Posloupnosti

1. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. ÚNORA 2024

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Vítek vzpomíná na uplynulý rok. Na tabuli by chtěl napsat posloupnost 1012 přirozených čísel se součtem 2023. Trpí však bytostnou hrůzou z čísla 3. Chce proto napsat takovou posloupnost, v níž navíc žádný úsek několika po sobě jdoucích čísel nebude mít součet 3. Poraďte mu nějakou takovou posloupnost.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Káťa si píše posloupnost přirozených čísel následovně: začne členem $a_1 = 1$ a následně vždy zvolí za a_{n+1} to nejmenší přirozené číslo takové, aby

$$\operatorname{nsn}(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) > \operatorname{nsn}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Určete všechna přirozená čísla, která se v posloupnosti vyskytnou.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Áďa má posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou různých reálných čísel. Víme, že i-tý prvek této posloupnosti je obsažen v souvislé monotónní[1] podposloupnosti délky alespoň $i + 1$. Dokažte, že posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je od jistého členu monotónní.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Arcimág Radeček dostal pod stromeček nekonečnou sadu závažíček. Sada obsahuje závažíčka o kladných lichých celočíselných vahách, přičemž každé číslo je zastoupeno právě jednou. Potom si napsal posloupnost a_2, a_3, …, kde a_n je počet způsobů, jak může Radeček ze svých závažíček poskládat váhu n. Dokažte, že tato posloupnost je neklesající.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Venďa zkoumá posloupnost racionálních čísel zadanou členem $v_1 = 2024$ a předpisem

$$v_{n+1} = v_n + \frac{2}{v_n}$$

pro všechna $n \geq 1$. Dokažte, že Venďa nedovede žádné v_n zapsat jako druhou mocninu racionálního čísla.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Rozhodněte, zdali existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

pro každé přirozené n.

[1] Posloupnost je *monotónní*, pokud je celá rostoucí nebo celá klesající.

Úloha 7. (5 bodů)

Petr a Miško našli arcimágovu knihu s postupem výroby čarovné posloupnosti $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$: „Začněte s libovolnými přirozenými čísly jako prvními dvěma členy F_1, F_2, pak pro $n > 2$ počítejte a zapisujte $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$."

Petr si zvolil čísla $F_1 = 1$ a $F_2 = 2$, zatímco Miško si zvolil $F_1 = 2$, $F_2 = 1$ a pak každý popsal svojí posloupností celý svůj nekonečný pergamen. Určete, která čísla se vyskytla na obou pergamenech (ne nutně na stejné pozici v posloupnosti).

Úloha 8. (5 bodů)

Pro přirozené číslo $c > 1$ zaveďme posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocí $x_1 = c$ a předpisu

$$x_{n+1} = c \cdot x_n + \sqrt{c^2 - 1} \cdot \sqrt{x_n^2 - 1}$$

pro všechna n. Dokažte, že každé x_n je celé číslo.