

# Kamarádi

2. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. BŘEZNA 2024

*Pokud se s kamarády v kontextu geometrie setkáváš poprvé, představí Ti je úvodní text k této sérii.<sup>1</sup>*

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Na soustředění přijelo 24 účastníků, z nichž jedna byla Lenka. Někteří účastníci spolu už kamarádili, jiní ještě ne, přičemž kamarádství je vzájemné. Lenka seřadila ostatních 23 účastníků do řady tak, že  $n$ -tý účastník se na soustředění kamarádí s právě  $n$  účastníky. S kolika účastníky se kamarádí Lenka?

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Pět kamarádů v podobě bodů si hraje na schovávanou ve čtverci o rozměrech  $10 \times 10$ , v němž je umístěno pět překážek. Jedna má tvar kruhu se středem uprostřed čtverce a zbylé čtyři jsou čtvrtkruhy se středy v každém z rohů čtverce. Všechny překážky mají poloměr 3. Čtyři kamarádi se schovávají, pátý je hledá. Poradte jim, jak se schovat, aby pátý kamarád viděl nejvýše jednoho z nich, ať už si ve čtverci stoupne kamkoli.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Na Matfyz přišlo zkuškové. Všech  $1 + 2 + \dots + n$  studentů bude skládat zkoušky v  $n$  učebnách, do kterých se vejde po řadě 1, 2,  $\dots$ ,  $n$  studentů. Zkuškové má následující pravidla:

- Na začátku zkuškového nejsou žádní dva studenti kamarádi.
- Každý den zkuškového musí každý student skládat zkoušku v některé z učeben.
- Kdykoliv dva studenti složí zkoušku ve stejné učebně, stanou se po jejím skončení už po celý zbytek zkuškového kamarády.
- Z příkazu děkana je přísně zakázáno, aby dva studenti, kteří již jsou kamarády, skládali zkoušku ve stejné učebně.
- Jakmile v další den nelze studenty rozmístit do učeben tak, aby složili další zkoušku, zkuškové skončí.

V závislosti na  $n$  určete, kolik dní může zkuškové nejdéle trvat.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

V rovině je dán trojúhelník  $ABC$ . Bod  $B'$  vznikne překlopením  $B$  přes přímkou  $AC$ , zatímco  $C'$  vznikne překlopením  $C$  přes přímkou  $AB$ . Dokažte, že průsečík  $B'C$  s  $C'B$  leží na jedné přímce s vrcholem  $A$  a středem kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$ .

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Klárka chová  $n$  prasátek, z nichž každá dvě jsou buď vzájemně kamarádi, nebo vzájemně nepřátelé. Každé prasátko má přesně 2024 nepřátel. Navíc pro každé prasátko platí, že nepřítel jeho kamaráda je také jeho nepřítel. Určete všechny možné hodnoty  $n$ .

---

<sup>1</sup><https://prase.cz/commentary/C/serie2j/uvod2j.pdf>

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

Uvažme v trojúhelníku  $ABC$  kamarády  $P, Q$  splňující  $|AP| = |AQ|$ . Dokažte, že  $B, C, P, Q$  leží na kružnici.

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Je dán trojúhelník  $ABC$ , uvnitř kterého leží bod  $F$  splňující  $|\sphericalangle BFC| = |\sphericalangle CFA| = |\sphericalangle AFB|$ . Dokažte, že se přímky, které dostaneme zobrazením přímk  $AF, BF, CF$  po řadě v osových souměrnostech dle přímk  $BC, AC, AB$ , protnou v jednom bodě.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Nechť je  $H$  ortocentrum ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  s kružnicí opsanou  $\omega$ . Body  $E$  a  $F$  leží postupně na stranách  $AB$  a  $AC$  tak, že  $AEHF$  je rovnoběžník. Přímka  $EF$  protne  $\omega$  v bodech  $X$  a  $Y$ . Označme jako  $Z$  ten bod, pro nějž je úsečka  $AZ$  průměrem  $\omega$ . Dokažte, že  $H$  je ortocentrum trojúhelníku  $XYZ$ .