# Doteky

3. PODZIMNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. PROSINCE 2023

**ÚLOHA 1.** (3 BODY)

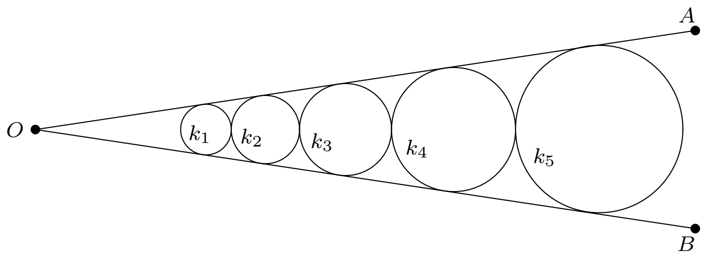
Mějme dvě kružnice o poloměrech 5 a 17. Vzdálenost jejich středů je 20. Uvažme přímku, která je jejich společnou tečnou a dotýká se jedné kružnice v bodě $A$ a druhé v bodě $B$. Jaká je délka úsečky $AB$?

**ÚLOHA 2.** (3 BODY)

Daník by rád do roviny nakreslil nějaký konečný počet růžových kružnic tak, aby každá z nich měla vnější dotyk s právě čtyřmi dalšími růžovými kružnicemi. Rozhodněte, zda se mu to může povést.

**ÚLOHA 3.** (3 BODY)

Mezi rameny úhlu $AOB$ leží pět kružnic $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$, $k_5$ tak, že se každá z nich dotýká obou polopřímek $OA$, $OB$, a navíc má $k_i$ vnější dotyk s $k_{i+1}$ pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Víte-li, že poloměr $k_1$ je 8 a poloměr $k_5$ je 18, určete poloměr $k_3$.




**ÚLOHA 4.** (5 BODŮ)

Je dán trojúhelník $ABC$, pro který platí $|AC| > |AB|$. Tečny k jeho kružnici opsané v bodech $A$ a $B$ se protínají v bodě $T$. Osa strany $BC$ protíná stranu $AC$ v bodě $S$. Dokažte, že přímka $ST$ je rovnoběžná s $BC$.

**ÚLOHA 5.** (5 BODŮ)

Je dán rovnoběžník $ABCD$. Výšky trojúhelníku $ABD$ se protínají v bodě $H$ a kružnice $k$ se středem v $H$ prochází bodem $C$. Dokažte, že se $k$ dotýká kružnice opsané trojúhelníku $ABH$.

**ÚLOHA 6.** (5 BODŮ)

Kružnice $\omega_1$ a $\omega_2$ se protínají v bodech $A$ a $B$. Tečny v bodě $A$ k $\omega_1$ a $\omega_2$ postupně označíme $\ell_1$ a $\ell_2$. Kolmice z $B$ na $\ell_1$, $\ell_2$ postupně protínají $\omega_2$, $\omega_1$ v bodech $X$ a $Y$ různých od $B$. Dokažte, že $X$, $Y$ a $A$ leží na jedné přímce.

**ÚLOHA 7.** (5 BODŮ)

V kosočtverci $ABCD$ se kružnice vepsaná $\Omega$ dotýká stran $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ po řadě v bodech $E$, $F$, $G$, $H$. Dále nechť je $\omega_1$ kružnice, jež se dotýká $\Omega$ v bodě $T_1$ a stran $AD$, $AB$ po řadě v $P_1$, $Q_1$. Obdobně nechť je $\omega_2$ kružnice dotýkající se $\Omega$ v $T_2$ a stran $BC$, $BA$ po řadě v $P_2$, $Q_2$. Dokažte, že přímky $P_1Q_1$, $P_2Q_2$, $GF$, $GH$ vytínají v rovině čtverec.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Na kružnici $k$ leží bod $A$ a uvnitř ní bod $M$. Zvolme přímku $\ell$ procházející bodem $M$ a označme průsečíky $\ell$ s $k$ jako $B$, $C$. Dokažte, že se kružnice procházející středy stran trojúhelníku $ABC$ (tzv. *Feuerbachova kružnice*) dotýká pevné kružnice, která nezávisí na konkrétní volbě přímky $\ell$.