1) + \dots + (\ell-1) + \ell = \frac{(\ell+k)(\ell-k+1)}{2}$. Vedou k tomu následující úpravy:

$$\begin{aligned} n &= k + (k+1) + \dots + (\ell-1) + \ell = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(k + (k+1) + \dots + (\ell-1) + \ell \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(k + (k+1) + \dots + (\ell-1) + \ell + \right. \\ &\quad \left. + \ell + (\ell-1) + \dots + (k+1) + k \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left((k+\ell) + (k+\ell) + \dots + (k+\ell) \right) = \frac{(\ell+k)(\ell-k+1)}{2}. \end{aligned}$$

Pokud $k + \ell$ je sudé, tak i $\ell - k$ je sudé. Obdobně pokud $k + \ell$ je liché, tak i $\ell - k$ je liché. Z toho plyne, že čísla $(k+\ell)$ a $\ell - k + 1$ mají různou paritu.

Pokud v součinu bude liché číslo > 1 , tak součin určitě nebude mocnina dvojky. (Jinak by prvočíselný rozklad musel obsahovat nějaké liché prvočíslo, což je spor.) Aby n bylo mocninou dvojky, jsou jediné možnosti jsou buď $k + \ell = 1$, nebo $\ell - k + 1 = 1$. To ale nikdy nenastane, protože $k + \ell$ je vždy větší než 1, jelikož $k \geq 1, \ell > k$, a proto i $\ell - k + 1 > 1$.

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správně a postupovala stejným způsobem jako vzorové řešení. Dost řešitelů zapomnělo odůvodnit, proč jeden z činitelů nemůže být 1. (Petr Hladík)

Úloha 3.

Nalezněte všechna celá nezáporná n taková, že $2^n + n$ dělí $2^{2^n} + n$.

ŘEŠENÍ:

Výraz $2^{2^n} + n$ vydělíme $2^n + n$ a dostáváme

$$\frac{2^{2^n} + n}{2^n + n} = 2^n - n + \frac{n^2 + n}{2^n + n}.$$

Aby $2^n + n$ dělilo $2^{2^n} + n$, musí platit, že $\frac{n^2+n}{2^n+n}$ je celé číslo. Potom buď $n^2 + n = 0$, nebo $n^2 + n \geq 2^n + n$. V prvním případě platí $n = 0$ a dostáváme tak jedno z možných řešení. V druhém případě nerovnost můžeme upravit a dostáváme $n^2 \geq 2^n$. Indukcí ukážeme, že tato nerovnost pro $n \geq 5$ neplatí. Pro $n = 5$ nerovnost zjevně neplatí, použijeme indukci a dostáváme

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 \geq (n+1)^2,$$

jelikož $n^2 \geq 2n + 1$ pro $n \geq 5$. Zbývá tedy vyzkoušet $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ a dostáváme všechna možná řešení 0, 2 a 4.

POZNÁMKY:

Většina řešení postupovala podobně jako to vzorové a došla se ke stejnému výsledku. Někteří řešitelé zaměnili nezáporná celá čísla za přirozená a uteklo jim tak řešení $n = 0$. Část řešitelů bohužel ne zcela opatrně manipulovala s nerovnostmi nebo použila chybný argument, že rovnost $n^2 = 2^n$ platí pro $n = 2$ a pro $n > 2$ už tak nerovnost $n^2 \geq 2^n$ nemůže být splněna a opomenula tak možné řešení $n = 4$.
(Klárka Grinerová)

Úloha 4.

Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) \geq 4^x, \quad f(x+y) \geq f(x)f(y).$$

ŘEŠENÍ:

Funkcionální rovnice řešíme dosazováním konkrétních hodnot. Do nerovnosti $f(x) \geq 4^x$ dosadíme $x = 0$, z čehož obdržíme, že $f(0) \geq 1$. V druhé nerovnosti zvolme $y = 0$, čímž dostaneme, že

$$f(x) \geq f(x)f(0) \implies 1 \geq f(0).$$

Při úpravě jsme využili jednoduché skutečnosti, že $f(x) \geq 4^x \implies f(x) > 0$, tedy jsme mohli v nerovnosti podělit $f(x)$. Tedy máme $1 \geq f(0)$ a zároveň $f(0) \geq 1$, tudíž $1 \geq f(0) \geq 1$, z čehož už plyne $f(0) = 1$.

Nyní nasadíme další konkrétní hodnotu, volme $y = -x$. Z druhé nerovnosti dostaneme

$$f(x + (-x)) \geq f(x)f(-x) \implies 1 = f(0) \geq f(x)f(-x).$$

Zároveň platí první nerovnost, která dává, že

$$f(x)f(-x) \geq 4^x 4^{-x} = 1.$$

Celkově tedy máme

$$1 \geq f(x)f(-x) \geq 1 \implies f(x)f(-x) = 1.$$

Toto srovnáme s první nerovností. Do první nerovnosti dosadíme $-x$, dostaneme $f(-x) \geq 4^{-x}$. Víme, že

$$f(x)f(-x) = 1 \implies f(-x) = \frac{1}{f(x)} \geq 4^{-x}.$$

Také platí

$$f(x) \geq 4^x \implies 4^{-x} \geq \frac{1}{f(x)}.$$

Mohli jsme podělit $f(x)$, neboť $f(x) > 0$. Složením dvou posledních nerovností dostaneme

$$4^{-x} \geq \frac{1}{f(x)} \geq 4^{-x} \implies \frac{1}{f(x)} = 4^{-x} \implies f(x) = 4^x.$$

Pozorným pohledem zjistíme, že toto řešení vyhovuje oběma podmínkám ze zadání, a tedy to je naše jediné řešení, a tím pádem jsme hotovi.

POZNÁMKY:

Většina řešení, která přišla, byla správná. Většina úspěšných řešitelů buď úlohu vyřešila postupem podobným jako vzorové řešení, nebo postupovala uhodnutím výsledné funkce a pak sporem. Chyby u přístupu přes spor byly zpravidla dány neobecností předpisu pro funkce, které byly sporem vyloučeny. Mnozí řešitelé se pokusili argumentovat spor skrz přičítání nebo násobení konstantou či jinou podobně neobecnou transformací. Nicméně tato řešení vzhledem k nekonečnému množství možných transformací nedopadla příliš zdárně. Za uhodnutí výsledné funkce jsem vždy dal alespoň jeden bod nehledě na to, jak moc se řešení přiblížilo správnému důkazu. (Jaromír Potůček)

Úloha 5.

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že $S(3^{n+1}) \leq S(3^n)$, kde $S(a)$ značí ciferný součet čísla a .

ŘEŠENÍ:

Úlohu dokážeme sporem. Předpokládejme, že čísel n splňujících $S(3^{n+1}) \leq S(3^n)$ je konečně mnoho. Pak jistě existuje největší z nich. Označme nyní N číslo o jedna větší než toto největší číslo, pro všechna $n \geq N$ tedy musí platit $S(3^{n+1}) > S(3^n)$. Zároveň jelikož $S(3^3) \leq S(3^2)$, musí být nutně $N \geq 3$.

Všimněme si, že pro $n > 1$ platí, že $3^2 \mid 3^n$, tedy $9 \mid 3^n$. My ale víme, že ciferný součet čísla dělitelného devíti je rovněž dělitelný devíti. Můžeme si tak rozepsat $S(3^N) = 9k$ pro nějaké přirozené k . Pak $S(3^{N+1}) > 9k$ a zároveň je dělitelné devíti, tudíž $S(3^{N+1}) \geq 9(k+1)$. To lze zobecnit pro všechna čísla větší než N takto: $S(3^{N+i}) \geq 9(k+i)$, kde i je přirozené.

Ciferný součet je zároveň shora omezený devitinásobkem počtu cifer (žádná cifra nemůže být větší než 9). Všimněme si, že zvětšením exponentu n o 2 zvětšíme číslo $9 \times$, čímž mu ale můžeme přidat maximálně jednu cifru (zvětšíme ho méně než $10 \times$ a zvětšením $10 \times$ přidáme právě jednu cifru). Označíme-li c počet cifer čísla N , získáváme tak

$$9(c+1) \geq S(3^{N+2}) \geq 9(k+2)$$

a o něco obecněji

$$9(c+i) \geq S(3^{N+2i}) \geq 9(k+2i)$$

pro každé přirozené číslo i .

Pak ovšem musí platit pro všechna $i \in \mathbb{N}$:

$$9c + 9i \geq 9k + 18i$$

$$c \geq k + i.$$

Jelikož je ale c předem dané přirozené číslo, od nějakého i (například když $i = c$) přestane nerovnost platit. A tím se dostáváme do kýženého sporu.

Opravdu tedy takových n existuje nekonečně mnoho.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů se s úlohou poprala úspěšně. Někteří se dokonce odvážně pouštěli do vyjadřování počtu cifer pomocí logaritmů a jako argument používali to, jak rychle funkce rostou. Důkaz sporem převažoval, byl také o dost jednodušší pro správnou argumentaci bez nějakého máchání. Obecně jsem se snažila být hodnější a sem tam přimhouřit oko.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)

Úloha 6.

Bud' ABC trojúhelník. Necht' t_B, t_C jsou přímky, které se dotýkají kružnice opsané trojúhelníku ABC postupně v bodech B, C . Zvolme kružnici k_B se středem ležícím na t_B procházející bodem B . Podobně zvolme kružnici k_C se středem ležícím na t_C procházející bodem C . Předpokládejme, že k_B a k_C se protínají ve dvou různých bodech X a Y . Dokažte, že existuje pevný bod P nezávislý na volbě k_B a k_C takový, že body X, Y a P leží na přímce.

ŘEŠENÍ:

Bud' O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC . Ukážeme, že O je hledaný pevný bod.

Body X, Y leží na chordále¹ kružnic k_C a k_B . Chceme tedy ukázat, že O na ní leží také. K tomu nám postačí dokázat, že $p(O, k_B) = p(O, k_C)$, kde $p(A, k)$ značí mocnost bodu A ke kružnici k . Protože t_B je tečna ke kružnici opsané a střed kružnice k_B leží na t_B , je i přímka OB tečnou ke kružnici k_B a platí $p(O, k_B) = |OB|^2$, obdobně $p(O, k_C) = |OC|^2$. Jenomže OC a OB mají stejnou délku, protože O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Tedy rovnost $p(O, k_B) = p(O, k_C)$ platí, a O tudíž leží na chordále XYO .

POZNÁMKY:

Objevila se i řešení využívající analytickou geometrii. Ta byla správně, ale většinou dost pracná. Existují i lepší způsoby (například ten ve vzorovém řešení).

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

Úloha 7.

Uvažujme všechna 2025ciferná čísla, jejichž každá cifra je prvkem množiny $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Kolik z nich je dělitelných 2^{2025} ?

ŘEŠENÍ:

Je jich 3^{2025} .

Indukcí dokážeme, že n -ciferných čísel s ciframi z množiny $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, která jsou dělitelná 2^n , je 3^n . Pro $n = 1$ to platí, dělitelná dvěma jsou tři čísla 2, 4, 6. Dále předpokládáme, že to platí pro n , a dokažme to pro $n + 1$. Představme si vyhovující $(n + 1)$ -ciferné číslo $\check{C}$. Rozdělíme ho na první cifru p a zbytek z , takže ho napíšeme jako

$$\check{C} = p \cdot 10^n + z.$$

Má-li být $\check{C}$ dělitelné 2^{n+1} , musí být dělitelné i 2^n . Jelikož je 10^n také dělitelné 2^n , tak musí být i z dělitelné 2^n . Z indukčního předpokladu tedy existuje 3^n možných čísel z . Ukážeme, že před každé z nich můžeme doplnit právě tři cifry p , aby bylo výsledné číslo $\check{C}$ dělitelné 2^{n+1} .

Zapišeme-li z jako $k \cdot 2^n$, můžeme $\check{C}$ rozepsat jako

$$\check{C} = p \cdot 10^n + k \cdot 2^n = (p \cdot 5^n + k) \cdot 2^n.$$

Vidíme, že $\check{C}$ bude dělitelné 2^{n+1} , právě když bude $p \cdot 5^n + k$ sudé. Čili pokud je k liché, budou vyhovovat lichá p , tedy 3, 5, 7; naopak pokud je k sudé, budou vyhovovat sudá p , tedy 2, 4, 6. V obou případech můžeme před číslo z přidat právě tři cifry, aby byl výsledek dělitelný 2^n , takže je-li 3^n možností volby n -ciferného čísla z , je 3^{n+1} možností volby $(n + 1)$ -ciferného čísla $\check{C}$.

¹Pokud pojem chordála nebo mocnost vidíš poprvé, doporučujeme se podívat na tento příspěvek <https://prase.cz/library/MocnostACHordalyJT/MocnostACHordalyJT.pdf>

POZNÁMKY:

Kamenem úrazu bylo napsat, že když odebereme první cifru čísla dělitelného 2^{n+1} , bude zbytek dělitelný 2^n , a že tedy můžeme indukovat. Většina řešitelů to nejspíš věděla, přesto to asi polovina nenapsala do řešení. Body jsem nestrhával, pokud tam byly nějaké, byť nejasné, kroky v tom směru, ale bylo to na hraně.

Jinak si myslím, že byla úloha spíš lehká, minimálně v tom, že většina řešitelů přišla na lehké řešení, než znali orgové (a toto lehké řešení uvádíme jako vzorové). (Matouš Šafránek)

Úloha 8.

Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{2n+1-k}{k+1} \right)^k \leq 2^n.$$

ŘEŠENÍ PODLE JAKUBA TRČKY:

Ukážeme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ je $\left(\frac{2n+1-k}{k+1} \right)^k \leq \binom{n}{k}$. Pak totiž sečtením těchto nerovností pro přípustná k bude

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{2n+1-k}{k+1} \right)^k \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n,$$

jak je známo z binomické věty. Dokažme nejdříve dvě pomocné nerovnosti:

Lemma. Pro x, y kladná reálná je $\frac{(x+1)(y+1)}{(x+y+2)^2} \geq \frac{xy}{(x+y)^2}$.

Důkaz. Roznásobením a přičtením $4xy$ k $(x-y)^2 \geq 0$ dostaneme $(x+y)^2 \geq 4xy$, načež z kladnosti $x+y+1$ je $(x+y)^2(x+y+1) \geq 4xy(x+y+1)$. Tudíž

$$\begin{aligned} xy(x+y+2)^2 &= xy((x+y)^2 + 4(x+y) + 4) = xy(x+y)^2 + 4xy(x+y+1) \leq \\ &\leq xy(x+y)^2 + (x+y)^2(x+y+1) = (x+y)^2(x+1)(y+1). \end{aligned}$$

Odtud již podělením kladnými $(x+y)^2$ a $(x+y+2)^2$ obdržíme dokazovanou nerovnost. □

Lemma. Necht' $n > m$ jsou přirozená. Pak

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{(2n-m+1)^m} \geq \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-m)}{(2n-m-1)^m}.$$

Důkaz. Z technických důvodů si umocníme levou stranu dokazované nerovnosti na druhou – tím zajistíme, že počet činitelů v čitateli i jmenovateli je sudý. Proto můžeme párovat

$$\frac{n^2(n-1)^2 \cdots (n-m+1)^2}{(2n-m+1)^{2m}} = \frac{n(n-m+1)}{(2n-m+1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n-m+2)}{(2n-m+1)^2} \cdots \frac{(n-m+1)n}{(2n-m+1)^2}.$$

Všimněme si, že součet činitelů čitatele libovolného jednoho zlomku je roven $2n-m+1$, přesně hodnotě čtvercované ve jmenovateli těchto zlomků. Zároveň všichni činitelé jsou větší než jedna díky předpokladu $n > m \geq 1$

a jsme tedy oprávněni m -krát využít předchozí lemma, čímž dostáváme

$$\frac{n^2(n-1)^2 \cdots (n-m+1)^2}{(2n-m+1)^{2m}} \geq \frac{(n-1)(n-m)}{(2n-m-1)^2} \cdot \frac{(n-2)(n-m+1)}{(2n-m-1)^2} \cdots \frac{(n-m)(n-1)}{(2n-m-1)^2}.$$

Opětovným popárováním činitelů na pravé straně obdržíme

$$\frac{n^2(n-1)^2 \cdots (n-m+1)^2}{(2n-m+1)^{2m}} \geq \frac{(n-1)^2(n-2)^2 \cdots (n-m)^2}{(2n-m-1)^{2m}}$$

a odmocněním dostaneme hledanou nerovnost – to lze, neboť obě strany dokazované nerovnosti jsou kladné díky předpokladu $n > m > 0$. $\square$

Zvolme nyní pevně n přirozené a $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Pokud $k = 0$, pak

$$\left(\frac{2n+1-k}{k+1} \right)^k = (2n+1)^0 = 1 = \binom{n}{0}.$$

Buď nyní k nenulové. Potom opakovaným použitím předchozího lemmatu je

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{(2n+1-k)^k} \geq \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-k)}{(2n-1-k)^k} \geq \dots \geq \frac{k(k-1) \cdots 1}{(k+1)^k} = \frac{k!}{(k+1)^k},$$

načež pronásobením vhodnými kladnými čísly obdržíme

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \geq \left(\frac{2n+1-k}{k+1} \right)^k,$$

jak jsme chtěli ukázat.

POZNÁMKY:

Všechna správná řešení dokazovala více či méně podobnými postupy klíčovou nerovnost s kombinačním číslem – postupy pracující přímo s 2^n úlohu nedořešily. (Matěj Gajdoš)