# Finální myš-maš

4. jarní série Termín odeslání: 6. května 2024

*V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!*

Úloha 1.

**(a)** Michal a Samo byli na IMO v Japonsku a sledovali tam turnaj zápasníků sumo. Účastnilo se $n \geq 2$ zápasníků a zápasil každý s každým. Michal bohužel přišel pozdě, a tak neviděl jednotlivé zápasy, věděl pouze, kolikrát který zápasník vyhrál. Samo mu nechce prozradit, jak jednotlivé zápasy dopadly. Michal si ale o každém zápase může tipnout, kdo vyhrál, načež mu Samo poví, jestli si tipnul správně. Dokažte, že se Michal dokáže postupně zeptat na všechny zápasy a u více než poloviny správně uhodnout vítěze. (2 body)

**(b)** José vybírá ve čtvercové mřížce $2023 \times 2024$ dva mřížové body $A$ a $B$. Řekneme, že dva mřížové body $X$ a $Y$ jsou *propojené*, pokud jeden umíme zobrazit na druhý složením několika středových souměrností se středem v $A$ nebo v $B$. Množinu mřížových bodů nazveme *veselou*, pokud jsou každé dva body v ní propojené a nelze k ní žádný mřížový bod přidat, aby to stále byla pravda. Nakonec José vybral body $A$ a $B$ tak, aby existovalo co nejméně veselých množin. Kolik jich je? (3 body)

Úloha 2.

**(a)** Pomozte Vaškovi nalézt polyomino složené z dvaceti čtverečků, které lze rozdělit na pět shodných polyomin, ale nelze jej rozdělit na deset shodných polyomin. (2 body)

**(b)** Je dáno prvočíslo $p$. Rozhodněte, zda může dělitelnost $n + p + 1 \mid n^3 + np + 1$ být splněna pro přesně 2024 přirozených čísel $n$. (3 body)

Úloha 3.

**(a)** Mezi rameny úhlu $XOY$ jsou vepsány kružnice $\alpha$ a $\beta$. Kružnice $\alpha$ se dotýká polopřímek $OX$ a $OY$ po řadě v bodech $A_1$ a $A_2$ a kružnice $\beta$ se $OX$ a $OY$ dotýká po řadě v bodech $B_1$ a $B_2$. Dokažte, že čtyřúhelníku $A_1A_2B_2B_1$ lze vepsat kružnici právě tehdy, pokud se $\alpha$ dotýká $\beta$. (2 body)

**(b)** Je dán trojúhelník $ABC$, jehož obvod má délku 1. Kružnice $\omega$ se dotýká strany $BC$ a také polopřímek opačných k polopřímkám $BA$, $CA$ po řadě v bodech $P$, $Q$. Přímka procházející středy stran $AB$, $AC$ protíná kružnici opsanou trojúhelníku $APQ$ v bodech $X$, $Y$. Určete $|XY|$. (3 body)

Úloha 4.

**(a)** Je dáno přirozené číslo $n$. Dokažte, že pro každé reálné $x$ platí

$$x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots + x^2 - x + 1 > \frac{1}{2}.$$

(2 body)

**(b)** Jsou dána $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že lze zvolit $a, b \in \mathbb{Z}$ taková, že

$$\left(x + a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 \leq \frac{1}{3}.$$

(3 BODY)

ÚLOHA 5.

**(a)** Přirozená čísla jsou rozdělena do konečně mnoha aritmetických posloupností tak, že každé číslo je právě v jedné z těchto posloupností. Dokažte, že pro jednu z posloupností platí, že její první člen je dělitelný její diferencí. (2 BODY)

**(b)** Rozhodněte, zda existuje 2023 nekonečných rostoucích aritmetických posloupností přirozených čísel splňujících následující tři podmínky:

(1) Existuje nejvýše konečně mnoho přirozených čísel, která nejsou v žádné z nich.
(2) Neexistuje číslo, které by bylo ve dvou z nich.
(3) V každé z nich je alespoň jedno provočíslo větší než 2023.

(3 BODY)

ÚLOHA 6.

**(a)** Na PraSečím jarním výletě se sešlo deset lidí. Každý z nich má na tomto výletě právě tři kamarády[1]. Mohlo se stát, že se každý výletník s kterýmkoliv jiným výletníkem buď kamarádí, nebo mají společného kamaráda? (2 BODY)

**(b)** Je dán trojúhelník $ABC$ s pravým úhlem u vrcholu $A$. Patu výšky z vrcholu $A$ označíme $P$. Na stranách $AB$ a $AC$ leží postupně body $E$ a $F$ tak, že $|\sphericalangle BPE| = |\sphericalangle CPF| = 45°$. Středy úseček $PE$ a $PF$ postupně označíme $M$ a $N$. Dokažte, že průsečík přímek $BM$ a $CN$ leží na ose úhlu $BAC$. (3 BODY)

ÚLOHA 7.

**(a)** Rozhodněte, zda lze čísla $1, 2, \ldots, 20$ spárovat tak, aby každá dvojice dávala v součtu prvočíslo a aby těchto deset prvočísel bylo navzájem různých. (2 BODY)

**(b)** Na Matfyzu studuje $n$ matfyzáků, navíc někteří matfyzáci jsou navzájem kamarádi. Anička si všimla, že pokud se nějací dva matfyzáci kamarádí, pak nemají žádného společného kamaráda. Naopak pokud se nějací dva matfyzáci nekamarádí, pak mají právě dva společné kamarády. Dokažte, že všichni matfyzáci mají stejný počet kamarádů. (3 BODY)

[1] Kamarádství je vzájemné.