Analytická geometrie I

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. PROSINCE 2023

Úlohy této série jsou řazeny podle obtížnosti, nikoliv nutně podle pořadí témat v seriálu.

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Dokažte, že pro každý tětivový čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|AB| \cdot |DA| + |BC| \cdot |CD|}{|AB| \cdot |BC| + |DA| \cdot |CD|}.$$

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Buďte ω_1 a ω_2 kružnice, které mají vnitřní dotyk v bodě A, přičemž ω_2 leží uvnitř ω_1. Zvolme tětivu BC kružnice ω_1, která se dotýká kružnice ω_2. Dokažte, že poměr délky úsečky BC a obvodu trojúhelníka ABC nezávisí na volbě tětivy BC.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Na straně BC obdélníka $ABCD$ leží bod P takový, že $|\sphericalangle APD| = 90^\circ$. Na přímce AD mimo úsečku AD leží body Q a R takové, že $|AQ| = |BP|$ a $|DR| = |CP|$. Kružnice k prochází body Q, D a středem kružnice opsané trojúhelníka DPQ. Obdobně kružnice ℓ prochází body A, R a středem kružnice opsané trojúhelníka APR. Dokažte, že jedna z kružnic, které se dotýkají přímky AD a kružnic k a ℓ, má poloměr $2 \cdot |AB|$.