Analytická geometrie III – Vážení bodů

„Keď dojde zásoba trikov, mlátím to barycentrikou.“ – Hymna *i*KS

Vážený a milý příteli,
vítáme Tě u posledního dílu PraSečího seriálu na analytickou geometrii. I v tomto díle se budeme zabývat souřadnicemi, tentokrát ale souřadné osy x a y nahradí strany trojúhelníka ABC. Oprávněně se ptáš – proč, proboha, proč?

Takové souřadnice nabízejí spoustu výhod při řešení konfigurací svázaných s trojúhelníkem – mnoho je toho spojeno s přímkami. Body na stranách trojúhelníka můžeme uchopit velmi dobře, jelikož si ukážeme, že jsou to pouze vhodně navážené vrcholy. To ale není vše! V minulém díle jsme obecně rovnici přímky neměli a protínání přímek bylo takové kostrbaté, zatímco objekty jako kružnice či kolmice byly velmi přirozené. Barycentrické souřadnice nabízí v podstatě opačné výhody – kružnice nemají ani zdaleka tak jednoduchý tvar, kolmice jakbysmet. Je-li ale jedna věc, ve které tyto souřadnice dostanou za jedna, jsou to jednoznačně přímky a obsahy.

Vážení bodů a těžiště

Typicky se pro zavedení barycentrických souřadnic využívá vektorová definice. My ale vektory zcela vypustíme.

Definujeme na bodech operace sčítání a odčítání, a následně násobení a dělení reálným číslem. Operace provádíme po složkách (souřadnicích), tedy na chlup stejně jako u komplexních čísel – jen jsme vrátili velikost písmenek, místo $a + b$ budeme psát $A + B$.

Rozdíl mezi vektory a komplexními čísly je násobení. U vektorů se zavádí skalární součin, jehož výsledkem je reálné číslo (ne tedy vektor nebo bod). Zavedení skalárního součinu přeskočíme. Pokud ho nezavedeme, neodchýlíme se nijak od definice komplexních čísel a budeme moct (poněkud netradičně) ve vhodné chvíli počítat s body jako s komplexními čísly a pomocí toho dokázat tvrzení. Mimo důkazy však v tomto díle komplexní čísla nebudeme potřebovat.

Teď se už bez dalšího zdržování vydáme na cestu vážení.

Definice 1. *Těžiště* bodů $A_1, A_2, \dots, A_n$ s hmotnostmi[1] $m_1, m_2, \dots, m_n$, jejichž součet není nula, je bod

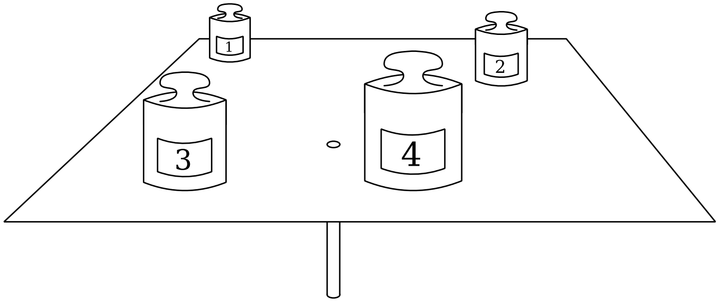
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Příklad 2. Mějme body A, B, C s hmotnostmi 1. Jejich těžiště je pak $\frac{1 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C}{1+1+1} = \frac{A+B+C}{3}$, což je podle předchozího dílu skutečně těžiště trojúhelníka ABC.

Cvičení 3. Urči souřadnice těžiště bodů $A = (2, 5)$ s vahou 1, $B = (1, 2)$ s vahou 2 a $C = (6, 3)$ s vahou 4.

[1] Nebo také vahami.

Poznámka 4. Pokud bychom na pevnou nehmotnou desku umístili bodová závaží s příslušnými hmotnostmi, tak by těžiště opravdu bylo v tomto bodě, čili bychom desku mohli vyvážit na prstě v těžišti. To nám poskytuje dobrou intuici. Například je-li jeden bod výrazně těžší než ostatní, bude těžiště blízko něj.



Pozorování 5. *Poloha těžiště nezávisí na tom, jak si zavedeme souřadnice.*

Jelikož je těžiště definováno souřadnicově, nemusí to být hned jasné. Nebudeme to tu však dokazovat. Vtip je v tom, že výraz dělíme součtem vah. Rozmysli si, že když třeba posuneme osu y o 1 doleva a x-ová souřadnice každého bodu se tak o 1 zvětší, zvětší se přesně o 1 i x-ová souřadnice těžiště. To znamená, že když jsme takto změnili souřadnice, zůstalo těžiště v rovině na stejném místě. Můžeš z toho snadno vyvodit, že nezáleží na tom, kam posuneme počátek soustavy souřadnic. Ovšem rozmyslet si, že nezáleží na tom, jak otočíme a naškálujeme osy, už je těžší.

Dále se podíváme na základní vlastnosti.

Například nezáleží na bodech s nulovou hmotností. Pokud má bod hmotnost nula, jako by nebyl. Pokud máme dva hmotné body na jednom místě, je to stejné, jako by tam byl jeden bod s jejich celkovou hmotností.

Všimněme si, že záleží jen na poměru hmotností. Pokud všechny hmotnosti vynásobíme jedním číslem, těžiště se nezmění. Konkrétně pokud je součet hmotností $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 1$, pak jmenovatel zmizí a těžiště je dáno vztahem $m_1A_1 + m_2A_2 + \cdots + m_nA_n$. Pokud mají váhy součet 1, říkáme, že jsou *normované*. Později v seriálu tuto podmínku budeme často vyžadovat.

Podobného efektu mimochodem také dosáhneme, pokud si dáme do těžiště počátek soustavy souřadnic, kteréhožto triku sis mohl(a) všimnout v minulém díle. Pak platí rovnou

$$m_1A_1 + m_2A_2 + \cdots + m_nA_n = (0, 0).$$

Zmínili jsme, že těžiště nezáleží na souřadnicích. Jak ho tedy najít bez jejich použití? Těžiště jednoho bodu je zjevně bod sám, no a dál ...

Těžiště dvou bodů

Tvrzení 6. *Pokud jsou A, B dva body s hmotnostmi m_A, m_B, pak je jejich těžiště právě ten bod na přímce AB, který splňuje*

$$\frac{AT}{TB} = \frac{m_B}{m_A},$$

kde AT, TB jsou orientované vzdálenosti.

Poměry jsou převrácené – pokud je A výrazně těžší než B, je těžiště blízko A.

Důkaz. Umístíme osu x tak, aby procházela body A, B. Můžeme ověřit, že jejich těžiště nehledě na váhy také leží na ose x (má nulovou souřadnici y). Umístíme tedy ještě počátek soustavy souřadnic do těžiště. Pak platí

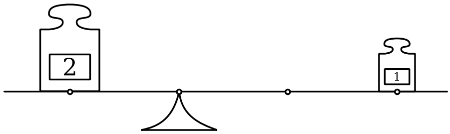
$$m_AA + m_BB = (0, 0) = T.$$

Poté je x-ová souřadnice bodu na ose x jeho orientovaná vzdálenost od počátku, tedy od T. Když se podíváme jen na x-ovou složku vzorce, dostaneme $m_A \cdot TA + m_B \cdot TB = 0$, což upravíme na

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{-TA}{TB} = \frac{AT}{TB}.$$

Hodnota poměru $\frac{AT}{TB}$ už zároveň jednoznačně určuje polohu bodu T na přímce AB. □

Poznámka 7. Toto tvrzení je přesně zákon páky z fyziky.



Pokud budeme požadovat součet hmotností 1, abychom mohli vynechat jmenovatele, dá se vzorec těžiště dvou bodů zapsat jako $tB + (1 - t)A$ pro nějaké reálné t. V téhle podobě vzorec uvidíš nejčastěji. Dá se taky zapsat „vektorově“ jako $A + t(B - A)$ nebo $A + t \cdot \overrightarrow{AB}$. Parametr t značí, v jakém podílu cesty (úsečky) z A do B se těžiště nachází. Například nachází-li se těžiště v polovině cesty, dosadíme $t = \frac{1}{2}$ a dostaneme vskutku vzorec pro střed $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Nachází-li se za celou cestou, dosadíme $t = 1$ a dostaneme B, konec cesty. Shrnuje to následující tvrzení.

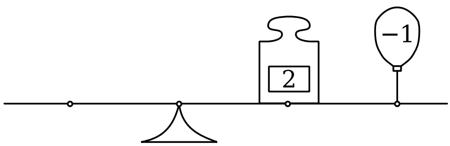
Tvrzení 8. *Mějme těžiště $T = tB + (1-t)A$. Pak je T právě ten bod na přímce AB, který splňuje*

$$\frac{AT}{AB} = t.$$

Důkaz. Podle předchozího tvrzení 6 platí $\frac{AT}{TB} = \frac{t}{1-t}$ neboli $(1 - t)AT = t \cdot TB$. Rozepíšeme $t \cdot TB = t \cdot (TA + AB) = t \cdot (-AT + AB)$ a přičteme k oběma stranám $t \cdot AT$, čímž získáme $AT = t \cdot AB$. □

Jestli čteš pozorně, máš už možná podezření… nikdo neřekl, že hmotnost nesmí být záporná! Délky AT a TB ve tvrzení 6 bereme orientovaně. Pokud jsou obě hmotnosti kladné, má AT a TB stejné znaménko, takže leží T na úsečce AB. Pokud jsou obě hmotnosti záporné, vyjde to stejně, jako by byly obě kladné, protože záleží jen na poměru. Pokud je ale jedna kladná a jedna záporná, mají AT a TB opačná znaménka, takže leží T mimo úsečku AB, za tím bodem, který má vyšší absolutní hmotnost (těžiště tedy leží blíž těžšímu bodu). Z minulého dílu víme, že překlopení bodu B přes bod A je $2A - B$, je to tedy těžiště pro A o hmotnosti 2 a B o hmotnosti -1 (součet hmotností je 1, jak má být).

Jak si to představit fyzikálně? Místo závaží si na páce můžeš představit balónek, který ji táhne nahoru.



Přikládáme ještě dvě úlohy na poměrně zajímavou vlastnost těžiště. Ale dále ji nevyužijeme, takže se případně můžeš směle pustit do další sekce.

Úloha 9. Uvažme libovolnou přímku procházející těžištěm. Dokaž, že vážený součet orientovaných vzdáleností hmotných bodů od takové přímky je nulový.[2]

[2] Tedy $m_1d_1 + m_2d_2 + \cdots + m_nd_n = 0$, kde d_i je orientovaná vzdálenost bodu A_i od dané přímky.

Úloha 10. (znovu) Vrcholem A čtverce $ABCD$ prochází přímka p, která odděluje B od C a D. Dokaž, že $|Bp| + |Cp| = |Dp|$.

Barycentrické souřadnice

Omezíme se nyní pouze na trojúhelník ABC – ukážeme, že je těžiště jeho vrcholů určeno jejich vahami a dokonce i že váhy jsou také určeny polohou těžiště. A jelikož si v případě trojúhelníka body a čísla (váhy) takto odpovídají, budeme je moct používat jako souřadnice.

Věta 11. *Libovolný bod v rovině lze jednoznačně vyjádřit jako těžiště vrcholů trojúhelníka ABC s nějakými vahami, které mají součet 1.*

Důkaz. Nejdřív ukážeme, že každý bod nějak vyjádřit lze. K tomu si uvědomíme, že umíme-li vyjádřit dva body jako těžiště se součtem vah 1, umíme takto vyjádřit i každý bod na přímce procházející skrz ně. Mějme tedy

$$P = x_1A + y_1B + z_1C \quad \text{a} \quad Q = x_2A + y_2B + z_2C,$$

kde $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 1$. Každý bod na přímce PQ je podle tvrzení 8 možné vyjádřit jako $tQ + (1 - t)P$ pro nějaké t. To můžeme rozepsat jako

$$(tx_2 + (1 - t)x_1)A + (ty_2 + (1 - t)y_1)B + (tz_2 + (1 - t)z_1)C$$

a váhy mají skutečné součet 1, čili opravdu umíme správně vyjádřit každý bod na přímce PQ.

Potom už to jde lehce. Vrcholy trojúhelníka vyjádřit umíme, $A = 1 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ a podobně. Díky tomu umíme vyjádřit všechny body na přímkách obsahujících strany. A libovolný další bod jistě leží na nějaké přímce, která protne strany ve dvou různých bodech (stačí, aby taková přímka procházela vnitřkem trojúhelníka). Taková přímka už obsahuje dva vyjádřitelné body, proto se dá vyjádřit i každý další bod na ní. Tudíž můžeme libovolný bod v rovině vyjádřit jako těžiště vrcholů trojúhelníka ABC se součtem vah 1.

Nyní ukažme jednoznačnost vyjádření. Předpokládejme pro spor, že bod P můžeme vyjádřit jako

$$x_1A + y_1B + z_1C = P = x_2A + y_2B + z_2C,$$

kde se váhy liší, bez újmy na obecnosti $z_1 \neq z_2$. Pak

$$(x_1 - x_2)A + (y_1 - y_2)B + (z_1 - z_2)C = (0, 0),$$

tedy získáme

$$C = \frac{x_1 - x_2}{z_2 - z_1}A + \frac{y_1 - y_2}{z_2 - z_1}B.$$

Ukážeme, že součet koeficientů u A a B je roven jedné, tedy že C je vhodné těžiště bodů A a B. Platí $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 1$, tedy

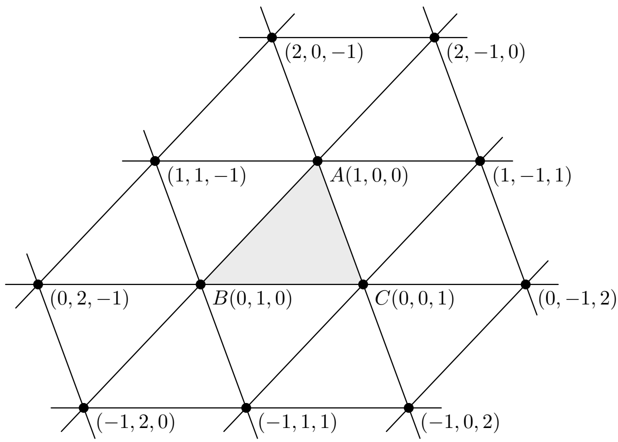
$$\frac{x_1 - x_2}{z_2 - z_1} + \frac{y_1 - y_2}{z_2 - z_1} = \frac{x_1 + y_1 - (x_2 + y_1)}{z_2 - z_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} = 1.$$

Pokud by tedy nějaký bod šel vyjádřit více různými způsoby, ležel by bod C na přímce AB, což je hledaný spor. □

Každý bod v rovině má tedy vůči trojúhelníku ABC jednoznačnou trojici vah, pro kterou je příslušným těžištěm. Trojúhelník tak definuje soustavu souřadnic, ve které můžeme každý bod zapsat. Této soustavě říkáme *barycentrická*[3].

[3] Barycentrum = těžiště.

Definice 12. Buď ABC daný trojúhelník a bod $P = xA + yB + zC$, tedy těžiště s vahami x, y a z kde $x + y + z = 1$. Poté budeme psát souřadnice bodu $P = (x, y, z)$ v barycentrické soustavě vzhledem k trojúhelníku ABC. Trojúhelníku ABC říkáme *referenční trojúhelník.*



Úmluva 13. Není-li řečeno jinak, předpokládejme, že pracujeme v barycentrické soustavě vzhledem ke trojúhelníku ABC.

Pojďme si rozmyslet pár základních věcí – body A, B a C mají souřadnice $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, respektive $(0, 0, 1)$. Střed strany BC je $\frac{B+C}{2} = 0A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, tedy bod $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Zdá se však, že jsme vzorec středu úsečky mohli rovnou použít na barycentrické souřadnice a vyhodnotit standardně po jednotlivých souřadnicích:

$$\frac{B+C}{2} = \frac{(0,1,0)+(0,0,1)}{2} = \frac{(0,1,1)}{2} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Zní rozumně, že by v souřadnicích definovaných vážením mělo jít vážit stejně hezky jako v kartézských, ne? Vskutku. Pokud si v barycentrických souřadnicích rovněž povolíme sčítání a násobení reálným číslem po složkách, můžeme hledat těžiště úplně normálně.

Pozorování 14. *Těžiště bodů $P_1, P_2, \ldots, P_n$ s hmotnostmi $m_1, m_2, \ldots m_n$, které mají pro jednoduchost součet jedna[4], je (barycentricky vypočteno)*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i P_i = m_1 P_1 + m_2 P_2 + \cdots + m_n P_n.$$

Důkaz. Rozepíšeme si $P_i = x_i A + y_i B + z_i C$. Použijeme vzorec pro těžiště v kartézských souřadnicích a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i A + y_i B + z_i C),$$

což roznásobíme a z částí vytkneme A, B, C:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right) A + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\right) B + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right) C.$$

[4] Ale funguje to i obecně.

Těžiště tak má souřadnice

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i, y_i, z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i. \qquad \square$$

Vážíme-li kartézské body, stačí příslušně vážit obě jejich složky. Vidíme, že při zápisu v barycentrických souřadnicích postačí vážit příslušné tři složky. V důsledku toho se zachová mnoho „rozumných vlastností“ kartézských souřadnic (a komplexních čísel).

Věta 15. *Platí následující vlastnosti*

(1) *Střed úsečky XY je vážený bod $\frac{X+Y}{2}$.*
(2) *Střed úsečky BC má souřadnice $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*
(3) *Překlopení bodu Y podle bodu X je vážený bod $2X - Z$.*
(4) *Body $XYZT$ tvoří rovnoběžník, právě pokud platí $X + Z = Y + T$.*
(5) *Těžišti trojúhelníka XYZ přísluší číslo $\frac{X+Y+Z}{3}$.*
(6) *Těžiště trojúhelníka ABC má souřadnice $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.*

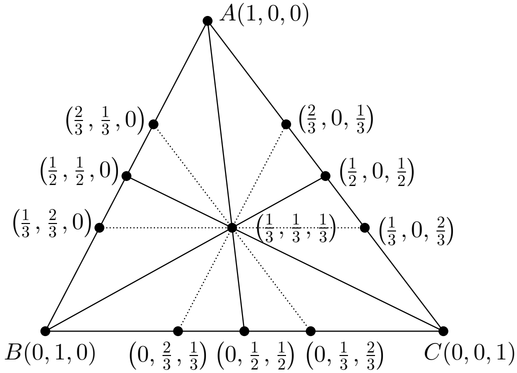
Důkaz. První tři vlastnosti plynou hned z tvrzení 6 a předchozího pozorování, že v barycentrických souřadnicích funguje vážení stejně. Dále body X, Y, Z a T tvoří rovnoběžník právě tehdy, když bod T je překlopením bodu Y podle středu úsečky XZ, tedy dle prvního a třetího bodu máme

$$T = 2 \cdot \frac{X+Z}{2} - Y = X + Z - Y.$$

Těžiště trojúhelníka XYZ umíme spočítat od předchozího dílu seriálu, ovšem dá se spočítat i postupným vážením. Jelikož leží těžiště ve třetině těžnice, můžeme pro těžiště T a M střed YZ psát

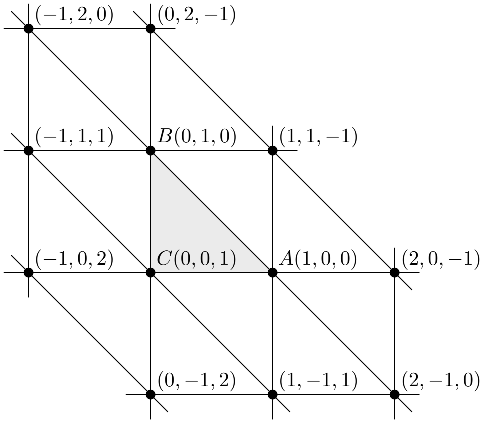
$$T = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}X = \frac{2}{3} \cdot \frac{Y+Z}{2} + \frac{1}{3}X = \frac{X+Y+Z}{3}.$$

Poslední bod je pak zřejmý. $\square$



Cvičení 16. Urči souřadnice středu těžnice z vrcholu A.

Poznámka 17. Kartézské souřadnice jsou v podstatě zvláštní případ barycentrických. Na následujícím obrázku jsme si zvolili pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Když si odmyslíš třetí souřadnici, zbydou Ti dvě důvěrně známé kartézské.



Domluvme se nyní na malé nekalosti. U souřadnic středů stran a těžiště se vyskytují zlomky, kterými se jako správní matematici nechceme zatěžovat. Kvůli tomu si zavedeme *homogenní souřadnice*, v nichž budeme moct všechny souřadnice (váhy) vynásobit jedním číslem. Z definice těžiště na tom nezávisí.

Definice 18. Pro libovolné nenulové reálné k ztotožněme homogenní bod $(kx : ky : kz)$ s bodem (x, y, z) v barycentrické soustavě souřadnic.

Dvojtečky značí, že určujeme jen poměr vah, které však nejsou nutně normované. Nezáleží tedy, zda píšeme $(x : y : z)$, $(-2x : -2y : -2z)$ nebo $(999x : 999y : 999z)$, myslíme tím vždy ten samý bod. Střed strany BC a těžiště trojúhelníka ABC pak můžeme trochu stravitelněji zapsat ve tvaru $(0 : 1 : 1)$ a $(1 : 1 : 1)$. Hned vypadají trochu líp, co?

Cvičení 19. Jak vyjádříš daný bod $(r : s : t)$ v normovaných souřadnicích?

Lemma 20. *Bod P leží na přímce BC. Pak má barycentrické souřadnice*

$$(0 : CP : PB) \text{ neboli } \left(0, \frac{CP}{CB}, \frac{PB}{CB}\right),$$

kde CP a PB jsou orientované vzdálenosti.

Důkaz. Jde znovu o tvrzení 6 a 8. Druhou variantu můžeme alternativně odvodit tak, že znormujeme souřadnice v první variantě a využijeme $CP + PB = CB$. □

Analogicky platí pro body na přímkách obsahujících ostatní strany – nula je u protějšího vrcholu a vzdálenosti k vrcholům u strany jsou prohozené. Souřadnice daného bodu jsou tedy pouze převrácený poměr vzdáleností bodu k příslušných vrcholům. Souřadnice tohoto bodu můžeme zapsát i opačně orientovaně jako $(0 : PC : BP)$ nebo $\left(0, \frac{PC}{BC}, \frac{BP}{BC}\right)$. Nemůžeš ale dopustit, aby se změnila orientace (znaménko) jen jednoho výrazu – například když je P uvnitř strany, musí mít souřadnice stejné znaménko (viz obrázek). Poněvadž chodí poměry v rozličných formách, nejprve s nimi zacvičíme, aby nás pak v úlohách nezaskočily.

Cvičení 21. Urči v závislosti na k barycentrické souřadnice bodu P, jestliže:

(1) Leží na straně AC a $\frac{|PA|}{|PC|} = k$.

(2) Leží na straně BC a $\frac{|PC|}{|BC|} = k$.

(3) Leží na přímce BC mimo stranu BC a $\frac{|PB|}{|PC|} = k$.

Přímky

Pojďme se nyní zabývat přímkami – v nich totiž leží největší síla barycentrických souřadnic. V těchto souřadnicích protneme libovolné dvě přímky jedna báseň. Začněme zlehka.

Libovolný bod na přímce BC můžeme vyjádřit jako vážený bod $tB + (1-t)C = (0, t, 1-t)$. Tímto výrazem lze vyjádřit jakýkoliv bod, který má první souřadnici nulovou. Přímka BC má tedy rovnicové vyjádření $x = 0$, přímky CA a AB jsou analogicky $y = 0$ a $z = 0$. Můžeš si to zkontrolovat na obrázcích. Obecně mají rovnice všech přímek podobně jako v kartézských souřadnicích velmi jednoduchý tvar.

Věta 22. *Obecná rovnice přímky je*

$$ux + vy + wz = 0,$$

kde u, v, w jsou nějaké reálné konstanty.

Důkaz. V kartézských souřadnicích je obecná rovnice přímky $rx+sy+t = 0$. Buď P barycentrický bod $(x,\ y,\ z)$, tedy $xA + yB + zC$ (pozor, je to jiné x a y než v kartézských souřadnicích!). Má-li A kartézské souřadnice $(A_1,\ A_2)$ a obdobně B, C, dostaneme kartézsky

$$P = (xA_1 + yB_1 + zC_1, xA_2 + yB_2 + zC_2).$$

Dosadíme do kartézské rovnice přímky a roznásobíme:

$$xA_1r + yB_1r + zC_1r + xA_2s + yB_2s + zC_2s + t = 0.$$

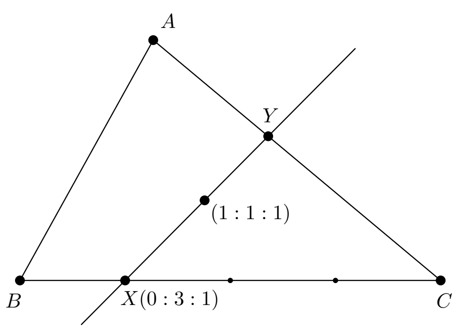
„Zesložitíme“ tento výraz rozepsáním $t = t(x + y + z)$ a přeuspořádáme členy na

$$(A_1r + A_2s + t)x + (B_1r + B_2s + t)y + (C_1r + C_2s + t)z = 0,$$

což je hledaná rovnice, v níž vystupují reálné konstanty $u = A_1r + A_2s + t$, $v = B_1r + B_2s + t$, $w = C_1r + C_2s + t$. □

Dosazením $t = t(x + y + z)$ jsme se zbavili konstanty. Můžeš si však odvodit, že rozepsáním $z = 1 - x - y$ bychom rovnici libovolné přímky mohli napsat jako $ux + vy + w$ s konstantami u, v, w a analogicky bychom mohli vynechat libovolnou souřadnici. Tvar $ux + vy + wz = 0$ má ale jednu výhodu, že můžeme dosazovat homogenní (nenormované) souřadnice. Pro $k \neq 0$ je totiž $u(kx) + v(ky) + w(kz) = 0$ ekvivalentní s $ux + vy + wz = 0$. Stejně tak vidíme, že i konstanty u, v, w můžeme vynásobit jedním číslem a nic se nezmění. Předvedeme si to na příkladě.

Příklad 23. Přímka prochází těžištěm trojúhelníka ABC, stranu BC protíná v bodě X a stranu AC v bodě Y. Jestliže platí $\frac{|BX|}{|BC|} = \frac{1}{4}$, urči $\frac{|AY|}{|AC|}$.



Řešení. Bod X má souřadnice $(0 : 3 : 1)$ neboli $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Těžiště má souřadnice $(1 : 1 : 1)$. Najdeme rovnici přímky procházející těmito dvěma body. Hledáme tedy u, v, w takové, že je pro souřadnice obou bodů splněno $ux + vy + wz = 0$. Co znamená, že můžeme dosadit homogenní souřadnice? Dosadíme-li normované souřadnice prvního bodu, vyjde

$$u \cdot 0 + v \cdot \frac{3}{4} + w \cdot \frac{1}{4} = 0,$$

což však můžeme rovnou vynásobit čtyřmi – nemuseli jsme tedy ani počítat normované souřadnice a mohli jsme dosadit z homogenních souřadnic $(0 : 3 : 1)$ a pohodlně dostat $3v + w = 0$. Stejně tak dosadíme $(1 : 1 : 1)$ a dostaneme $u + v + w = 0$. Máme dvě rovnice pro tři neznámé u, v, w, ale to stačí, protože záleží jen na jejich poměrech. Vynásobení všech jedním číslem, jak jsme řekli, nic nezmění. Stačí proto najít jakékoliv řešení. Zde můžeme zkusit celočíselné, z první rovnice vymyslíme $v = 1$, $w = -3$, z druhé pak dostáváme $u = 2$. Daná přímka má předpis $2x + y - 3z = 0$.

Dále najdeme bod Y, průsečík přímky se stranou AC. Rovnici strany AC už jsme zmínili, ale každopádně bychom ji mohli najít coby přímku skrz body A, C, velmi snadno vyjde rovnice $y = 0$. Průsečík těchto dvou přímek spočítáme soustavou příslušných dvou rovnic pro tři neznámé x, y, z, kde je zase víc řešení, protože můžou vyjít nenormované body. Jestliže hledáme normované souřadnice, přidáme si za třetí rovnici podmínku $x + y + z = 1$.

Řešením je bod $(3 : 0 : 2)$ neboli $\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$. Podle lemmatu 20 platí $(3 : 0 : 2) = (CY : 0 : YA)$ a

$$\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{CY}{CA}, 0, \frac{YA}{CA}\right).$$

Vychází $\frac{|AY|}{|AC|} = \frac{2}{5}$.

Cvičení 24. Rozmysli si, že

(1) Rovnice každé přímky skrz A splňuje $u = 0$, tedy je tvaru $vy + wz = 0$.
(2) Rovnice těžnice z vrcholu A je $y = z$.
(3) Rovnice střední příčky vzhledem ke straně BC je $x = y + z$.

Všimněme si, že střed strany má homogenní souřadnice $(0 : 1 : 1)$, což je stejné jako těžiště, pouze s nulovou první souřadnicí. To vůbec není náhoda, v následujícím cvičení si máš rozmyslet, jak vypadá protínání přímek procházejících vrcholem trojúhelníka (tzv. *ceviány*) s opačnou stranou. S tím už máš nástroje na to dobušit si svých prvních pár pořádnějších úloh.

Cvičení 25. Přímka procházející vrcholem A a bodem $P = (r : s : t)$ protne přímku BC v bodě $(0 : s : t)$. Analogicky se z jiného vrcholu na protější stranu vynuluje příslušná souřadnice.

Cvičení 26. V trojúhelníku ABC leží na straně AC bod E tak, že $|CE| = 3|AE|$, a na straně AB bod F tak, že $|BF| = 3|AF|$. Jestliže se přímky BE a CF protnou v bodě O a přímka AO protne stranu BC v bodě D, spočítej poměry $\frac{|OB|}{|OE|}$ a $\frac{|OD|}{|OA|}$.

Úloha 27. Na stranách BC, CA, AB trojúhelníka ABC leží po řadě body D, E, F, přičemž platí $|AE| = |AF| = |CD| = 2$, $|BD| = |CE| = 2$ a $|BF| = 5$. Přímky DE a CF se protínají v bodě K. Urči poměry $\frac{|KD|}{|KE|}$ a $\frac{|KC|}{|KF|}$.

Úloha 28. Je daný trojúhelník ABC s těžištěm T. Označme D bod takový, že B je střed úsečky AD a podobně E bod takový, že C je střed úsečky AE. Ukaž, že přímky TD, AT a TE dělí stranu BC na čtvrtiny. (CPSJ 2019)

Úloha 29. V trojúhelníku ABC označíme M a N po řadě středy stran AB a AC. Body D, E leží na úsečce BC tak, že $|BD| = |DE| = |EC| = \frac{1}{3}|BC|$. Konečně, přímky DM a EN se protnou v bodě P. Dokaž, že $ABPC$ je rovnoběžník.

Cvičení 30. Rozmysli si, jak spočítat rovnici přímky p procházející bodem $D \in AB$ rovnoběžnou se stranou BC.

Zatím jsme přímky počítali pomocí soustavy rovnic, kterou splní koeficienty rovnice $ux + vy + wz = 0$. V příští sekci si ukážeme, jak si práci ulehčit. Poznamenejme, že všechny zatím uvedené úlohy jsou *afinní*, tedy se zabývají pouze body, které jsou na úsečkách v pevných poměrech. Abychom se z afinního prostoru vymanili, musíme do barycentrických souřadnic začít psát výrazy s délkami nebo úhly.

Obsahy

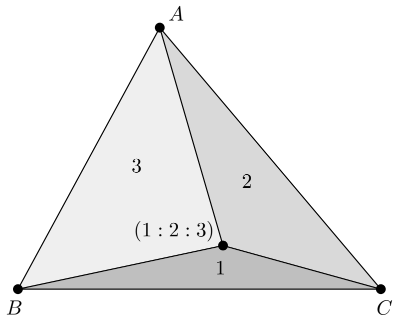
Možná se ptáš – v čem je výhoda barycentrických souřadnic oproti vážení bodů ve víceúhelnících? Barycentrické souřadnice totiž mají ještě jednu obří výhodu – jsou přirozeně spjaté s délkami, podobnostmi a obsahy. Pojďme se k jejich propojení postupně propracovat, začneme zlehka s body na straně.

Úloha 31. Jaké jsou souřadnice paty výšky a osy úhlu vedoucí z vrcholu A? Můžeš je vyjádřit v závislosti na délkách stran nebo na úhlech v trojúhelníku ABC.

Věta 32. (stěžejní) *Bod P má barycentrické souřadnice*

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[APC]}{[ABC]}, \frac{[ABP]}{[ABC]} \right) = ([PBC] : [APC] : [ABP]),$$

kde $[XYZ]$ značí orientovaný obsah trojúhelníka XYZ.[5]



Důkaz. Označme K průsečík přímek AP a BC a $P = (u, v, w)$. Podle cvičení 25 platí $K = (0 : v : w)$. Z lemmatu 20 plyne

$$\frac{KC}{BK} = \frac{v}{w}.$$

Protože mají trojúhelníky AKC a ABK stejnou výšku na stranu (přímku) BC, jsou jejich obsahy úměrné délce jejich strany na té přímce, takže platí také

$$\frac{[AKC]}{[ABK]} = \frac{KC}{BK}.$$

Tyto dva trojúhelníky zároveň sdílí stranu AK. Pokud ji zkrátíme či prodloužíme, změní se obsahy stejným poměrem. Změníme ji tedy na AP a dostaneme

$$\frac{[APC]}{[ABP]} = \frac{[AKC]}{[ABK]}.$$

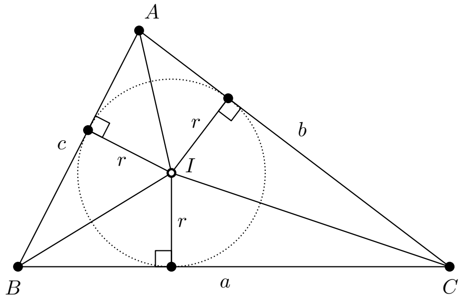
Ze všech tří rovností dohromady získáváme poměr dvou souřadnic, což můžeme cyklicky zopakovat pro ostatní souřadnice, takže získáme $P = ([PBC] : [APC] : [ABP])$. □

Pozorování 33. *Bod leží uvnitř trojúhelníka právě tehdy, když všechny jeho souřadnice mají stejné znaménko.*

[5] Když jdou vrcholy po směru hodinových ručiček, je obsah záporný.

Jistě se, vážený čtenáři, ptáš – k čemu je nám tato obsahová definice? Tvé otázky budou vyslyšeny, pomocí této klíčové vlastnosti barycentrických souřadnic můžeme s přehledem určit mnoho známých středů trojúhelníka.

Příklad 34. Střed kružnice vepsané má barycentrické souřadnice $I = (a : b : c)$.



Důkaz. Nechť je r poloměr kružnice vepsané. Obsah trojúhelníka ABI je $\frac{1}{2}cr$, protože r je jeho výška na stranu c. Analogicky je $[IBC] = \frac{1}{2}ar$ a $[AIC] = \frac{1}{2}br$. Takže platí

$$I = \left(\frac{1}{2}ar : \frac{1}{2}br : \frac{1}{2}cr\right) = (a : b : c).$$

□

Cvičení 35. Nalezni pomocí obsahové definice barycentrické (stačí homogenní) souřadnice středu kružnice opsané a ortocentra. Můžeš je zapsat v závislosti na vnitřních úhlech trojúhelníka.

Úloha 36. Pomocí délek stran trojúhelníka ABC a $s = \frac{a+b+c}{2}$ nalezni souřadnice dotyků kružnice vepsané a kružnic připsaných ke stranám trojúhelníka.

S jednotlivými body jsme si užili zábavu, co se podívat na obsahy? Možná teď už vidíš, že barycentrické souřadnice budou na počítání obsahů jako dělané, ale jak přesně na to?

Definice 37. Uvažme body s barycentrickými souřadnicemi $(x_1 : y_1 : z_1)$, $(x_2 : y_2 : z_2)$ a $(x_3 : y_3 : z_3)$. Pak definujeme *determinant*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2z_3 - x_3z_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2).$$

Poznámka 38. Vzorec se dá roznásobit na šest součinů a v každém z nich je z každého řádku i z každého sloupce právě jeden činitel. Součiny však mají různá znaménka – kladné, pokud jsou souřadnice, které bereme z prvního, druhého a třetího řádku ve správném cyklickém pořadí, tedy $\ldots xyzxyz \ldots$; naopak záporné, pokud jsou v obráceném cyklickém pořadí, tedy $\ldots zyxzyx \ldots$ Jinak řečeno, buď jdeme do dalšího řádku a vždy vezmeme další souřadnici (a jdeme dokola), pak je znaménko kladné, nebo jdeme do dalšího řádku a vždy vezmeme předchozí souřadnici, pak je znaménko záporné.[6] Schématicky to vypadá takhle:

$$\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & y_2 & \\ & & z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & y_1 & \\ & & z_2 \\ x_3 & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & z_1 \\ x_2 & & \\ & y_3 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & z_1 \\ & y_2 & \\ x_3 & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & y_1 & \\ x_2 & & \\ & & z_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & & z_2 \\ & y_3 & \end{pmatrix}$$

[6]Pozor ale, aby Tě to pak nezmátlo v lineární algebře: tento princip neplatí pro matice větší než 3×3.

Cvičení 39. (vlastnosti determinantu)

(1) Jak se změní determinant, když vynásobím jeden řádek reálným číslem (po složkách)?
(2) Jaký je determinant, když je jeden řádek celý nulový?
(3) Jaký je determinant, když platí $(x_1 : y_1 : z_1) = (x_2 : y_2 : z_2)$?
(4) Jak se změní determinant, když k jednomu řádku přičtu nějaký násobek druhého?

První bod cvičení se zejména hodí, když musíme dosazovat normované body (uvidíš kde). Pak dosadíme

$$\left(\frac{r}{r+s+t}, \frac{s}{r+s+t}, \frac{t}{r+s+t}\right),$$

kde máme celý řádek vynásobený $\frac{1}{r+s+t}$, takže můžeme dosadit prostě $(r : s : t)$ a výsledek jen vydělit $r + s + t$.

Poznámka 40. (Teoretická) Determinanty pochází ze světa lineární algebry, konkrétně vyjadřují jistý (orientovaný) obsah spřízněný s danou maticí, to si ukážeme i v následující větě. Mnoho z teorie barycentrických souřadnic, kterou zde zmiňujeme, lze elegantně vysvětlit slovy lineární algebry. Pro hlubší pochopení barycentrických souřadnic tedy doporučujeme si načíst i základy lineární algebry...

Znalosti z lineární algebry pak mohou poskytnout překvapivě elegantní pravidlo vhodné na počítání obsahů. Úplný důkaz si zde neuvedeme, najdeš ho například v článku od Zacha Abela.[7]

Věta 41. *Mějme body P, Q, R s normovanými souřadnicemi (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) a (x_3, y_3, z_3). Pak orientovaný obsah trojúhelníka PQR je*

$$[PQR] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} [ABC].$$

Pokud však nehodláš uvěřit, dokud nebudeš mít důkaz, nabízíme Ti náčrt: ukaž si pomocí vlastností determinantu, že pokud věta platí pro trojúhelník PQR, platí to i pro trojúhelník $P'QR$, kde bod $P' = kP + (1-k)Q$ leží na přímce PQ – tedy že věta zůstane platná, pokud budeš posouvat vrcholy po stranách. Dále si všimni, že pro trojúhelník ABC věta platí a rozmysli si, že z něj posouváním vrcholů po stranách můžeš dostat libovolný trojúhelník PQR.

Máš hotovo nebo to nepotřebuješ zkoušet? Výborně, pojď s námi na příklad.

Příklad 42. V trojúhelníku leží po řadě body X, Y, Z uvnitř stran BC, AC a AB tak, že

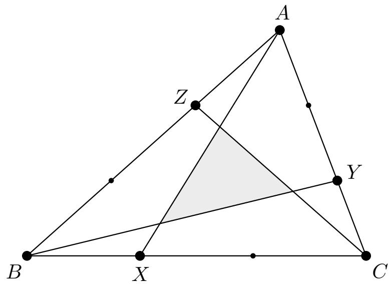
$$\frac{|BX|}{|BC|} = \frac{|CY|}{|CA|} = \frac{|AZ|}{|AB|} = k.$$

Dokažme, že pro $k = \frac{1}{3}$ vytínají přímky AX, BY a CZ trojúhelník, jehož obsah je sedmkrát menší než obsah ABC.

Řešení. Jednoduše spočítáme všechny průsečíky a využijeme předchozí větu. Dle lemmatu 20 platí $X = (0 : 2 : 1)$ a podobně $Y = (1 : 0 : 2)$ a $Z = (2 : 1 : 0)$. Přímka AX má proto rovnici $y = 2z$, přímka BY zase $z = 2x$. Jejich průsečík určíme jako $(1 : 4 : 2) = \left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$ a podobně spočítáme i zbylé dva průsečíky (pouze protáčíme souřadnice). Konečně, podle naší věty je hledaný podíl obsahů roven

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{7^3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}.$$

[7] *http://zacharyabel.com/papers/Barycentric_A07.pdf*



Cvičení 43. V trojúhelníku ABC leží bod P a označme D, E, F po řadě průsečíky přímek AP, BP a CP se stranami BC, AC a AB. Potom dokaž nerovnost neorientovaných obsahů

$$[ABC] \geq 4[DEF].$$

Kdy nastane rovnost?

Úloha 44. Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něj bod U. Označme A', B' a C' po řadě obrazy bodů A, B, C v souměrnosti se středem U. Dokaž, že pokud je šestiúhelník $AC'BA'CB'$ konvexní, potom má obsah $2[ABC]$. (Krajské kolo MO 2011)

Úloha 45. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř jeho stran AB a AC jsou po řadě zvoleny body X a Y. Označme Z průsečík úseček BY a CX. Dokaž nerovnost neorientovaných obsahů

$$[BZX] + [CYZ] \geq 2[XZY].$$

(Celostátko 2020)

Úloha 46. (delší) Buďte O, H, I po řadě střed kružnice opsané, ortocentrum a střed kružnice vepsané. Pak trojúhelník OHI má obsah

$$[OHI] = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{8r}[ABC].$$

Počítání obsahů v barycentrických souřadnicích je tedy asi tak těžké, jako sečíst devět čísel – proto přesně se této technice někdy přezdívá „areal coordinates“.

Co můžeme ještě dělat s tímto vzorcem? Co například znamená, když má trojúhelník nulový obsah?

Důsledek 47. (Rovnice přímky znovu) *Tři body P, Q a R s (nyní už ne nutně normovanými) souřadnicemi $(x_1 : y_1 : z_1)$, $(x_2 : y_2 : z_2)$ a $(x_3 : y_3 : z_3)$ leží na přímce právě tehdy, když platí*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Speciálně rovnice přímky procházející body $(x_1 : y_1 : z_1)$ a $(x_2 : y_2 : z_2)$ je

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \iff x(y_1z_2 - y_2z_1) - y(x_1z_2 - x_2z_1) + z(x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Všimni si, že zde už nepožadujeme normované body. Podle cvičení 39 totiž to, jestli je determinant nulový, nezáleží na tom, jestli řádek vynásobíme nenulovým číslem.

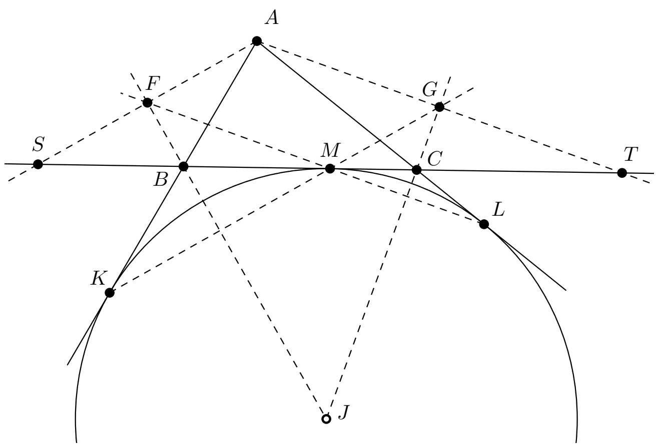
Cvičení 48. Dokaž jednu implikaci předchozího důsledku pomocí vážení bodů na přímce a cvičení 39.

Díky tomu si můžeme při hledání rovnic přímek ušetřit řešení soustavy rovnic. Jakmile dostaneš do ruky počítání determinantu, rovnice přímky už pro Tebe bude zcela rutinní záležitost – my výrazně doporučujeme počítat přímky tímto způsobem.

Úloha 49. Najdi rovnici osy vnitřního a vnějšího úhlu BAC a dokaž, že střed kružnice připsané ke straně BC je roven $(-a : b : c)$. Adaptuj větu o ose úhlu pro vnější úhel.

Jak zákon káže, naši nově získanou teorii si musíme vyzkoušet na nějaké oběti. A není lepší oběť, než úloha z mezinárodní matematické olympiády.

Příklad 50. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice připsaná ke straně BC má střed J a dotýká se přímek AB, AC a BC po řadě v bodech K, L a M. Průsečík přímek LM a BJ označme F, průsečík přímek KM a CJ pak G. Konečně body S, T jsou po řadě průsečíky přímek AF a AG s přímkou BC. Dokažme, že M je středem úsečky ST. (IMO 2012)



Řešení. Zaveďme souřadnice vzhledem k ABC. Dle předchozí úlohy platí $J = (-a : b : c)$ a podle úlohy 36 píšeme $M = (0 : s-b : s-c)$, $K = (c-s : s : 0)$. Přímka KM má rovnici

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & s-b & s-c \\ c-s & s & 0 \end{vmatrix} = -xs(s-c) - y(s-c)^2 + z(s-c)(s-b) \Longrightarrow 0 = -xs - y(s-c) + z(s-b),$$

jelikož díky trojúhelníkové nerovnosti můžeme krátit $s-c > 0$. Přímka CJ má zase rovnici $bx+ay = 0$ a průsečík těchto dvou přímek spočítáme jako řešení příslušné homogenní soustavy, což vyjde s krácením

$$G = (-a(s-b) : b(s-b) : b(s-c) - as) = (-a(s-b) : b(s-b) : -(a+b)(s-b)) = (-a : b : -(a+b)),$$

tedy $T = (0 : -b : a+b) = \left(0, -\frac{b}{a}, \frac{a+b}{b}\right)$. Obdobně získáme $S = \left(0, \frac{a+b}{a}, -\frac{a}{b}\right)$, z čehož už hned vidíme, že $\frac{S+T}{2} = M$.

Úloha 51. V trojúhelníku ABC najdi souřadnice těžiště trojúhelníku, jehož vrcholy jsou body dotyku kružnice vepsané. Dokaž navíc, že leží na přímce procházející těžištěm a středem kružnice vepsané trojúhelníka ABC.

Úloha 52. V trojúhelníku ABC je M střed strany BC a I střed kružnice vepsané. Přímka MI protíná výšku z bodu A v bodě F. Dokaž, že délka úsečky AF je rovná poloměru kružnice vepsané.

Úloha 53. Je dán trojúhelník ABC a bod P uvnitř. Označme D, E a F po řadě průsečíky přímek AP, BP a CP s příslušnou protější stranou. Dokaž, že platí

$$[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{1}{2}[ABC]$$

právě tehdy, když P leží na jedné z těžnic trojúhelníka. (USA TST 2003)

Úloha 54. Je dán trojúhelník ABC, jehož každé dvě strany se liší alespoň o délku $d > 0$. Označme T jeho těžiště, I střed kružnice vepsané a r její poloměr. Dokaž, že

$$[AIT] + [BIT] + [CIT] \geq \frac{2}{3}dr.$$

(Celostátko 2015)

Na jedné přímce, v jednom bodě ...

Přesně tato slova zakončují zadání velkého množství olympiádních úloh, se kterými se setkáš. Na důkaz tvrzení takového typu máme nemálo technik – použití stejnolehlosti, převedení na nějakou známou přímku... Co kdybychom si ale mohli pomoct výpočtem? Pokud naše tři přímky připoutáme k jednomu trojúhelníku, potom kritérium, kdy se tři přímky protínají v jednom bodě, zní jednoduše.

Věta 55. (Cevova) *Je dán trojúhelník ABC a na stranách a, b, c po řadě body D, E, F. Potom se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě, právě když platí*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Důkaz. Vhodně použijeme cvičení 25 a lemma 20. Uvažme $P = (d, e, f)$ průsečík přímek AD a BE. Pak $D = (0 : e : f)$ a $E = (d : 0 : f)$. Průsečík $CP \cap AB$ je $F' = (d : e : 0)$, což je jediný bod splňující

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{e}{d} = \frac{e}{f} \cdot \frac{f}{d} = \frac{CD}{DB} \cdot \frac{AE}{EC}.$$

Přímka CF tedy prochází bodem P, právě když je $F = F'$, což platí, právě když

$$\frac{AF}{FB} = \frac{CD}{DB} \cdot \frac{AE}{EC}.$$

□

Pojďme si vychutnat sílu této věty, jelikož na mnohé standardní konfigurace v trojúhelníku je jako dělaná. Přemýšlel(a) jsi někdy nad tím, proč se vlastně osy úhlu, výšky či podobné přímky v trojúhelníku opravdu protínají v jednom bodě? Když jsme vybaveni Cevovou větou, bude to pro nás hračka dokázat.

Cvičení 56. Dokaž, že se následující přímky v daném trojúhelníku ABC protínají v jednom bodě a najdi souřadnice jejich průsečíků (ano, některé body už znáš):

(1) těžnice,
(2) osy úhlů,
(3) výšky,
(4) spojnice vrcholů a bodů dotyku kružnice vepsané s protější straonu,
(5) spojnice vrcholů a bodů dotyku kružnic připsaných na protější stranu.

Vyvstává otázka – můžeme Cevovu větu zobecnit? Následující věta podává obecné kritérium, kdy tři přímky prochází jedním bodem. Snadno si můžeš ověřit, že pro tři ceviány věta dává právě Cevovu větu.

Věta 57. *Uvažme tři přímky $u_i x + v_i y + w_i z = 0$ pro $i = 1, 2, 3$. Pak tyto tři přímky prochází jedním bodem právě tehdy, když platí*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Důkaz. (náznak) Všiml(a) sis, že když jsme řešili přímky bez determinantů, jen soustavami rovnic, tak vypadalo hledání přímky procházející dvěma body stejně jako hledání průsečíku dvou přímek? V rovnicích $ux + vy + wz = 0$ byly akorát jednou x, y, z známé a u, v, w neznámé a podruhé naopak. Když jsme pak dosadili x, y, z do determinantu, odhalili jsme kritérium, kdy jsou tři body na jedné přímce.

Rovnicemi bychom to ověřili tak, že by přímka skrz každé dva z nich vyšla vždy stejně. To, že se tři přímky protnou v jednom bodě, bychom rovnicově ověřili tak, že by průsečík každých dvou vyšel stejně. Ale výpočty při tom ověřování by byly totožné až na záměnu x, y, z a u, v, w. A v případě bodů se toto ověření dalo snáze provést s determinanatem. Dává tedy smysl, že když do determinantu dosadíme u, v, w, získáme kritérium, kdy se tři přímky protínají v jednom bodě. □

Úloha 58. V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná dotýká stran AC a BC v bodech D a E. Dokaž, že osa úhlu $\sphericalangle BAC$, střední příčka vzhledem k vrcholu B a přímka DE prochází jedním bodem.

Cvičení 59. (Izotomičtí kamarádi) Je dán trojúhelník ABC a na stranách a, b, c po řadě body D, E, F takové, že se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě $P = (u, v, w)$. Překlopíme body D, E, F podle středů příslušných stran na body D', E', F'. Pak se i přímky AD', BE' a CF' protínají v jednom bodě. Jaký bude mít tento bod souřadnice?

Věta 60. (Menelaova) *Je dán trojúhelník ABC a na přímkách BC, AC, AB po řadě body D, E, F. Potom body D, E a F leží na přímce, právě když platí*

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = -1.$$

Důkaz. Uvažme nějakou přímku $ux + vy + wz = 0$. Jelikož orientovaný poměr $\frac{AF}{BF}$ jednoznačně určuje pozici bodu F, stačí nám ukázat, že libovolné tři body ležící na přímce splňují daný vztah. Průsečíky dané přímky se stranami budou body po řadě $D = (0 : -w : v)$, $E = (w : 0 : -u)$ a $F = (-v : u : 0)$. Pak

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{v}{-w} \cdot \frac{w}{-u} \cdot \frac{u}{-v} = -1,$$

je tedy hotovo. □

Úloha 61. V trojúhelníku ABC leží bod P a označme D, E, F po řadě průsečíky přímek AP, BP a CP se stranami BC, AC a AB. Dokaž, že platí

$$\frac{|PD|}{|AD|} + \frac{|PE|}{|BE|} + \frac{|PF|}{|CF|} = 1.$$

Úloha 62. Ve čtyřstěnu $ABCD$ označme středy kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD, CDA, DAB, ABC po řadě I_A, I_B, I_C, I_D. Nechť platí, že úsečky AI_A, BI_B, CI_C a DI_D prochází jedním bodem. Dokaž, že

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$

(Prase 39–1j–7)

Kružnice

Jak jsme viděli, oproti komplexním číslům si barycentrické souřadnice mnohem více rozumí s přímkami. V úvodu jsme Ti slíbili, že i rovnici kružnice můžeme explicitně vyjádřit. Možná překvapivé bude, že právě komplexní čísla nám pomůžou odemknout plnou krásu kružnic v barycentrických souřadnicích. I když je rovnice kružnice zdaleka nejméně hezkou věcí, se kterou se v tomto dílu potkáme, ukážeme si, jak je dobře využívat.

Věta 63. *Obecná rovnice kružnice je*

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0,$$

kde u, v, w jsou nějaké reálné konstanty.

Důkaz. Zde trikově využijeme komplexních čísel. Aby se nám body A, B, C nepletly s délkami stran a, b, c, budeme komplexní čísla taky psát velkými písmeny. Uvažme takovou soustavu souřadnic, že je daná kružnice jednotková (A, B, C na ní nemusí ležet). To, že na ní bod P leží, se pozná ze vztahu $P\overline{P} = 1$. Pochopitelně použijeme rozepsání $P = xA + yB + zC$.

$$\begin{aligned}(xA + yB + zC)\overline{(xA + yB + zC)} &= (xA + yB + zC)(x\overline{A} + y\overline{B} + z\overline{C}) = \\ &= x^2A\overline{A} + y^2B\overline{B} + z^2C\overline{C} + xy(A\overline{B} + \overline{A}B) + yz(B\overline{C} + \overline{B}C) + zx(C\overline{A} + \overline{C}A) = 1.\end{aligned}$$

V rovnici jsou délky stran na druhou, tak se podíváme, jak vypadají v komplexních číslech. Například

$$a^2 = |A - B|^2 = (A - B)\overline{(A - B)} = A\overline{A} + B\overline{B} - (A\overline{B} + \overline{A}B).$$

Vyjádříme výraz, který jsme viděli už v předchozí rovnici:

$$A\overline{B} + \overline{A}B = -a^2 + A\overline{A} + B\overline{B},$$

cyklicky pro ostatní délky stran. Dosadíme, přeuspořádáme členy a dostaneme

$$(x^2 + xy + xz)A\overline{A} + (y^2 + yz + yx)B\overline{B} + (z^2 + zx + zy)C\overline{C} - a^2xy - b^2yz - c^2zx = 1.$$

Z prvních tří členů lze vytknout $x + y + z$. Odečtením přesuneme jedničku na levou stranu a rozepíšeme ji také jako $1 = x + y + z$, čímž dostaneme výslednou rovnici, kde $u = A\overline{A} - 1$, $v = B\overline{B} - 1$, $w = C\overline{C} - 1$ jsou doopravdy reálná čísla. □

Jak najít kružnici procházející danými body? Jednoduše dosadíme souřadnice bodů do rovnice kružnice a vyřešíme soustavu pro u, v a w. Všimněme si, že v rovnici kružnice bychom nemuseli psát člen $x + y + z$, protože je roven jedné. Píšeme ho tam, aby byla rovnice kružnice stejně jako rovnice přímky homogenní v (x, y, z), díky čemuž můžeme bezpečně dosazovat nenormované body. Ukážeme si na příkladě.

Příklad 64. Označme M střed strany BC a hledejme kružnici opsanou trojúhelníku ABM. Dosadíme body $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ a bod M budeme psát jako $(0 : 1 : 1)$, abychom si lehce usnadnili výpočty. Dosazením získáme:

$$\begin{aligned}0 + 0 + 0 + (u + 0 + 0) \cdot 1 &= 0,\\ 0 + 0 + 0 + (0 + v + 0) \cdot 1 &= 0,\\ -a^2 + 0 + 0 + (v + w) \cdot (1 + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Ihned je zřejmé, že $u = v = 0$ a pak spočteme $w = \frac{a^2}{2}$. Naše kružnice je tedy reprezentována rovnicí

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + \frac{a^2}{2}z(x+y+z) = 0.$$

Hned vidíme, že pokud kružnice prochází vrcholem trojúhelníka, je příslušná neznámá v rovnici kružnice nulovaná[8]. Toto je velmi důležité pozorování – pokud totiž v úloze pracujeme s kružnicí, chceme, aby procházela co nejvíce vrcholy referenčního trojúhelníka.

Také si uvědomme, že můžeme první tři členy rovnice psát s kladnými znaménky a jen změnit znaménka koeficientů u, v, w (bylo by $u = 1 - A\overline{A}$ apod). Je to zcela legální, první možnost ale umožní počítat mocnost přímo dosazením (včetně znaménka) – to uvidíme za chvíli.

Úloha 65. Je daný trojúhelník ABC splňující $|AC| + |BC| = 3|AB|$. Kružnice jemu vepsaná má střed v I a dotýká se stran BC, CA v bodech D a E. Konečně, překlopme bod D přes I na bod K a podobně překlopme bod E přes I na bod L. Dokaž, že body A, B, K a L leží na jedné kružnici. (Shortlist 2005)

Úloha 66. Je daný rovnoběžník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P. Označme M střed strany AB. Nechť Q je takový bod, že přímka QA je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku MAD a QB je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku MBC. Dokaž, že body Q, M a P leží na přímce. (CPS 2020)

Mocnost bodu ke kružnici

Co nám může rovnice kružnice říct o vztahu libovolného bodu v rovině vzhledem k ní? Možná překvapivě odpověď je přímo mocnost bodu k této kružnici.

Věta 67. *Buď $P = (x_1, y_1, z_1)$ bod v rovině trojúhelníka ABC a k kružnice daná rovnicí*

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux + vy + wz)(x+y+z) = 0.$$

Pak je mocnost bodu P ke kružnici k rovna

$$P(P,k) = -a^2y_1z_1 - b^2x_1z_1 - c^2x_1y_1 + (ux_1 + vy_1 + wz_1)(x_1+y_1+z_1),$$

jinak řečeno se jedná o pouhé dosazení bodu do rovnice kružnice.

Tuto vlastnost si snadno ověříš na důkazu 63. Totiž mocnost bodu P k jednotkové kružnici je přesně $P\overline{P} - 1$. Zde na znaménkách pochopitelně záleží (a je to i důvod, proč jsme psali rovnici kružnice v tomto tvaru).

Pomocí mocnosti přirozeně můžeme pracovat s chordálami.

Věta 68. *Uvažme dvě kružnice k a l. Pak jejich chordála je přímka daná rozdílem jejich rovnic.*

Důkaz. Analogický k důkazu v případě kartézských souřadnic z prvního dílu. □

Využití této věty při počítání úloh je jasné – chceme-li najít rovnici chordály dvou kružnic, nemusíme pracně počítat jejich průsečíky. Stačí je od sebe odečíst! Můžeš si to vyzkoušet na následující úloze.

Úloha 69. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC, uvnitř které je zvolen bod D. Nechť E, F jsou po řadě takové body na stranách AB, AC, že platí $\sphericalangle BED = \sphericalangle DFC > 90^\circ$. Dokaž, že přímka AD je chordálou kružnice ABF a AEC. (Celostátko 2020)

Úloha 70. Uvnitř trojúhelníka ABC leží bod P. Nechť přímka AP protne stranu BC v bodě A_1 a bod A_2 je takový, že A_1 je střed úsečky PA_2. Obdobně definujeme body B_2 a C_2. Dokaž, že body A_2, B_2 a C_2 nemohou všechny najednou ležet uvnitř kružnice opsané trojúhelníku ABC. (Shortlist 2019)

[8] Mimochodem, vidíme to už z důkazu, kde máme $u = A\overline{A} - 1$ apod.

Úloha 71. V nerovnostranném trojúhelníku ABC označme T jeho těžiště a M_A, M_B, M_C, N_A, N_B a N_C po řadě středy úseček BC, AC a AB, TA, TB a TC. Dokaž, že kružnice opsané trojúhelníkům $N_A M_B M_C$, $M_A N_B M_C$ a $M_A M_B N_C$ všechny prochází jedním bodem.

(Prase 39–4p–8)

Jednak se tedy můžeme vyhnout nějaké početní práci, je to ale vše? Není, často totiž chordály najdeš schované v naprosto nečekaných situacích. Můžeme si jimi například vynahradit kolmost, kterou jinak v seriálu nezmiňujeme.

Cvičení 72. Dokaž, že tečna ke kružnici opsané trojúhelníka ABC v bodě A má rovnici $b^2 z + c^2 y = 0$ tak, že ji napíšeš jako vhodnou chordálu.

Úloha 73. Najdi pomocí chordál vhodných (degenerovaných) kružnic osu strany BC.

Úloha 74. Najdi souřadnice K průsečíku tečen ke kružnici opsané v bodech B a C. Přímku AK nazveme *symediánu* v trojúhelníku ABC. Dokaž dále, že se symediány v trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Vraťme se na moment zpátky až k prvnímu dílu, kde jsme si zmínili linearitu mocnosti bodu ke kružnici.

Úloha 75. Pomocí linearity mocnosti dokaž, že mocnost bodu H ke kružnici opsané ABC je rovna $8R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$, kde R je poloměr kružnice opsané.

Steinerova věta (o těžišti)

Pokud jsi dočetl(a) až sem, věnujeme Ti nakonec malý odpočinkový dárek: návod na sčítání čtverců vzdáleností. Vrátíme se zpět k vážení soustavy více bodů.

Věta 76. (Steinerova[9]) *Nechť jsou $A_1, \ldots, A_n$ body a T jejich těžiště (všechny mají stejnou hmotnost). Pak pro libovolný bod X platí*

$$\sum_{i=1}^{n} |XA_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |TA_i|^2 + n \cdot |XT|^2.$$

Věta nám tedy umožňuje vyjádřit součet čtverců vzdáleností několika bodů od X jen v závislosti na vzdálenosti X od těžiště.

Důkaz. Označme souřadnice bodu A_i (x_i, y_i). Zvolme si navíc soustavu tak, že těžiště leží v počátku a osa x prochází bodem X. Potom platí $\sum_{i=1}^{n}(x_i, y_i) = (0,0)$, tedy $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, a $X = (d, 0)$, kde $d = |XT|$. Nyní již jednoduše spočítáme součet čtverců ze znění věty

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |XA_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n}((x_i - d)^2 + (y_i - 0)^2) = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 - 2dx_i + d^2) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) - 2d \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} d^2 = \sum_{i=1}^{n} |TA_i|^2 + 0 + n \cdot |XT|^2.\end{aligned}$$ □

Cvičení 77. Rozmysli si, že pro dané body A_i nabývá součet $\sum_{i=1}^{n} |XA_i|^2$ nejnižší hodnoty, pokud je X těžiště.

[9] Pod tímto jménem je známá ve fyzice, kde se pomocí ní počítají momenty setrvačnosti. Verze, kde vážíme jen tři body, se připisuje ke jménu Leibniz.

Steinerova věta v zásadě říká jen to, že minimum součtu čtverců vzdáleností nastává v těžišti[10]. Mimo to je důkaz poměrně jasný. Při umocnění vzdálenosti na druhou zmizí odmocnina, takže pak sčítáme jenom n kvadratických funkcí (v obou souřadnicích).

Příklad 78. Na kružnici opsané pravidelnému mnohoúhelníku $A_1A_2\dots A_n$ leží bod X. Dokaž, že hodnota $|XA_1|^2 + |XA_2|^2 + \cdots + |XA_n|^2$ nezávisí na volbě bodu X.

Řešení. Když má každý vrchol stejnou váhu, je jejich těžiště ze symetrie ve středu (kružnice opsané) mnohoúhelníka, označme ho O. Vzdálenost X od těžiště je vždycky stejná, což je jako dělané na Steinerovu větu. Součet můžeme vyjádřit:

$$\sum_{i=1}^{n} |XA_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |OA_i|^2 + n \cdot |XO|^2.$$

Bod X leží na kružnici opsané, takže vzdálenost $|XO|$ je vždy její poloměr a výraz proto nezávisí na poloze bodu X.

Cvičení 79. Rozmysli si, že příklad výše platí i pokud volíme X na jiné kružnici se stejným středem, například vepsané.

Úloha 80. (znovu) Urči délku těžnice v trojúhelníku jen pomocí délek stran.

Úloha 81. (znovu) Je daný pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$ vepsaný do jednotkové kružnice. Dokaž, že platí $|AB|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 = 7$.

Úloha 82. Mezi středy dvou kružnic s poloměrem 1 je vzdálenost 1. Na první kružnici zvolíme body A a B souměrně podle spojnice středů. Dokaž, že pro libovolný bod P na druhé kružnici platí $|PA|^2 + |PB|^2 \geq 2$. (Kolmogorov Memory Cup 1999)

Úloha 83. Na dané kružnici zvolíme dvě kolmé tětivy AB a CD. Ty se protnou v bodě S. Dokaž, že hodnota $|SA|^2 + |SB|^2 + |SC|^2 + |SD|^2$ nezávisí na volbě tětiv.

Aby ses nedivil(a), jak to, že jsme celý seriál vážili se všemi možnými vahami a teď se zbaběle vrátili k tomu, že jsou všechny stejné, uvedeme Steinerovu větu v úplnosti.

Úloha 84. (Vážená Steinerova věta) Nechť jsou $A_1, \dots, A_n$ body s vahami $v_1, \dots, v_n$ a celkovou vahou $V = v_1 + \cdots + v_n \neq 0$, a T jejich těžiště. Pak pro libovolný bod X platí

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot |XA_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot |TA_i|^2 + V \cdot |XT|^2.$$

Cvičení 85. Jak se změní výsledek cvičení 77?

Úloha 86. (znovu Stewartova věta) Uvažme bod D na straně BC trojúhelníka ABC. Označme d délku úsečky AD, m délku úsečky BD a n délku úsečky CD. Pro tyto délky platí vztah

$$mna + d^2a = mb^2 + nc^2.$$

Úloha 87. Je dán trojúhelník ABC a v něm bod P takový, že je součet čtverců jeho vzdáleností od stran nejmenší možný. Buďte D, E, F kolmé průměty P na strany trojúhelníka ABC. Ukaž, že je P těžiště DEF. (Oliforum 2017)

[10] A v 1D je těžiště jen průměr, takže má průměr nejmenší součet čtverců vzdáleností od všech bodů. Zcela mimochodem, to je dobré odůvodnění, proč se k výpočtu rozptylu používají čtverce a ne absolutní hodnoty.

Závěrem

A se Steinerovou větou končí i letošní seriál. Pokud jsi dočetl(a) až sem, velmi si Tě vážíme (s kladnými vahami, samozřejmě :)). Zrekapitulujme, co jsme se naučili. Pomocí vážení bodů jsme zavedli souřadnice na rovině, se kterými dokážeme hravě pracovat s přímkami, obsahy a dokonce i kružnicemi! No není to krásné? Samozřejmě, barycentrické souřadnice jsou užitečné při řešení geometrických olympiádních úloh. Před tím, než jen zvážíš řešení touto metodou, pamatuj na již známou mantru

(1) Úloha jde spočítat pomocí barycentrických souřadnic.
(2) Znám dobře všechna tvrzení a dokážu je obhájit.
(3) Mám na řešení čas.

Proto vždy zauvažuj, než začneš do úlohy bezhlavě mlátit, oko na řešitelné úlohy opět přichází pouze a jenom po počítání mnoha a mnoha jiných příkladů. Začni své první krůčky s námi, při řešení třetí seriálové série. Těšíme se na Tvá řešení :)

Pokud máš chuť vědět víc, můžeme Ti doporučit výborný textík od Evana Chena[11], anebo nám klidně napiš, rádi se s Tebou pobavíme.

Děkujeme všem, kteří se podíleli na tvorbě seriálu, zejména Hedvice, Klárce, Matějovi a Radkovi. Seriál pro Tebe psali Zdeněk Pezlar a Matouš Šafránek.

Návody k úlohám a cvičením

3. Dosaď do vzorce a spočítej po souřadnicích.

9. Dej přímku na osu y a těžiště do počátku. Pak vezmi zjednodušený vzorec těžiště a využij jen jeho x-ovou souřadnici.

10. A je doopravdy těžiště bodů B, C, D se správnými vahami. Vzpomeň na (komplexní) vzorec rovnoběžníka $A + C = B + D$.

16. Použij vzorec pro střed, počítej po souřadnicích.

19. Vynásob všechny souřadnice takovým číslem, aby měly součet 1.

21. Rozmysli si orientaci vzdáleností a převeď poměry do správného tvaru, například $CP : PB$ na straně BC.

24. Jednoduše dosazuj do obecné rovnice body, kterými přímka prochází.

25. Jakou bude mít ta přímka obecně rovnici?

26. K určení poměru na úsečce jiné než je strana trojúhelníka Ti může pomoct tvrzení 8.

29. Jaká je podmínka pro rovnoběžník? Přímka DM vyjde $x - y + 2z = 0$.

31. Goniometrické funkce a věta o ose úhlu. Vyjde $(0 : \tan\beta : \tan\gamma)$ a $(0 : b : c)$. Pokud Ti ortocentrum vyšlo jinak, ověř sinovou větou, jestli to není totéž.

[11] *https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf*

35. Obsahy prostě spočítej. Závislosti na délkách stran se můžeš zbavit sinovou větou, homogenní souřadnice pak stačí vydělit poloměrem kružnice opsané.

36. Dotyk kružnice vepsané se stranou BC má souřadnice $(0 : s-c : s-b)$, kružnice připsaná se dotýká stran BC, AB a AC po řadě v bodech $(0 : s-b : s-c)$.

39. První dva body plynou ze vzorce. Ve třetím uvaž, že $x_2 = kx_1$, $y_2 = ky_1$ a $z_2 = kz_1$. Ve čtvrtém vzorec roznásob a použij předchozí body.

43. Uvaž $P = (r, s, t)$, spočítej souřadnice zbylých bodů a determinant.

44. Stačí spočítat obsahy trojúhelníku $A'BC$, $AB'C$ a ABC'.

45. Začni bodem Z, pak vyjádři X a Y.

46. Použij kosinovou větu a Heronův vzorec.

48. P, Q, R, leží na přímce, když se dá P vyjádřit jako $P = kR + (1-k)Q$. Pak ukaž, že je determinant nulový.

49. Střed kružnice vepsané už jsme měli. Pro osu vnějšího úhlu dokaž pomocí sinové věty podobné pravidlo, jako je věta o ose úhlu.

51. Dané těžiště bude mít souřadnice $(b+c : a+c : a+b)$. Na zbytek použij větu o přímce.

52. Najdi v úloze rovnoběžník s délkou strany daného poloměru.

53. Upravuj a pamatuj, že pokud je výraz nulový vždy, když $x = y$, tak můžeš $x - y$ vytknout.

54. Vyjde $[AIT] = \frac{|c-b|}{3(a+b+c)}$, tři zlomky odhadni (jeden z nich bude alespoň dvojnásobek) a použij vzorec $2[ABC] = r(a+b+c)$.

56. Když už dokážeš, že je součin poměrů 1, máš v ruce i souřadnice (viz důkaz Cevovy věty).

58. Podle úlohy 36 je $D = (s-c : 0 : s-a)$. Spočítej přímku DE a střední příčku a dosaď do předchozí věty.

59. Cevova věta. Poměry na stranách, tedy i poměry souřadnic jsou převrácené.

62. Začni souřadnicemi průsečíku. Přece Tě nezastraší, že máš o souřadnici víc.

65. Vše spočítej a dosazuj podmínku na délky stran.

66. Souřadnice vzhledem k PAB. Využij stejnolehlost k získání nových kružnic, které prochází více vrcholy. Poté tečnu spočítej jako přímku, která po dosazení do rovnice kružnice bude mít dvojnásobný průsečík.

69. Body E a F najdi pomocí podobností.

70. Postupuj sporem a získej tři nerovnosti pro váhy, které nemohou současně platit.

71. Zaveď souřadnice vzhledem k trojúhelníku $M_AM_BM_C$, potom bude snadné počítat kružnice. Jak využít chordály v této úloze?

72. Jaká je chordála kružnic, které se dotýkají?

73. Najdi rovnici kružnice se středem v B a nulovým poloměrem – tedy kružnici, která obsahuje právě jeden bod. Pak hledej chordálu.

74. Protni dvě přímky, vyjde $K = (-a^2 : b^2 : c^2)$ a tedy se všechny přímky protínají v bodě $(a^2 : b^2 : c^2)$.

75. Dosaď do vzorce kružnice a počítej.

77. Kde má nejmenší hodnotu $|XT|^2$?

79. $|XO|$ bude pořád konstanta.

80. Střed je těžiště B a C, vrchol A má roli X.

81. $|AB| = |AG|$ a tak podobně.

82. Pomocí Steinera najdi P, kde to bude nejmenší.

83. Najdi těžiště a použij Steinera dokonce dvakrát.

84. Zopakuj původní důkaz, jen ho piš s vahami.

85. Skoro nijak, jen když je V záporné.

86. D je vážené těžiště B a C. Od A měříme.

87. Sporem (extremálním principem).

Řešení cvičení

3. Dosazením vyjde $\frac{A+2B+4C}{7}$. Sčítání a násobení reálným číslem se provádí po souřadnicích, takže x-ová souřadnice těžiště bude $\frac{2+2\cdot1+4\cdot6}{7}=4$ a y-ová souřadnice bude $\frac{5+2\cdot2+4\cdot3}{7}=3$. Těžiště má souřadnice $(4,3)$.

16. Její krajní body jsou $A=(1,0,0)$ a střed strany BC, bod $M=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Použijeme vzorec $\frac{A+M}{2}$ a vyhodnotíme zvlášť v každé souřadnici: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

19. $\left(\frac{r}{r+s+t},\frac{s}{r+s+t},\frac{t}{r+s+t}\right)$. Víme, že $(r:s:t)=(kr:ks:kt)$, najdeme tedy takové k, aby platilo $kr+ks+kt=1$, odkud už vyjde $k=\frac{1}{r+s+t}$.

21. (1) Jestliže leží P na straně (úsečce) AC, mají PA a PC opačná znaménka, takže máme $\frac{PA}{PC}=-k$, tedy $\frac{AP}{PC}=k$. Podle lemmatu musí být poměr souřadnic $\frac{z}{x}$ roven k,[12] takže můžeme homogenní souřadnice P zapsat jako $(1:0:k)$ neboli normovaně $\left(\frac{1}{k+1},0,\frac{k}{k+1}\right)$

(2) Jestliže leží P na straně BC, má PC a BC stejné znaménko, takže máme $\frac{PC}{BC}=k$. Tím už z druhé varianty lemmatu vyjde, že souřadnice y je rovna k, takže celkově musí být souřadnice $(0,k,1-k)$. Alternativně můžeme zacílit na první variantu lemmatu, pak potřebujeme dostat poměr PC a BP. Proto upravíme výraz na $PC=k\cdot BC$ a BC rozepíšeme: $PC=k(BP+PC)$. Dostaneme $PC(1-k)=k\cdot BP$, čili $\frac{PC}{BP}=\frac{k}{1-k}$. Podle lemmatu má P souřadnice $(0:k:1-k)$, což už je dokonce normované, takže $(0,k,1-k)$.

(3) Jestliže leží P na přímce BC mimo stranu BC, má PB a PC stejnou orientaci, takže $\frac{PB}{PC}=k$. Potřebujeme ale $\frac{BP}{PC}$, zlomek s jednou orientací opačnou, který vyjde $\frac{BP}{PC}=\frac{-PB}{PC}=-k$. Dostáváme souřadnice $(0:1:-k)=\left(0,\frac{1}{1-k},\frac{-k}{1-k}\right)$.

24. (1) Dosadíme-li do $ux+vy+wz=0$ bod $A=(1,0,0)$, dostaneme $u=0$.

(2) Z prvního bodu máme tvar $vy+wz=0$, dosadíme střed strany BC, tj. $(0:1:1)$, dostaneme $v+w=0$, takže $y-z=0$.

(3) Dosadíme středy stran AB a AC, tj. $(1:1:0)$ a $(1:0:1)$. Dostaneme $u+v=0$ a $u+w=0$. Zvolíme si třeba $u=1$ a dopočítáme $v=w=-1$, čili rovnice je $x-y-z=0$.

25. Z předchozího cvičení už víme, že rovnice přímky skrz A má tvar $vy+wz=0$. Z toho už vidíme, že podíl souřadnic y a z nezávisí na souřadnici x, takže bude stejný pro bod P a průsečík se stranou. A bod na straně má navíc nulové x, čili ho s tím, co víme, můžeme zapsat jako $(0:s:t)$.

26. Máme $E=(3:0:1)$, $F=(3:1:0)$. Najdeme rovnici přímky BE $ux+vy+wy=0$: dosadíme $B=(0,1,0)$, dostaneme $v=0$; dosadíme E, dostaneme $3u+w=0$, to splňuje například $u=1$ a $w=-3$, což dává rovnici $x-3z=0$. Analogicky má CF rovnici $x-3y=0$. Jejich průsečík splňuje tyto dvě rovnice, můžeme napsat třeba $O=(3:1:1)$. Bod D je už podle předchozího cvičení 25 $D=(0:1:1)$ (střed strany BC), dá se ovšem samozřejmě odvodit i přes rovnici přímky AO, $y-z=0$. Tohle celé mimochodem snadno vyplyne z Cevovy věty, se kterou budeme mít čest za chvíli.

K určení poměru můžeme použít úvahu s vážením. O, B, E leží na přímce, takže můžeme vyjádřit B jako těžiště $B=tE+(1-t)O$. Pak podle tvrzení 8 platí $t=\frac{OB}{OE}$, což je kýžený poměr.

[12] Obráceně než poměr vzdáleností. Máme poměr vzdáleností od vrcholu A a k vrcholu C, ten je roven poměru souřadnic od vrcholu C a od vrcholu A.

Napíšeme si proto libovolnou složku (souřadnici) rovnice $B = tE + (1-t)O$ a z ní vyjádříme t.[13] K tomu potřebujeme body normované: $B = (0,1,0)$, $E = \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$, $O = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Vezmeme třeba druhou souřadnici a má platit $1 = t \cdot 0 + (1-t) \cdot \frac{1}{5}$ a vyjádříme $t = -4$. To znamená, že jsou body B a E na opačných stranách od O a v absolutní hodnotě je poměr $\frac{|OB|}{|OE|} = 4$.

Druhý poměr získáme stejným postupem. $D = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. $D = tA + (1-t)O$, například z první souřadnice vyjde $0 = t + (1-t)\frac{3}{5}$ a pak $t = -\frac{3}{2}$, čili $\frac{|OD|}{|OA|} = \frac{3}{2}$.

30. Buď rovnice dané přímky $ux + vy + wz = 0$. Přímky p a AB se neprotínají, tedy soustava $ux + vy + wz = 0$, $x = 0$ a $x + y + z = 1$ nemá řešení. Avšak první dvě rovnice vedou na řešení $(0 : w : -v)$. Aby toto nebyl vážený bod, musí být součet vah roven 0 (pak už se nedá normovat), tedy $w = v$ a přímka je $0 = ux + v(y+z) = u + v(1-x)$. Ekvivalentně bude mít daná přímka tvar $x = c$, kde c je nějaká konstanta.

35. Vyjde střed kružnice opsané $O = (\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$ a ortocentrum $H = (\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$.

Jak na střed kružnice opsané? Označme poloměr kružnice opsané r. Podle věty o obvodovém úhlu je $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC = 2\alpha$. Obsah trojúhelníka BOC je pak podle věty 33 z prvního dílu seriálu roven $\frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha$ (rozmysli si, že dokonce orientovaně). Podle obsahové definice tudíž máme

$$O = \left(\frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha : \frac{1}{2}r^2 \sin 2\beta : \frac{1}{2}r^2 \sin 2\gamma\right) = (\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin\gamma).$$

Jak na průsečík výšek? Můžeme si vzpomenout na úlohu 31, podle které je pata výšky rovna $(0 : \tan\beta : \tan\gamma)$, a cvičení 25, podle nějž je poměr souřadnic y a z u průsečíku výšek stejný, cyklicky můžeme totéž uvážit pro každou stranu a dostaneme $H = (\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$.

Můžeme ovšem rovněž spočítat obsah $[HBC]$. Buď P pata výšky z A. Platí $PC = b \cdot \cos\gamma$. Výšky z C a z A svírají úhel β, takže platí

$$HP = PC \cdot \operatorname{cotg}\beta = PC \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = b\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta}.$$

Obsah pak spočítáme jako

$$[HBC] = \frac{1}{2}a \cdot HP = \frac{1}{2}ab\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta}.$$

Upravíme pomocí sinové věty vzorci $a = 2r\sin\alpha$ a $\frac{b}{\sin\beta} = 2r$, kde r je poloměr kružnice opsané:

$$[HBC] = 2r^2\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha = 2r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\alpha.$$

Obsahy $[AHC]$ a $[ABH]$ odvodíme stejně, vyjdou jen s cyklickou záměnou úhlů. Podle obsahové definice vyjde

$$H = (2r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\alpha : 2r^2\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha\tan\beta : 2r^2\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta\tan\gamma).$$

To po vydělení $2r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ vychází opravdu $(\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$. Stojí za povšimnutí, že když je trojúhelník pravoúhlý, tak trochu podvádíme a dělíme nulou. Jeden tangens vyjde jakoby nekonečný, což odpovídá tomu, že je ortocentrum ve vrcholu.

39. (1) V každém součinu, který sčítáme, se právě jeden člen vynásobí daným reálným číslem, takže se celý determinant vynásobí daným reálným číslem.

[13] Ne úplně libovolnou, pokud mají tři body některou souřadnici všechny stejnou, nepodaří se nám z ní t vyjádřit.

(2) Z předchozího bodu i přímo ze vzorce plyne, že je nulový.

(3) Podle podmínky existuje takové k, že $x_2 = kx_1$, $y_2 = ky_1$ a $z_2 = kz_1$. Pak když vzorec přeuspořádáme s tímto dosazením, vyjde

$$x_1(ky_1z_3 - y_3kz_1) - y_1(kx_1z_3 - x_3kz_1) + z_1(kx_1z_3 - x_3kz_1) =$$
$$= kx_1y_1(z_3 - z_3) + ky_1z_1(x_3 - x_3) + kz_1x_1(y_3 - y_3) = 0.$$

Stejně by to vyšlo, i pokud by byly jiné dva řádky (homogenně) stejné.

(4) Pokud na místo x_1 napíšeme $x_1 + kx_2$ a podobně ostatní souřadnice, rozepíšeme vzorec

$$(x_1 + kx_2)(y_2z_3 - y_3z_2) - (y_1 + ky_2)(x_2z_3 - x_3z_2) + (z_1 + kz_2)(x_2z_3 - x_3z_2) =$$
$$= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - \cdots + kx_2(y_2z_3 - y_3z_2) - \cdots$$

Úplné rozepsání si odpustíme, vidíme, že vyjde součet

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kx_2 & ky_2 & kz_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + 0,$$

v němž je druhý sčítanec nulový podle předchozího bodu cvičení. Když přičteme k prvnímu řádku násobek druhého, determinant se nijak nezmění. Podobným rozdělením na dva determinanty vyjde totéž, když k jakémukoliv řádku přičtu násobek jakéhokoliv jiného.

43. Nechť má P souřadnice (r, s, t). Přímka AP prochází vrcholem A, takže je tvaru $uy + wz = 0$, a bodem P, takže platí $us + wt = 0$, například může být $u = t$ a $w = -s$, tedy je to přímka $ty - sz = 0$. Pak najdeme její průsečík se stranou BC danou rovnicí $x = 0$, to bude

$$D = (0 : s : t) = \left(0, \frac{s}{s+t}, \frac{t}{s+t}\right).$$

Body E, F vyjádříme analogicky jako $E = \left(\frac{r}{t+r}, 0, \frac{t}{t+r}\right)$, $F = \left(\frac{r}{r+s}, \frac{s}{r+s}, 0\right)$. Do determinantu budeme totiž potřebovat normalizované body. Chceme vlastně dokázat $\frac{[DEF]}{[ABC]} \leq \frac{1}{4}$, podíl $\frac{[DEF]}{[ABC]}$ je podle věty 41 roven determinantu

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{s}{s+t} & \frac{t}{s+t} \\ \frac{r}{t+r} & 0 & \frac{t}{t+r} \\ \frac{r}{r+s} & \frac{s}{r+s} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(s+t)(t+r)(r+s)} \begin{vmatrix} 0 & s & t \\ r & 0 & t \\ r & s & 0 \end{vmatrix} = \frac{2rst}{(s+t)(t+r)(r+s)}.$$

Musíme dokázat $\frac{2rst}{(s+t)(t+r)(r+s)} \leq \frac{1}{4}$. Jelikož je bod P uvnitř trojúhelníka, jsou jeho souřadnice kladné, takže můžeme nerovnost ekvivalentně přenásobit na $8rst \leq (s+t)(t+r)(r+s)$, což platí díky AG nerovnosti aplikované na všechny tři členy vpravo ($s + t \geq 2\sqrt{st}$ apod.). Vidíme tedy, že rovnost nastane, když $r = s = t$, tedy P je těžiště trojúhelníka.

48. Předpokládejme, že $Q \neq R$, protože jinak je determinant automaticky nulový. Body P, Q, R leží na přímce, právě když se P dá navážit, tedy vyjádřit jako $kR + (1-k)Q$. Pokud označíme souřadnice $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$, $R = (x_3, y_3, z_3)$, platí podle čtvrtého bodu cvičení 39, že

$$\begin{vmatrix} kx_3 + (1-k)x_2 & ky_3 + (1-k)y_2 & kz_3 + (1-k)z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kx_3 & ky_3 & kz_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

což je nula podle třetího bodu téhož cvičení. Druhá implikace, že je-li determinant nulový, můžeme nějaký bod vyjádřit jako těžiště druhých, platí taky (což je ostatně patrné ze znění důsledku), ale dokázat ji pomocí vážení je těžší.

56. Body vyjdou po řadě $(1 : 1 : 1)$, $(a : b : c)$, $(\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$, $\left(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}\right)$ a $(s-a : s-b : s-c)$, kde s je polovina obvodu.

Počítáme sice vždy výraz

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB},$$

ale také víme, že poměr vzdáleností bodu na straně k vrcholům odpovídá poměru souřadnic (akorát převráceně). Těžnice stranu protíná v jejím středu, tedy $(0 : 1 : 1)$, takže vyjde jednoduše $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$. Podíváme-li se do důkazu Cevovy věty nebo do cvičení 25, snadno určíme poměry souřadnic průsečíku. Vidíme je v poměrech, které se násobí v Cevově větě. V případě těžiště tedy $(1 : 1 : 1)$.

Poměry u paty osy úhlu a výšky jsme už měli v úloze 31, jsou to $(0 : b : c)$ a $(0 : \tan\beta : \tan\gamma)$. Cyklickou záměnou dostaneme paty na ostatních stranách a vyjde

$$\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1, \qquad \frac{\tan\gamma}{\tan\beta} \cdot \frac{\tan\alpha}{\tan\gamma} \cdot \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 1.$$

Jak na spojnice vrcholů s dotykem kružnice vepsané? Označme d, e, f délky tečen z vrcholů A, B, C ke kružnici vepsané. Tedy $AF = EA = d$, $BD = FB = e$ a $CE = DC = f$. Vyjde $\frac{e}{f} \cdot \frac{f}{d} \cdot \frac{d}{e} = 1$. Dále je-li D' bod doteku kružnice připsané, platí $D'C = e$ a $BD' = f$ a podobně, takže vyjde $\frac{f}{e} \cdot \frac{d}{f} \cdot \frac{e}{d} = 1$. Tím jsme pomocí Cevovy věty lehce dokázali, že se přímky v bodech (4) a (5) protnou, ale chceme-li znát souřadnice průsečíku, musíme poměry doopravdy vyjádřit. To jsme dělali už v úloze 36: platí $d + e = c$, $e + f = a$, $f + d = b$, z čehož umíme vyjádřit $d = s - a$, $e = s - b$, $f = s - c$, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Tak vyjdou souřadnice uvedené na začátku řešení.

59. Platí $BD' = DC$ a podobně, takže

$$\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B} = \frac{DC}{BD} \cdot \frac{EA}{CE} \cdot \frac{FB}{AF} = \frac{1}{\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}},$$

což je podle Cevovy věty rovno 1. Levý výraz je tedy také roven jedné, a proto se i přímky AD', BE' a CF' protínají v jednom bodě $P' = (u', v', w')$. Tomuto bodu se říká izotomický kamarád bodu P. Z lemmatu 20 dostaneme

$$\frac{w'}{v'} = \frac{BD'}{D'C} = \frac{DC}{BD} = \frac{v}{w}$$

a podobně pro ostatní souřadnice. Bod P' musí mít tedy převrácené poměry každých dvou souřadnic, což vyjde, když bude mít všechny souřadnice převrácené, tedy $P' = \left(\frac{1}{u} : \frac{1}{v} : \frac{1}{w}\right)$.

72. Označme M, N středy stran AB a AC. Pak je daná tečna pouze chordálou dvou dotýkajících se kružnic (ABC) a (AMN). Snadno ověříme, že kružnice opsané trojúhelníku AMN má rovnici $-a^2yz - b^2xz - c^2xy + \left(\frac{c^2}{2}y + \frac{b^2}{2}z\right)(x + y + z) = 0$. Chordála této kružnice a kružnice opsané (ABC) pak spočítáme jako rozdíl příslušných rovnic, získáme díky $x + y + z \neq 0$ přesně hledaný tvar.

77. Podle Steinerovy věty je to rovno $\sum_{i=1}^{n} |TA_i|^2 + n \cdot |XT|^2$, z toho na poloze bodu X závisí jen člen $|XT|^2$, který nabývá nejnižší hodnoty, když je $X = T$.

79. Leží-li X na kružnici se středem v O a poloměrem r, je

$$\sum_{i=1}^{n} |OA_i|^2 + n \cdot |XO|^2 = \sum_{i=1}^{n} |OA_i|^2 + nr^2,$$

což nezávisí na poloze bodu X.

85. Pokud je V kladné, pak má $V \cdot |XT|^2$, tedy i $\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot |TA_i|^2 + V \cdot |XT|^2$, minimum pro $X = T$. Pokud je V záporné, tak maximum.