

# UFO

1. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 30. ZÁŘÍ 2024

ÚLOHA 1. (3 BODY)  
Terka si do roviny kreslí plánek kolonizace Marsu. Nejprve si do plánku umístí 6 triangulačních bodů a následně každý s každým propojí úsečkou. Poradte Terce, jak body rozmístit, aby po propojení vzniklo právě 17 nedegenerovaných trojúhelníků s vrcholy v triangulačních bodech.

ÚLOHA 2. (3 BODY)  
Z hlubin vesmíru doputovala na Zemi následující zpráva:

$$1 \square 2 \square 3 \square \dots \square 4320 \square 4321.$$

Dopište do ní znaménka  $+$  nebo  $-$  tak, aby výsledná hodnota byla co nejmenší kladná.

ÚLOHA 3. (3 BODY)  
Miško se ocitl na vesmírném parkovišti tvaru tabulky  $4 \times 4$ . V každém z jeho šestnácti sektorů parkoval nezáporný počet létajících talířů. Miško spočítal, kolik talířů se nacházelo v každém řádku a každém sloupci a vyšly mu samé mocniny dvojky. Dokažte, že se nemohlo jednat o osm různých mocnin dvojky.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)  
Naty si vybrala přirozené číslo  $n$  a následně si vypsala všechna  $n$ -písmenná slova<sup>1</sup> složená z písmen  $U$ ,  $F$  a  $O$ . Dokažte, že těch, v nichž se každé z podslov  $UF$  a  $UO$  vyskytuje suděkrát, je mezi vypsány slovy ostře více než těch, v nichž se každé z těchto podslov vyskytuje líšekrát.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)  
Luxusní čtvrť na Marsu tvoří  $(2m + 1) \times (2n + 1)$  čtvercových parcel. Na každé parcele stojí vila, kterou obývá jeden Marťan. Každý Marťan má buď červenou, nebo zelenou barvu. *Hlavní barvou řádku (resp. sloupce)* rozumíme barvu Marťanů, která je v řádku (resp. sloupci) zastoupena v nadpoloviční většině. Dokažte, že alespoň  $m + n + 1$  Marťanů má hlavní barvu svého řádku i svého sloupce.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)  
Na poli se záhadně objevily kružnice  $k$  a  $l$  se stejným poloměrem. Protínají se v bodech  $A$  a  $B$ . Přímka procházející bodem  $A$  protíná  $k$  a  $l$  postupně v bodech  $C$  a  $D$ . Kolmice z  $B$  na přímkou  $CD$  protíná  $k$  a  $l$  postupně v bodech  $E$  a  $F$ . Dokažte, že  $CEDF$  je rovnoběžník.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)  
Kuba objevuje mimozemskou kulturu. Dozvěděl se, že jsou pro ni posvátná čísla  $x$ ,  $p$ ,  $n$ , ale nikdo mu nechce říct, jaká čísla to jsou. Ví jenom, že  $x$  je celé číslo,  $p$  je prvočíslo a  $n$  je přirozené číslo a že splňují vztah  $x^3 + x^2 + x + 1 = p^n$ . Pomozte Kubovi najít všechny možné takové trojice.

---

<sup>1</sup>Za *slovo* považujeme jakoukoliv posloupnost písmen. *Podslovem* pak rozumíme úsek několika po sobě jdoucích písmen v daném slově.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Čtyřúhelník  $ABCD$  je vepsán do kružnice  $\omega$ . Bod  $M$  nazveme *neidentifikovaným létajícím*, pokud  $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|MD|}{|MC|}$ . Dokaž, že existují čtyři neidentifikované létající body ležící na  $\omega$  takové, že čtyřúhelník, který tvoří, má kolmé úhlopříčky.