Páry a párování

3. jarní série Termín odeslání: 8. dubna 2024

Úloha 1. (3 body)

Ukažte, že čísla $1, 2, \ldots, 10$ lze spárovat tak, aby každá dvojice dávala v součtu prvočíslo a aby těchto pět prvočísel bylo navzájem různých.

Úloha 2. (3 body)

Majda vzala čísla $0, 1, 2, \ldots, 301$ a rozdělila je do párů. Čísla v každé dvojici sečetla a všechny tyto součty vynásobila. Rozhodněte, zda mohla čísla rozdělit tak, aby na konci dostala patnáctou mocninu nějakého celého čísla.

Úloha 3. (3 body)

Áďa a Ben hrají hru na nekonečné čtvercové tabulce. Áďa si nejprve zvolí přirozené číslo n a následně v tabulce pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označí dvě políčka číslem i. Žádné políčko neoznačí dvakrát, ve výsledku tedy bude označeno $2n$ políček. Benovým úkolem je zvolit si některou dvojici stejně označených políček a *projít* mezi nimi. Tím se myslí, že má Ben dojít z jednoho políčka dvojice na druhé, přičemž v každém kroku smí přejít jen mezi políčky sousedícími stranou, a navíc kromě startu a cíle nesmí stoupnout na žádné označené políčko. Rozhodněte, zda Áďa může označit políčka tak, aby Ben nedovedl projít mezi žádnou z označených dvojic.

Úloha 4. (5 bodů)

Naty vlastní balíček n navzájem různých karet, na každé z nich je vykresleno n různých symbolů. Navíc každé dvě různé karty sdílí právě jeden symbol. Určete, kolik nejméně různých symbolů se může nacházet v celém balíčku.

Úloha 5. (5 bodů)

Na matfyzáckém plese se veselí n matfyzáků a m matfyzaček, kde n, m jsou přirozená čísla. Víme, že každá matfyzačka tančila alespoň s jedním matfyzákem a že žádný matfyzák netančil se všemi matfyzačkami. Dokažte, že existují matfyzáci a, b a matfyzačky α, β takové, že a tančil s α a b tančil s β, ale a netančil s β a b netančil s α.

Úloha 6. (5 bodů)

V PraSestánu žije několik svobodných mužů, z nichž někteří jsou zrzci, a několik svobodných žen, z nichž některé jsou blondýnky. Někteří lidé se navzájem znají a jiní ne. Dohazovač Kecal tvrdí, že dovede naplánovat několik svateb tak, aby se každý zrzek oženil se ženou, kterou zná. Jeho kolegyně Kecalka zase tvrdí, že dovede naplánovat několik svateb tak, aby se každá blondýnka provdala za muže, kterého zná.[1] Dokažte, že potom už lze naplánovat svatby tak, aby se každý zrzek oženil se ženou, kterou zná, a zároveň se každá blondýnka provdala za muže, kterého zná.

[1] V Kecalově ani Kecalčině plánu se nemusí oženit všichni svobodní muži ani se nemusí provdat všechny svobodné ženy.

Úloha 7. (5 bodů)

Najděte všechny dvojice celých čísel (a, b), pro které existují funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$f(g(x)) = x + a \qquad \text{a} \qquad g(f(x)) = x + b$$

pro každé $x \in \mathbb{Z}$.

Úloha 8. (5 bodů)

Klárka a Miško hrají hru. Miško položí v nějakém pořadí $2n$ levých a $2n$ pravých rukavic do řady. Pak se Klárka a Miško střídají v tazích, Klárka začíná. V každém tahu si hráč vezme rukavici z některého konce řady, přičemž hra skončí, když dojdou rukavice. Klárka vyhraje, pokud získá přesně n pravých a n levých rukavic, jinak vyhraje Miško. Rozhodněte, jestli může Klárka vyhrát nehledě na to, jak hraje Miško.