Analytická geometrie II – $\mathbb{K}$omplexní výrazy

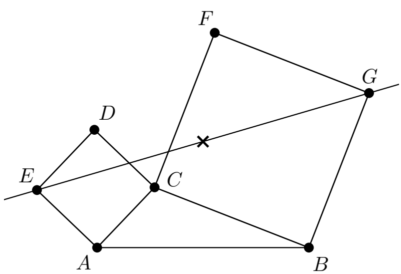
Milý příteli,

nastává ten čas, kdy se naučíš kouzla, o kterých jsi snad slyšel(a) vyprávět zkušené řešitele! Poznáš techniku, kterou opravovatelé nevidí rádi, ale nakonec za ni stejně musí dát plný počet bodů, protože... funguje! Minule jsme tu vydatně prozkoumali goniometrické funkce. Nyní navážeme na základy z minulého dílu, ale vydáme se jinou cestou. Tentokrát se totiž podíváme zblízka na komplexní čísla a jejich využití v počítání olympiádní geometrie.

Možná sis všiml(a), že počítání v kartézských souřadnicích může být neuvěřitelně otravné. Nejenže musíš všechno psát pro každou souřadnici zvlášť, ale jakmile dojde na délky nebo nedejbože úhly, vyjdou výrazy příšerně dlouhé, pokud vůbec vyjádřit jdou. Komplexní čísla jsou jako kartézské souřadnice, jenom vylepšené.

Naučíme se, jak vnímat mnohá geometrická zobrazení pomocí komplexních čísel. Speciálně, že otáčení, překlápění a vůbec obecná spirální podobnost jsou v řeči komplexních čísel asi tak přirozené jako přirozená čísla. Představu Ti vytvoří následující motivační úložka:

Příklad 1. (motivační) V rovině uvažme úsečku AB. Pro libovolný bod C na dané polorovině určené přímkou AB zkonstruujme vně trojúhelníka ABC čtverce $ACDE$ a $BCFG$. Ukažte, že všechny přímky EG prochází pevným bodem.



Ač může zadání vypadat neuchopitelně, pomocí komplexních čísel si s takovým příkladem hravě poradíme. Propojení komplexních čísel a zobrazení nás pak povede na cestu poznání. Na konci tohoto dílu snadno poznáš, kdy libovolné čtyři body tvoří rovnoběžník, kdy leží na kružnici, kdy nějaké tři body leží na přímce... Tím to ale ani zdaleka nekončí!

Samozřejmě, mluvíme zde o komplexních číslech z toho důvodu, že jsou vhodná na řešení olympiádních úloh. Předvedeme si proto mocný nástroj, jednotkovou kružnici, před kterou kdejaká úloha dostane třes do kolen. Ke konci dílu tuto kružnici prozkoumáme ještě více a povíme si, jak pracovat v komplexní rovině s pravidelnými mnohoúhelníky.

Varování

Na začátku minulého seriálu jsme Tě varovali před nástrahami počítání. Všechna varování zde platí na desetkrát! I ze zkušenosti autorů, správně na soutěži předvést řešení pomocí komplexních čísel stojí na několika důležitých pilířích.

(1) Úloha jde spočítat pomocí komplexních čísel. Jak něco takového poznat? Počítat mnoho a mnoho úloh – poté už získáš odhad. Jak uvidíš, úlohy s jednou centrální kružnicí jsou na ráně.

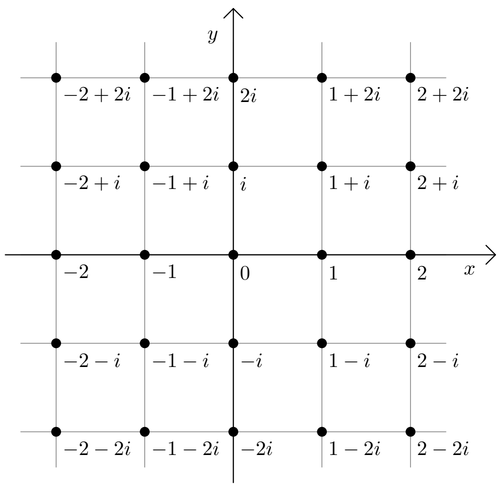
(2) Znám dobře všechna tvrzení a dokážu je obhájit. Tady není moc co vysvětlovat. Než se odvážíš řešit úlohu pomocí komplexních čísel, buď připraven(a) obhájit všechna tvrzení, která využíváš. Speciálně doporučujeme se odkázat na zdroj, nebo v řešení potřebná tvrzení dokázat.

(3) Mám na řešení čas. Soutěž je intenzivní záležitost – často míváš 4,5 hodiny na tři úlohy. Před tím, než se vydáš hodinu počítat příklad, radši si rozmysli, že to bude zvládnutelné. Přepisovat výrazy dlouhé celý řádek přece jenom zabere trochu času.

Přečetl(a) sis tento seznam? Výborně, konec řečí, jdeme na to! Znáš-li komplexní čísla, nebude pro Tebe, věříme, těžké úvod jen přeletět.

Komplexní rovina

Připomeňme si kartézskou soustavu souřadnic, kde každému bodu roviny přiřadíme souřadnice (a, b). Komplexní rovinu definujeme ze začátku úplně stejně, pouze ji zapisujeme jinak. Řekneme, že bodu (a, b) přísluší komplexní číslo $z = a + b \cdot i$, kde i je *imaginární jednotka.* Imaginární jednotka pro nás prozatím nemusí nic znamenat, jenom to, že koeficient u ní je souřadnice y. Číslo a nazýváme *reálnou složkou* a číslo b *imaginární složkou* čísla z. Zatím jen přejmenováváme, dříve bychom a nazvali x-ovou souřadnicí a b y-ovou.



Osu x můžeme nyní nazývat *reálnou osou*, protože na ní leží reálná čísla, a osu y *imaginární osou*, protože na ní leží takzvaná *ryze imaginární čísla*, tedy čísla, která mají nulovou reálnou složku. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$.

Úmluva 2. Domluvme se, že pokud není řečeno jinak, tak bodu označenému velkým písmenem (např. A) v komplexní rovině přísluší komplexní číslo, které budeme značit stejným malým písmenem (např. a). Pozor ale, když komplexní číslo rozepíšeme jako $a + bi$, tak reálná čísla a, b body nejsou.

Sčítání a odčítání komplexních čísel definujeme přirozeně, jako by i byla proměnná: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. Stejně tak násobení nebo dělení reálným číslem: $k(a + bi) = ka + kbi$. Když se díváme na tyto operace komplexních čísel, reálná a imaginární složka spolu nijak nemluví – operace provádíme po složkách. Děláme tak totéž, co bychom mohli snadno dělat v kartézských souřadnicích, jenom si ušetříme psaní operace pro každou složku.

Příklad 3. Rozmysleme si, že sčítání komplexních čísel a násobení reálným číslem mají následující hezké vlastnosti:

(1) Střed úsečky AB je $\frac{a+b}{2}$.
(2) Překlopení bodu B podle bodu A je $2a - b$.
(3) Body $ABCD$ tvoří rovnoběžník, právě pokud platí $a + c = b + d$.
(4) Těžišti trojúhelníka ABC přísluší komplexní číslo $\frac{a+b+c}{3}$.
(5) Zobrazení $z \mapsto z + c$ dané přičtením pevného čísla $c \in \mathbb{C}$ je posunutí v rovině.
(6) Zobrazení $z \mapsto kz$ dané vynásobením pevným číslem $k \in \mathbb{R}$ je stejnolehlost v rovině se středem v počátku a koeficientem k.

První vlastnost je jasná z naší definice sčítání – komplexním číslům $a + bi$ a $c + di$ přísluší v kartézské rovině body (a, b) a (c, d). Střed těchto dvou bodů je určen jako $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$, přísluší mu tedy komplexní číslo $\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}i$. Druhá vlastnost plyne z té první, nyní je A střed úsečky BC, tj. $a = \frac{b+c}{2}$, z čehož získáme $c = 2a - b$. Rozmysleme si, že třetí vlastnost je též důsledkem té první – kdy tvoří čtyřúhelník $ABCD$ rovnoběžník? Právě tehdy, když středy úhlopříček AC a BD splývají, tj. $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$. Číslo příslušící těžišti bude intuitivně příslušné průměru komplexních čísel a, b, c, proč přesně to platí si ukážeme za pár stran.

Zbylé dva body jsou neméně důležité, ale věříme, že si je zvládneš rozmyslet sám/sama. Pomoct Ti může obrázek výše.

Oproti kartézským souřadnicím mají komplexní čísla jednu zásadní výhodu, můžeme je násobit! Tady konečně dodáme „význam“ imaginární jednotce, když si zavedeme, že $i^2 = -1$ a že násobit můžeme roznásobením:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Pokud jsi komplexní čísla ještě neviděl(a) a trápí Tě, jak můžeme jen tak říct něco jako $i^2 = -1$, zkus si rozmyslet, že za této definice platí všechny rozumné vlastnosti násobení známé z reálných čísel jako $a(bc) = (ab)c$, $a(b+c) = ab+ac$, a že tedy s komplexními čísly můžeme normálně počítat. Brzo uvidíš, proč to dává smysl dělat takhle.

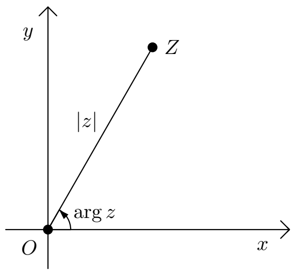
V tomto díle totiž budeme studovat hlavně geometrické vlastnosti, které násobení přináší. Máme třeba komplexní číslo z a uvážíme zobrazení $x \mapsto zx$, tedy zobrazení, které libovolnému bodu X v rovině přiřadí bod X' takový, že $x' = z \cdot x$. Jaké je to zobrazení? Víme už, že je-li z reálné číslo, je to stejnolehlost. Co ale obecně?

Absolutní hodnota a argument

Každý bod na kružnici $x^2 + y^2 = r^2$ (se středem v počátku a poloměrem r) můžeme zapsat ve tvaru $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$. Pro komplexní číslo $z = a + bi$ tedy uvážíme vzdálenost bodu (a, b) v kartézské rovině od počátku soustavy souřadnic a nazveme ji *absolutní hodnotou* čísla z, značíme $|z|$. Můžeme jej tak zapsat v *goniometrickém tvaru* $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, kde úhel α nazýváme *argumentem* čísla z a značíme $\arg z$. Úhel α je určen jednoznačně až na přičtení násobku $360°$, což nám vadit nebude. Můžeme tedy psát

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)).$$

Pokud víš o polárních souřadnicích, není tohle nic jiného než zápis komplexního čísla v polárních souřadnicích.



Pozorování 4. *Je-li $z = a + bi$, pak $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Cvičení 5. Je-li O počátek soustavy souřadnic a Z libovolný jiný bod, je argument čísla z roven orientovanému úhlu $\sphericalangle(\text{osa } x, \overrightarrow{OZ})$.

Tvrzení 6. *Pro komplexní čísla w, z platí $|wz| = |w| \cdot |z|$ a $\arg(wz) = \arg w + \arg z$.*

Důkaz. Zapíšeme si čísla v goniometrickém tvaru,

$$w = |w|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \qquad \text{a} \qquad z = |z|(\cos(\beta) + i\sin(\beta)),$$

kde $\alpha = \arg w$ a $\beta = \arg z$. Součin wz podle těchto vzorců roznásobíme

$$wz = |w| \cdot |z|(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)).$$

Podle součtových vzorců, které jsme viděli v prvním díle, dostáváme

$$wz = |w| \cdot |z|(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)).$$

Ovšem zapíšeme-li wz taky v goniometrickém tvaru jako

$$wz = |wz| \cdot (\cos(\arg(wz)) + i\sin(\arg(wz)),$$

vidíme, že můžeme hodnoty ztotožnit. Čili $|wz| = |w| \cdot |z|$ a $\arg wz = \alpha + \beta = \arg w + \arg z$. □

Co se stane, když odečteš dva body $a + bi$ a $c + di$ a podíváš se na absolutní hodnotu jejich rozdílu? Díváme se na absolutní hodnotu komplexního čísla $(a - c) + (b - d)i$, což je rovno $\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$, tedy podle Pythagorovy věty přesně vzdálenosti bodů (a, c) a (b, d) v kartézské soustavě souřadnic. Získáme tak užitečné pozorování ohledně vzdáleností.

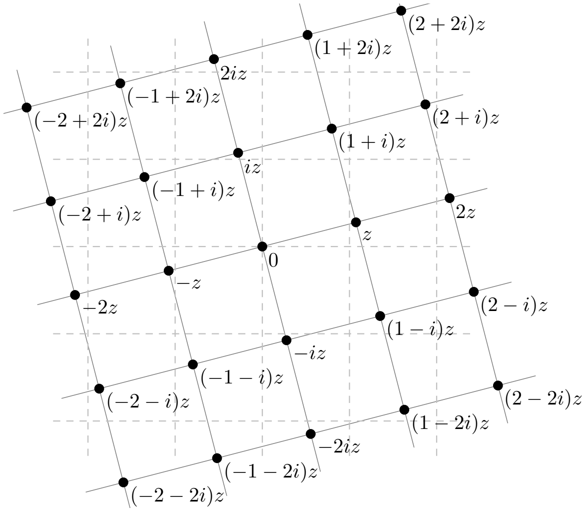
Pozorování 7. *Vzdálenost bodů A a B v komplexní rovině je rovna $|a - b|$.*

Cvičení 8. Rozmysli si, jak bys v komplexní rovině zakreslil(a) všechna čísla s absolutní hodnotou 1. Z toho si zkus odvodit obecný tvar kružnice v komplexní rovině.

Pozorování 9. *Zobrazení $x \mapsto zx$ dané vynásobením čísla s pevným $z \in \mathbb{C}$ je spirální podobnost*[1] *se středem v počátku, která otáčí o úhel $\arg z$ a stejnolehlí s koeficientem $|z|$.*

[1] složení stejnolehlosti a otočení

Důkaz. Víme, že zx má $|z|$-krát větší absolutní hodnotu než x, čili je doopravdy z-krát dál od počátku. Argument má větší o $\arg z$, takže svírá s osou x o $\arg z$ větší úhel, čili je oproti x opravdu otočený o $\arg z$. $\square$



To je pěkná vlastnost, že? Právě kvůli tomu jsme si zavedli násobení komplexních čísel.

Cvičení 10. Najdi komplexní číslo z takové, že násobení číslem z provádí v rovině

(1) středovou souměrnost,
(2) otočení o 90° proti směru, respektive po směru, hodinových ručiček,
(3) otočení o 120° proti směru hodinových ručiček.

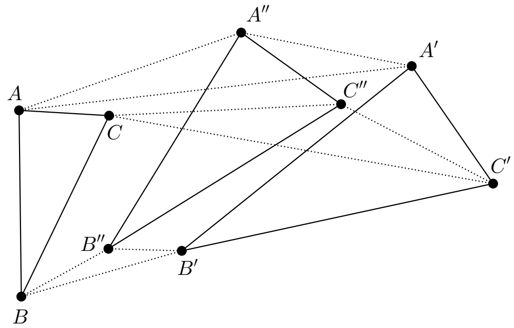
Jsou-li trojúhelníky ABC a DEF přímo podobné, pojďme si rozmyslet, jak najít podobnost, která je na sebe převádí. Nejprve $\triangle ABC$ zvětšíme, aby byl shodný s DEF. Pak ho otočíme, aby byly trojúhelníky stejně orientované. Nyní už získáme dva stejně velké a stejně orientované trojúhelníky, čili existuje posunutí, které transformovaný trojúhelník ABC převádí na DEF. Takto je možné libovolnou přímou podobnost složit ze spirální podobnosti a posunutí. V řeči komplexních čísel to znamená, že každá podobnost se dá vyjádřit zobrazením $x \mapsto zx + k$ pro nějaká $z, k \in \mathbb{C}$. V našem případě by platilo $d = za + k, e = zb + k, f = zc + k$.

Cvičení 11. (Střed spirální podobnosti) Nechť jsou AB, CD dvě úsečky, které na sebe nejde dostat pouze posunutím. Dokaž, že existuje bod M takový, že $\triangle ABM \sim \triangle CDM$.

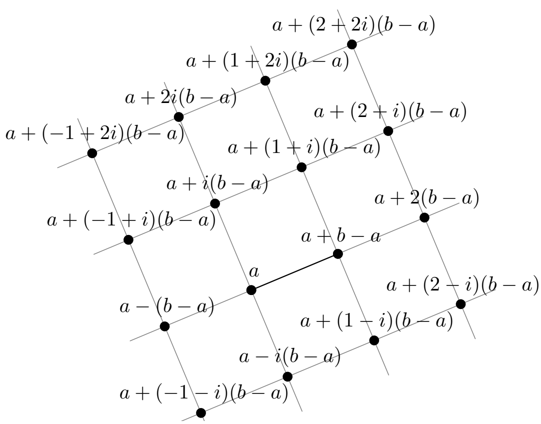
Když máme dva podobné útvary, vždy můžeme najít bod, který bude středem spirální podobnosti převádějící tyto útvary na sebe. Pokud s nějakou takovou podobností pracujeme, může se hodit položit si střed spirální podobnosti do bodu 0. V takovém případě daná spirální podobnost bude jen násobení číslem z.

Cvičení 12. (Spirálka chodí po dvou) Nechť se body X, Y zobrazí spirální podobností se středem S na body X', Y' (tj. trojúhelníky XYS a $X'Y'S$ jsou si podobné). Pak existuje spirální podobnost se středem S, která zobrazí X na Y a X' na Y'.

Úloha 13. (Klouzání) V této úloze uvažujme jen přímé podobnosti. Nechť platí $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Sestrojme body A'', B'', C'' tak, aby platilo $\triangle AA'A'' \sim \triangle BB'B'' \sim \triangle CC'C''$. Tyto trojúhelníky můžou být i degenerované, například může být bod A'' střed úsečky AA' a podobně B'', C''. Potom platí dokonce $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$.



Cvičení 14. Jaký vzorec má střed čtverce nad úsečkou AB? Co střed rovnostranného trojúhelníka nad úsečkou AB?

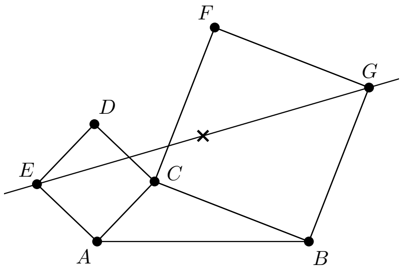


Úvodní příklad v sobě skrývá hned dva čtverce, což Ti určitě napovídá, že jsme jej neuvedli pro nic za nic. Pojďme se mu spolu podívat na zub.

Příklad 15. (znovu) V rovině uvažme úsečku AB. Pro libovolný bod C na dané polorovině určené přímkou AB zkonstruujme vně trojúhelníka ABC čtverce $ACDE$ a $BCFG$. Ukažte, že všechny přímky EG prochází pevným bodem.

Nejprve se zamysleme, o jaký bod by se mohlo jednat. Tvrzení nám něco říká o všech možných přímkách, z nichž si můžeme pár vybrat a podívat se, kterým bodem všechny prochází. Pokud překlopíme C podle osy úsečky AB, překlopí se celý obrázek i výsledná přímka EG. Průsečík dvou překlopených přímek musí být na ose úsečky AB, tam by tedy měl být průsečík všech.

Pokud dále zvolíme bod C na ose úsečky AB tak, že je ABC pravoúhlý trojúhelník, pak přímka EG prochází touto volbou bodu C, musí to proto být hledaný bod.



Řešení. Nyní už máme intuici, který bod hledáme. Přesuňme se do komplexní roviny a položme $a = -1$, $b = 1$ a volme body c z poloroviny, kde všechny body mají kladnou imaginární složku. Polorovina ve skutečnosti není omezující, jen nám udává, kterým směrem jsou čtverce vně. Chceme pak ukázat, že všechny přímky eg procházejí bodem i.

Tak jako ve cvičení 14 si zjistíme souřadnice relevantních vrcholů čtverce (jsou ostatně vidět z obrázku u cvičení). Máme tak

$$\begin{aligned} e &= a + i(c - a) = -1 + i(c + 1) = ic - 1 + i, \\ g &= c + (1 + i)(b - c) = c + (1 + i)(1 - c) = -ic + 1 + i. \end{aligned}$$

Když se ale podíváš na čísla e a g, tak se dokonce zdá, že střed úsečky EG bude roven i. A opravdu

$$\frac{e + g}{2} = \frac{ic - 1 + i - ic + 1 + i}{2} = i.$$

Máme hotovo.

Úloha 16. V rovině uvažme úsečku AB. Pro libovolný bod C v dané polorovině určené přímkou AB zkonstruujme vně trojúhelníka ABC čtverce $ACDE$ a $BCFG$. Dále sestrojme takový bod K, že je $GCDK$ rovnoběžník. Ukažte, že poloha bodu K nezávisí na poloze bodu C.

Úloha 17. Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Nad stranami AB, CD sestrojíme čtverce, jejich středy označíme K, M. Pod stranami BC, DA sestrojíme čtverce, jejich středy označíme L, N. Dokaž, že je $KLMN$ rovnoběžník.

Vraťme se k algebraickým vlastnostem komplexních čísel. Reálná čísla dělíme snadno, jak ale podělíme komplexní číslo číslem komplexním? Pomocí goniometrického tvaru bychom mohli komplexní čísla dělit tak, že bychom podělili absolutní hodnoty a odečetli argumenty. Při praktickém počítání si komplexní čísla (většinou) explicitně nerozepisujeme, ať už do tvaru kartézského $z = a + bi$ nebo goniometrického $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$ – ty využíváme jen k důkazům tvrzení. Podíváme se na jednu užitečnou konstrukci, která nám pomůže se těmto tvarům vyhnout.

Sdružení

Definice 18. Komplexnímu číslu $z = a + bi$ definujeme *sdružené číslo* $\overline{z} = a - bi$.

Snadno nahlédneme[2], že operace „sdružení komplexního čísla“ vyjadřuje geometricky překlopení přes reálnou osu. Podobně samozřejmé je i to, že platí $\overline{\overline{z}} = z$.

Ovšem z a $\overline{z}$ mají i jiný vztah. Jejich součin není nic jiného, než $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$. Shrňme tato pozorování.

Tvrzení 19. *Pro každé komplexní číslo z platí $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.*

[2] například na úvodním obrázku komplexní roviny

Cvičení 20. Pro která komplexní čísla platí $\overline{z} = z$? A co $\overline{z} = -z$?

Cvičení 21. Rozmysli si, že všechny nepřímé podobnosti v rovině jsou tvaru $x \mapsto z\overline{x} + k$ pro nějaká $z, k \in \mathbb{C}$. Speciálně toho tvaru jsou všechny osové souměrnosti.

Uveďme si ještě pár základních vlastností této operace. Neboj, nečeká nás nic složitého. Jak jsme už nastínili, můžeme pomocí ní snáze dělit komplexní čísla.

Cvičení 22. Rozmysli si, že $a/b = a\overline{b}/|b|^2$. Jelikož je $|b|^2$ reálné číslo, je na rozdíl od b snadné jím dělit. Čemu je rovno $(8+i)/(2-3i)$?

Cvičení 23. Absolutní hodnota a argument se kamarádí s násobením – tím pádem i s dělením. Dokaž, že platí $|w/z| = |w|/|z|$ a $\arg(w/z) = \arg w - \arg z$ pro libovolná w, $z \in \mathbb{C}$, z nenulové.

Úloha 24. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Nad úsečkami BT a CT jsou sestrojeny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky BTK a CTL. Označme D a E středy úseček BC a KL. Urči hodnotu poměru $|AT| : |DE|$. (Domácí kolo MO 2023)

V praxi je dobré si uvědomit, že sdružení „zachovává“ operace jako sčítání a násobení:

Cvičení 25. Ukaž, že pro komplexní čísla a, b platí

(1) $\overline{(a+b)} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{(a-b)} = \overline{a} - \overline{b}$,
(2) $\overline{(ab)} = \overline{a} \cdot \overline{b}$,
(3) $\overline{(a/b)} = \overline{a}/\overline{b}$.

Jediná vlastnost čísla i, kterou jsme zatím použili[3], je, že $i^2 = -1$. Ovšem číslo $(-i)$ má tuhle vlastnost taky. Takže kdybychom všude místo i psali $(-i)$, mělo by počítání pořád fungovat, ne? Z tohoto pozorování plyne hned celé předchozí cvičení.

Příklad 26. Pojďme si rozmyslet, jak počítat sdružená čísla „komplexnějších“ výrazů. Spočítejme sdružené číslo výrazu $\frac{abc}{(a+b)(b-c)(c-a)}$ za předpokladu, že platí $|a| = |b| = |c| = 1$.

Řešení. Pokud platí $|a| = |b| = |c| = 1$, tak $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$, tedy $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$. Upravujme postupně podle předchozího cvičení 25. Nejprve platí

$$\overline{\left(\frac{abc}{(a+b)(b-c)(c-a)}\right)} = \frac{\overline{(abc)}}{\overline{(a+b)(b-c)(c-a)}}$$

podle bodu (3). To můžeme dále upravit na

$$\frac{\overline{(abc)}}{\overline{(a+b)(b-c)(c-a)}} = \frac{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}{\overline{(a+b)} \cdot \overline{(b-c)} \cdot \overline{(c-a)}}$$

podle bodu (2). Konečně

$$\frac{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}{\overline{(a+b)} \cdot \overline{(b-c)} \cdot \overline{(c-a)}} = \frac{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}{(\overline{a}+\overline{b})(\overline{b}-\overline{c})(\overline{c}-\overline{a})}$$

podle bodu (1). Teď by Ti mělo být jasné, že běžné aritmetické výrazy sdružíme tak, že sdružíme všechna písmenka, a nemusíme to už v budoucnu takhle pitvat. Proto můžeme přejít ke druhé části, dosadit a rozšířit celý zlomek číslem $a^2b^2c^2$:

$$\frac{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)} = \frac{abc}{ab\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \cdot bc\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right) \cdot ca\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)} = \frac{abc}{(b+a)(c-b)(a-c)}.$$

Získali jsme zlomek rovný původnímu výrazu. Co znamená, když se číslo rovná sdruženému číslu? Že je reálné. Takže pokud platí $|a| = |b| = |c| = 1$, pak je $\frac{abc}{(a+b)(b-c)(c-a)}$ reálné číslo.

Úloha 27. Komplexní čísla a, b, c splňují $|a| = |b| = |c| = 1$. Dokaž, že číslo $z = \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$ též splňuje $|z| = 1$.

[3] Kromě polohy v rovině, teď mluvíme o matematických vlastnostech.

Tři body na přímce, čtyři body na kružnici.

Už ses naučil(a), jak pomocí spirální podobnosti spočítat komplexní číslo bodu v nějaké hezké konfiguraci, například ve středu čtverce nad úsečkou. Co když ale nějakou konfiguraci bodů chceme v úloze dokázat? Pak můžeme provést stejnou spirální podobnost, ale pozpátku.

Věta 28. *Tři body A, B, C leží na přímce, právě pokud platí*

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Pro výpočetní účely bychom chtěli pracovat s „hezčí formou" bodů A, B a C. Posunutí ani spirální podobnost tří bodů samozřejmě nezmění, jestli body leží na jedné přímce. Víme, že posunutí v rovině je přičtení pevného čísla, přičteme tedy $-a$, čímž přesuneme a do 0. Tudíž tři čísla a, b a c leží na přímce, právě když na přímce leží čísla $a-a=0$, $b-a$ a $c-a$.

Víme taky, že násobení pevným číslem je spirální podobnost, vynásobíme tedy všechna čísla $\frac{1}{b-a}$, čímž druhé číslo zjednodušíme. Poté čísla 0, $b-a$, $c-a$ leží na přímce, právě když leží na přímce $\frac{0}{b-a}=0$, $\frac{b-a}{b-a}=1$, $\frac{c-a}{b-a}$. Body 0 a 1 ovšem leží na reálné ose, čili toto je splněno, právě když leží zlomek $\frac{c-a}{b-a}$ na reálné ose a důkaz je hotový.

Ukažme ještě druhý důkaz, elementárnější úvahou. Dvě čísla $b-a$ a $c-a$ leží na přímce s počátkem, právě když se na sebe dají přesunout stejnolehlostí se středem v počátku, tedy $b-a=k(c-a)$ pro $k \in \mathbb{R}$, neboli $\frac{b-a}{c-a}=k \in \mathbb{R}$. □

Všimni si, že v této větě nezáleží, v jakém pořadí body vezmeš, stačí vydělit dva rozdíly. Právě jsme dokázali jeden ze základních kamenů při práci s komplexními čísly. Dokonce můžeme o zkoumaném podílu vydolovat obecnější informaci, totiž úhel, který svírají tři komplexní čísla. K tomu zapřáhneme vlastnosti argumentu, které jsme mohli využít i v důkazu věty, jak si můžeš rozmyslet.

Lemma 29. *Pro libovolná komplexní čísla a, b, c platí* $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \sphericalangle BAC$.

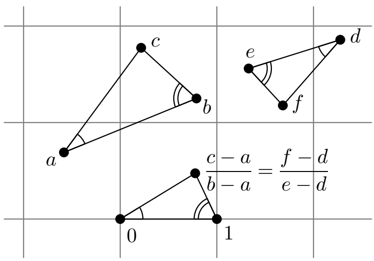
Důkaz. Stačí využít cvičení 23 a zacvičit s definicí argumentu:

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \sphericalangle(\text{reálná osa}, \overrightarrow{AC}) - \sphericalangle(\text{reálná osa}, \overrightarrow{AB}) = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}). \quad \square$$

Úloha 30. Jak v komplexních číslech poznat, že jsou přímky AB a CD rovnoběžné?

Úloha 31. Využij důkaz věty 28 a dokaž, že dva trojúhelníky ABC a DEF jsou si přímo podobné právě tehdy, když platí

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{f-d}{e-d}.$$



Cvičení 32. Rozmysli si, jak ověřit, že je trojúhelník ABC rovnostranný nebo že je čtyřúhelník $ABCD$ čtverec.

Cvičení 33. Jak v komplexních číslech poznat, že jsou trojúhelníky ABC a DEF podobné nepřímo?

Cvičení 34. Jaký je vzorec překlopení bodu Z v osové souměrnosti podle přímky AB? A co paty výšky ze Z na AB?

Obdobně se podívejme na kolmice v rovině. I v tomto případě nám komplexní čísla dají jednoduchou podmínku, kdy jsou na sebe dvě přímky kolmé.

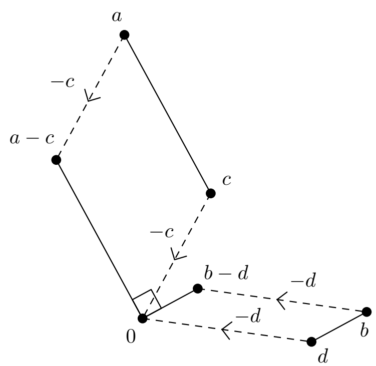
Věta 35. *Pro body A, B, C, D platí $AC \perp BD$, právě když*

$$\frac{a-c}{b-d} \in i\mathbb{R},$$

kde $i\mathbb{R}$ značí množinu čísel tvaru ki pro $k \in \mathbb{R}$, tedy ryze imaginárních čísel.

Důkaz. Důkaz povedeme v podobném duchu jako důkaz věty o bodech na jedné přímce – posuneme celou situaci k 0.

Posuňme body a a c na $a-c$ a 0 a body b a d na body $b-d$ a 0. Posunutí zachová rovnoběžnost příslušných úseček, proto můžeme podmínku $AC \perp BD$ ekvivalentně vnímat jako existenci pravoúhlého trojúhelníka s vrcholy 0, $a-c$, $b-d$ s pravým úhlem při 0.



Ale pozor! To, že máme pravý úhel u počátku, znamená, že jedno číslo můžeme získat pomocí nějaké spirální podobnosti z druhého – otočení o $\pm 90°$ a nějaká stejnolehlost. Otočení získáme násobením $\pm i$ a stejnolehlost poté násobením reálnou konstantou. Pro nějaké $k \in \mathbb{R}$ platí

$$a-c = (b-d)i \cdot k \iff \frac{a-c}{b-d} = i \cdot k \in i\mathbb{R}.$$

Pokud naopak platí, že $a-c$ a $b-d$ svírají s počátkem pravý úhel, pak jsou přímky AC a BD kolmé. $\square$

Cvičení 36. Rozhodni, které trojice bodů A, B, C leží na jedné přímce pro všechna x, y, $z \in \mathbb{C}$ a pro které platí $AB \perp BC$, pokud:

(1) $a = 1-i, b = -4+7i, c = 4-6i$
(2) $a = 3i-3, b = 1, c = 4+4i$
(3) $a = 2x+y, b = 2y+z, c = 4x-z$
(4) $a = x, b = \frac{y+z}{2}, c = \frac{x+y+z}{3}$.

Posledním bodem tohoto cvičení jsi dokázal(a), že těžiště trojúhelníka s vrcholy v bodech X, Y, Z je skutečně $\frac{x+y+z}{3}$, totiž že tento bod leží na jedné z těžnic. Ze zřejmé symetrie pak už leží na všech. Blahopřejeme! Můžeš to oslavit tím, že se s námi podíváš na kružnice. Obvodové úhly napovídají, že najdeme kritérium pro kružnice podobné dvěma právě získaným.

Věta 37. *Čtyři body A, B, C, D leží na kružnici, právě pokud platí*

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Podle lemmatu 29 vyjadřují čísla $\arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right)$, $\arg\left(\frac{a-d}{b-d}\right)$ orientované úhly $\sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle BDA$, pomocí nichž už umíme určit, kdy leží body na kružnici. Body A, B, C, D leží na kružnici, právě když

(1) buď leží C a D na stejném oblouku AB a tehdy platí $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$,
(2) nebo leží na opačných obloucích a tehdy platí $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ADB = 180°$, tedy v orientovaných úhlech $\sphericalangle BCA - \sphericalangle BDA = 180°$.

Dohromady leží body A, B, C, D na kružnici, právě když platí $\sphericalangle BCA - \sphericalangle BDA = 0$ nebo $180°$, takže můžeme podle cvičení 23 napsat

$$\arg\left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}\right) = \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) - \arg\left(\frac{a-d}{b-d}\right) = \sphericalangle BCA - \sphericalangle BDA = 0 \text{ nebo } 180°.$$

Číslo má ovšem argument 0 nebo 180° právě tehdy, když je reálné. □

Pokud znáš orientovaný úhel modulo 180°, jistě Ti neušlo, že ačkoli $\arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = \sphericalangle BCA$ platí modulo 360°, v tomto důkaze jsme pracovali pouze 180°.

Cvičení 38. Dokaž, že následující čtveřice bodů A, B, C, D leží na jedné kružnici pro všechna x, y, $z \in \mathbb{C}$, pokud:

(1) $a = -1, b = i, c = -2 + i, d = -1 + 2i$.
(2) $a = 4 + i, b = 2 + 2i, c = 8 + 4i, d = 7 + 7i$.
(3) $a = x$, $b = y$, $c = x + y + z$, $d = x + y - z$, pokud $|x| = |y| = |z| = 1$.

Všechny „ověřovací“ věty, které jsi v sekci viděl(a), zpravidla využiješ na konci důkazu – tj. na ověření tvrzení úlohy. Například po Tobě úloha chce ukázat, že se tři přímky protínají v jednom bodě. Stačí Ti najít průsečík dvou z nich a pomocí věty 28 ukázat, že leží na třetí přímce.

Nyní nastává čas, abys vyzkoušela(a) všechny své doposud získané znalosti. Čeká Tě nyní pár úloh, kde se Ti můžou hodit tvrzení z této sekce. Hurá do toho!

Úloha 39. Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme čtverce $ACDE$ a $BCFG$. Dokaž, že leží střed úsečky DF na výšce z vrcholu C.

Úloha 40. (Van Aubelova věta) Nad stranami daného čtyřúhelníka sestrojíme vně čtverce. Dokaž, že spojnice středů protějších čtverců mají stejné délky a jsou na sebe kolmé.

Úloha 41. Nad stranami rovnoběžníka sestrojíme vně čtverce. Dokažte, že středy těchto čtverců tvoří vrcholy čtverce.

Úloha 42. (Napoleonova věta) Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme vně rovnostranné trojúhelníky ABZ, BCX, CAY. Dokažte, že středy těchto trojúhelníku tvoří též rovnostranný trojúhelník. Dokaž též, že přímky AX, BY a CZ prochází jedním bodem.

Úloha 43. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Otočením o 120° okolo T se B zobrazí na B_1. Otočením o 120° druhým směrem okolo T se C zobrazí na C_1. Dokaž, že je $\triangle AB_1C_1$ rovnostranný.

Jedno význačné a velmi mocné zobrazení, kterým se v tomto seriálu nebudeme příliš zabývat, je *kruhová inverze*. Zmiňme ji zde proto zběžně, pokud Tě zaujala, více informací najdeš v PraSečí knihovničce.[4]

[4] Třeba na adrese *https://prase.cz/library/KruhovaInverzePT/KruhovaInverzePT.pdf*.

Definice 44. Buď ω daná kružnice se středem O a poloměrem r. Poté kruhovou inverzi bodu $P \neq O$ podle ω definujeme jako bod P^* ležící na polopřímce $\overrightarrow{OP}$ splňující $|OP| \cdot |OP^*| = r^2$.

Úloha 45. Buď ω jednotková kružnice.

(1) Pro daný bod Z v rovině a komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ jemu příslušné urči komplexní číslo příslušné bodu Z^*.
(2) Jsou dané dva body A, B a body A^*, B^* k nim inverzní podle ω. Dokaž, že body A, B, A^* a B^* leží na jedné kružnici.

Jednotková kružnice

Doposud jsme komplexní čísla zkoumali z pohledu zobrazení. Jistě dosvědčíš, že zobrazení, jako jsou otočení či překlápění, jsou v řeči komplexních čísel přirozená. Bohužel, v *reálných* olympiádních úlohách je často objekt zvaný kružnice, se kterým prozatím umíme pracovat pouze s pomocí věty 37. Jak jsme upozornili, tato věta se typicky používá k důkazu, že čtyři body leží na kružnici, nikoliv k práci s kružnicemi, co v úloze jsou.

Definice 46. Definujme (znovu) jednotkovou kružnici jako množinu komplexních čísel s absolutní hodnotou $|z| = 1$. V komplexní rovině je dána kružnicí se středem v počátku a poloměrem jedna.

K čemu je nám jednotková kružnice dobrá? Jelikož je absolutní hodnota každého prvku jedna, tak pro číslo z na jednotkové kružnici platí

$$1 = |z|^2 = z\overline{z},$$

tj. $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Snadno tedy můžeme počítat sdružená čísla výrazů obsahující čísla na jednotkové kružnici. To nám značně zjednoduší život. Například chceme-li ověřit, že je $\frac{c-a}{b-a}$ reálné číslo, kde a, b, c jsou vyjádřená pomocí čísel na jednotkové kružnici, můžeme tímto způsobem spočítat číslo sdružené a ověřit, zda je totožné, jako jsme to udělali v příkladě 26. Ve velké řadě tvrzení a kritérií nám ale jednotková kružnice nejen dá nástroj k výpočtu, ale zjednoduší samotný vzorec. Pohodlně se usaď a kochej se.

Příklad 47. Dokažme, že pro body A, B, C, D na jednotkové kružnici platí $AB \perp CD$, právě pokud $ab + cd = 0$.

Řešení. Využijeme větu 35, podle které $AC \perp BD$ platí, právě když

$$\frac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R} \iff \frac{a-b}{c-d} = -\overline{\left(\frac{a-b}{c-d}\right)}.$$

Vzpomeňme si na pravidla výpočtu sdružených výrazů! Počítejme

$$\overline{\left(\frac{a-b}{c-d}\right)} = \frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}} = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{d}} = \frac{a-b}{c-d} \cdot \frac{cd}{ab}.$$

Příslušné přímky jsou tak kolmé, právě pokud $ab = -cd$.

Cvičení 48. Dokaž, že pro body A, B, C, D na jednotkové kružnici platí $AB \parallel CD$, právě pokud $ab = cd$.

Zůstaňme u kolmic trochu déle. Cvičení 34 nám umožňuje spočíst překlopení bodu podle libovolné úsečky. V tomto výrazu se ale vyskytuje mnoho sdružených čísel, která jednotková kružnice magicky zjednoduší na vzorec, který už stojí za zapamatování.

Věta 49. *Buďte A, B body na jednotkové kružnici. Pak je překlopení bodu Z podle přímky AB dáno číslem*

$$a + b - ab\overline{z}$$

a pata bodu Z na AB je dána $\frac{1}{2}\left(a + b + z - ab\overline{z}\right)$.

Důkaz. Pokud jsi důkladně řešil(a) cvičení 34, víš, že překlopení bodu Z podle přímky AB obecně přísluší komplexní číslo

$$\frac{(b-a)\overline{z} + \overline{b}a - b\overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}.$$

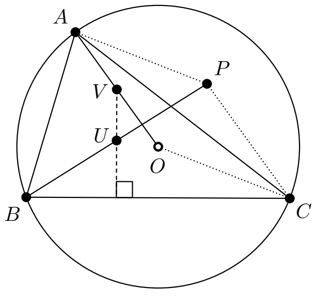
Jelikož platí $\overline{a} = \frac{1}{a}$ a $\overline{b} = \frac{1}{b}$, tento výraz se rovná:

$$\frac{(b-a)\overline{z} + \frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{(b-a)\left(\overline{z} - \frac{a+b}{ab}\right)}{\frac{a-b}{ab}} = a + b - ab\overline{z}.$$

Krátit číslem $a - b$ můžeme, protože jinak neexistuje přímka AB. Pata bodu je střed úsečky dané Z a jeho překlopením, tudíž je dána číslem $\frac{1}{2}\left(a + b + z - ab\overline{z}\right)$. □

Nyní si ukažme příklad přímo z té naší Matematické olympiády. Toto řešení obdrželo na krajském kole MO 6 bodů ze 6.

Příklad 50. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme O střed kružnice opsané. Obraz bodu O v osové souměrnosti podle přímky AC označme P. Dokaž, že středy úseček AO a BP leží na téže kolmici k přímce BC. (Krajské kolo MO A 2020)



Řešení. Položme trojúhelník do komplexní roviny tak, že (ABC) je jednotková kružnice, a tedy $o = 0$. Rozmysleme si, jak získat vyjádření bodu P.

Bod P je takový, že $OAPC$ tvoří rovnoběžník, jelikož střed S strany AC splňuje $OS \perp AC$. Podle příkladu 3 je tak $p = a + c - o = a + c$. Ke stejnému výsledku bychom došli i pomocí věty 49.

Nyní už je zbytek řešení nasnadě. Středy U, V úseček BP a AO mají vyjádření po řadě $\frac{b+p}{2} = \frac{a+b+c}{2}$ a $\frac{a}{2}$. Chceme ověřit, že platí $UV \perp BC$, tj. díky větě 35 chceme ověřit, že je číslo

$$\frac{u - v}{b - c} = \frac{\frac{a+b+c}{2} - \frac{a}{2}}{b - c} = \frac{b + c}{2(b - c)}$$

ryze imaginární. Spočítejme číslo k němu sdružené, díky cvičení 25 a faktu, že $\overline{b} = \frac{1}{b}$ a $\overline{c} = \frac{1}{c}$ můžeme psát

$$\overline{\left(\frac{u-v}{b-c}\right)} = \overline{\left(\frac{b+c}{2(b-c)}\right)} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = \frac{b+c}{2(c-b)} = -\frac{u-v}{b-c}.$$

Tento podíl je tedy ryze imaginární, tj. $UV \perp BC$, což jsme přesně chtěli.

Zatím byla volba jednotkové kružnice spíše zjevná, občas tomu tak ale nemusí být. Následuje velká kupa úloh, které lze řešit pomocí komplexních čísel. Pozor, občas bude například nutné tipnout si hledaný bod.

Úloha 51. Body A, B leží na jednotkové kružnici. Dokaž, že bod P leží na přímce AB, právě pokud platí $a + b = p + ab\overline{p}$.

Cvičení 52. Body A, B leží na jednotkové kružnici. Dokaž, že komplexní číslo $\frac{2ab}{a+b}$ přísluší průsečíku tečen k jednotkové kružnici jimi vedenými.

Úloha 53. Je dán tečnový[5] čtyřúhelník $ABCD$. Dokaž, že střed úsečky AC, střed úsečky BD a vepsiště leží na jedné přímce.

Úloha 54. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P, v němž M a N jsou středy úhlopříček AC a BD. Dokaž, že kolmice vedené ze středu každé strany na protější stranu se protínají v jednom bodě. Dokaž navíc, že tento bod je ortocentrem trojúhelníka PMN.

Úloha 55. Čtyřúhelník $ABCD$ má kolmé úhlopříčky a je vepsaný do kružnice se středem O. Dokaž, že vzdálenost bodu O od přímky CD je $\frac{1}{2}|AB|$. (PraSe 40–4p–4)

Úloha 56. (Simsonova přímka) Bod P leží v rovině trojúhelníka ABC. Označme D, E a F po řadě jeho paty na strany BC, AC a AB. Dokaž, že pokud P leží na kružnici opsané (ABC), pak body D, E a F leží na přímce.

Úloha 57. V trojúhelníku ABC označme A_1, B_1, C_1 po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, AC a AB. Dále označme A_2, B_2, C_2 po řadě středy úseček B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1. Dokažte, že kolmice z bodu A_2 na BC, z bodu B_2 na AC a z bodu C_2 na AB prochází jedním bodem.

Úloha 58. Buďte AA', BB', CC' tři průměry kružnice opsané trojúhelníka ABC. Zvolme libovolný bod P uvnitř trojúhelníka $\triangle ABC$ a označme D, E, F po řadě paty kolmic z bodu P na strany BC, CA, AB. Označme X bod takový, že D je střed úsečky $A'X$ a analogicky definujme body Y a Z. Dokaž, že trojúhelníky ABC a XYZ jsou si podobné. (Čína TST 2011)

Další důležitou vlastností, díky které je radno si zahrávat s jednotkovou kružnicí, je počítání průsečíků přímek. Obecně sice jde spočítat průsečík dvou libovolných přímek – jednoduše použít dvakrát větu 28, ale na soutěži by ses z toho všeho počítání nejspíš zbláznil(a). Naštěstí, jednotková kružnice znovu přichází na pomoc, vzorec pro počítání průsečíků tětiv na jednotkové kružnici se dá strávit.

Věta 59. *Jsou dány body A, B, C, D na jednotkové kružnici takové, že $AB \nparallel CD$. Průsečík $P \equiv AB \cap CD$ je daný vzorcem*

$$p = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}.$$

Důkaz. Nejprve si rozmysleme, že výraz je dobře definovaný – pokud P existuje, tak AB není rovnoběžné s CD, tudíž $ab \neq cd$. Vzhledem k symetrii dokazovaného tvaru p nám stačí ukázat, že bod P definovaný pomocí komplexního čísla výše leží na přímce AB. K tomu využijeme úlohu 51, podle které stačí ověřit, zda platí

$$a + b \stackrel{?}{=} p + ab\overline{p}.$$

Došli jsme spolu již tak daleko, že se takového výpočtu určitě nebojíme. Nejprve si druhý člen předpočítáme, znovu pomocí pravidel sdružování

$$ab\overline{p} = ab\overline{\left(\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}\right)} = ab \cdot \frac{\frac{1}{ab} \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) - \frac{1}{cd}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}} = -\frac{ab(c+d-a-b)}{ab - cd}.$$

[5] To znamená, že mu lze vepsat kružnice.

Teď už i na míli daleko vidíme, že výraz $p + ab\overline{p}$ vyjde hezky:

$$p + ab\overline{p} = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd} - \frac{ab(c+d-a-b)}{ab-cd} = \\ = \frac{ab(c+d) - cd(a+b) - ab(c+d-a-b)}{ab-cd} = \frac{ab(a+b) - cd(a+b)}{ab-cd},$$

což je rovno $a + b$, přesně jak jsme potřebovali. □

Pozorování 60. *Průsečík tečny v bodě A s přímkou CD je daný „limitním přibližováním bodu B k bodu A" ve vzorci výše, tedy položením $b = a$:*

$$p = \frac{a^2(c+d) - cd \cdot 2a}{a^2 - cd}.$$

Opravdu, snadno si jistě spočítáš, že platí $OA \perp AP$, pomocí kritéria kolmosti.

Úloha 61. Je daná kružnice ω s průměrem AK. Bod M leží uvnitř kružnice, ale ne na AK a přímka AM protíná ω podruhé v Q. Tečna k ω v Q protne kolmici v M na přímku AK v bodě P. Konečně, druhá tečna z P k ω ji protíná v bodě L. Dokaž, že body K, L a M leží na přímce.
(Nizozemsko TST 2017)

Úloha 62. Je daná kružnice ω a bod P mimo ni. Uvažme všechny lichoběžníky $ABCD$, $AB \parallel CD$ vepsané ω takové, že P je průsečík přímek AD a BC. Dokaž, že všechny takové lichoběžníky mají společný průsečík úhlopříček. (Ústřední kolo MO 1998)

Úloha 63. Je daný rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem při A. Označme M střed úsečky AB a E druhý průsečík přímky DM s kružnicí (DAB). Konečně, označme H bod na DA takový, že $\sphericalangle AHB = 90°$. Dokaž, že body C, D, H a E leží na kružnici. (PraSe 39–1j–7)

Úloha 64. Je daný rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC a středem kružnice vepsané I. Přímka BI protne stranu AC v bodě D a kolmice skrz D k AC protne přímku AI v bodě E. Dokaž, že obraz bodu I podle přímky AC leží na kružnici opsané trojúhelníka BDE.
(IMO shortlist 2016/G4)

Při počítání úloh pomocí komplexních čísel se občas nevyvarujeme delším výpočtům. Pokud se nebojíš, čekají Tě dva testy odolnosti.

Úloha 65. (Brocardova věta) Je daný tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s nerovnoběžnými stranami. Označme P průsečík jeho úhlopříček, $Q = AB \cap CD$ a $R = AD \cap BC$. Dokaž, ortocentrum trojúhelníka PQR splývá se středem kružnice opsané $(ABCD)$.

Úloha 66. (Pascalova věta) Šest bodů A, B, C, D, E a F leží na kružnici. Dokaž, že tři průsečíky $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ a $CD \cap FA$ leží na jedné přímce.

Ortocentrum a Eulerova přímka

Náš arzenál se rozrůstá a již jsme cvičení v počítání kolmic. Příklad 47 nám napovídá, že kolmice na jednotkové kružnici budou obzvláště jednoduchá kořist. Můžeš si zkusit ortocentrum určit ještě dříve než my, je to dobré cvičení.

Věta 67. *Buď ABC trojúhelník s jednotkovou opsanou kružnicí a ortocentrem H. Pak $h = a + b + c$.*

Důkaz. Stačí nám díky symetrii ukázat, že $AH \perp BC$. To je ale jednoduché, spočítejme:

$$\frac{a-h}{b-c} = \frac{b+c}{c-b}.$$

Sdružené číslo k němu je zjevně

$$\overline{\left(\frac{b+c}{c-b}\right)} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}} = \frac{b+c}{b-c} = -\frac{a-h}{b-c},$$

tedy vskutku $AH \perp BC$. □

Mnoho známých tvrzení a faktů, obzvlášť točících se okolo ortocentra, je pomocí komplexních čísel jasné. Nevěříš? Přesvědč se sám(sama), tradičně totiž následuje velká spousta cvičení a úloh.

Úloha 68. V trojúhelníku ABC označme P bod takový, že $ABPC$ je rovnoběžník. Ukaž, že body B, H, C a P leží na kružnici.

Cvičení 69. (Eulerova přímka) Dokaž, že střed kružnice opsané O, těžiště G a ortocentrum H trojúhelníka ABC leží na přímce v tomto pořadí, přičemž platí $\frac{|OG|}{|GH|} = \frac{1}{2}$.

Cvičení 70. Dokaž, že v trojúhelníku ABC leží obrazy bodu H v osové souměrnosti podle strany BC a ve středové souměrnosti podle středu BC na kružnici opsané.

Cvičení 71. Je daný trojúhelník ABC s ortocentrem H. Body D, E, F leží na kružnici opsané trojúhelníka tak, že $AD \parallel BE \parallel CF$. Označme S, T, U po řadě obrazy bodů D, E a F v osové souměrnosti podle přímek BC, CA a AB. Dokaž, že body S, T, U, H leží na kružnici.

(MOP 2006)

Úloha 72. Dokaž, že v trojúhelníku ABC leží středy stran, paty výšek a středy úseček AH, BH, CH na jedné kružnici (tzv. *Feuerbachově kružnici*). Dokaž navíc, že její střed je $\frac{a+b+c}{2}$ a urči její poloměr.

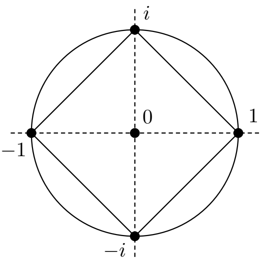
Úloha 73. V daném trojúhelníku ABC uvažme D patu výšky z vrcholu A a K bod na kružnici opsané takový, že $AK \parallel BC$. Dokaž, že přímka HK prochází těžištěm trojúhelníka ABC.

Úloha 74. Bod P leží na kružnici opsané trojúhelníka ABC. Dokaž, že Simsonova přímka bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC půlí úsečku PH.

Úloha 75. V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokaž, že přímka EP prochází středem úsečky OV.

(Ústřední kolo MO 2011)

Zpátky ke goniometrii aneb pravidelné mnohoúhelníky



Body 1, i, -1 a $-i$ tvoří v rovině čtverec vepsaný jednotkové kružnici. Tyto čtyři body jsou pro nás zajímavé proto, že všechny splňují $x^4 = 1$. Navíc jsou to všechna řešení této rovnice, neboť $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$. Jsou ještě v něčem speciální? Jejich argumenty jsou 0, $\pi/2$, π a $3\pi/2$ a absolutní hodnotu mají rovnou jedné. Tedy pokud si ještě vzpomeneš na goniometrický tvar komplexního čísla, tak tato čtyři čísla jej mají až podezřele hezký:

$$\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right),$$

kde $k = 0, 1, 2, 3$. Je to jen náhoda, že do sebe všechno takhle krásně zapadá? Ne! Zobecněním těchto myšlenek se teď podíváme do světa pravidelných mnohoúhelníků v komplexní rovině.

Definice 76. Buď n (pro tuto sekci pevné) přirozené číslo. Pak definujeme v $\mathbb{C}$ tzv. „n-té odmocniny z jedné“ následovně

$$\zeta_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

pro celé číslo k.

Výše jsme tedy měli tu čest se čtvrtými odmocninami z jedné. Název „n-té odmocniny z jedné“ Ti asi napovídá, že n-tá mocnina čísla ζ_k bude 1. Opravdu, měl(a) bys pravdu! To si dokážeme za chviličku.

Rozmysleme si nejprve pár základních vlastností těchto čísel. Nejprve si všimněme, že tvar v definici je goniometrický, z čehož vidíme, že mají všechny absolutní hodnotu rovnu jedné. Všechna čísla ζ_k tedy leží na jednotkové kružnici. Také to znamená, že mají i všechny jejich mocniny absolutní hodnotu 1, ale ještě není zaručeno, že nějaká jejich mocnina je přímo rovna jedné.

Cvičení 77. Pro libovolné k platí $\zeta_{k+n} = \zeta_k$, čili je jen n různých n-tých odmocnin z jedné. Stačí tak uvažovat ζ_k pouze pro $k = 1, 2, \ldots, n$.

Věta 78. (Moivrova) *Pro ζ_k jako výše platí $\zeta_k = \zeta_1^k$.*

Důkaz. Věta přímo vybízí k postupu matematickou indukcí podle k. Nejprve pro $k = 1$ věta zjevně platí. Nyní předpokládejme, že platí $\zeta_k = \zeta_1^k$ pro nějaké k. Poté využijeme vlastnosti násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru, kde můžeme sčítat argumenty podle tvrzení 6. Absolutní hodnoty nepíšeme, protože všechna ζ_i mají absolutní hodnotu rovnou jedné. Pišme

$$\begin{aligned}\zeta_1 \cdot \zeta_k &= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right] = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right).\end{aligned}$$

□

Důsledek 79. *Minimální přirozené k takové, že platí $\zeta_1^k = 1$, je n.*

Důkaz. Jednoduše pomocí Moivrovy věty pišme

$$1 = \zeta_1^k = \zeta_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Porovnáním reálných a imaginárních složek této rovnice získáme $\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = 1$ a $\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = 0$, z čehož plyne, že existuje celé ℓ splňující $\frac{2\pi k}{n}\cdot = 2\pi \cdot \ell$. Minimální takové přirozené k je zjevně $k = n$. □

Cvičení 80. Rozmysli si, že $\zeta_k \cdot \zeta_l = \zeta_{k+l}$ a že $\overline{\zeta_k} = \zeta_{n-k}$.

Moivrova věta nám říká, že pro každé k platí $\zeta_k^n = 1$. Rozmysleme si, že čísla ζ_k jsou dokonce *všechna* komplexní řešení rovnice $x^n - 1$. Tento polynom má stupeň n a právě jsme našli n jeho kořenů, navzájem různá čísla ζ_k. Můžeš si rozmyslet, že podobně jako v reálných číslech má každý nenulový polynom nejvýše tolik kořenů, kolik je jeho stupeň. Odmocniny z jedné jsou tedy právě všechny jeho kořeny.

Poznámka 81. Komplexní čísla mají dokonce ještě lepší vlastnost, konkrétně, že každý polynom stupně n má přesně n komplexních kořenů, včetně násobnosti. V reálných číslech toto neplatí, například polynom x^2+1 žádné reálné kořeny nemá. Více o algebraických vlastnostech komplexních čísel najdeš v PraSečím seriálu o komplexních číslech[6].

Pozorování 82. *Součet* $1+\zeta+\zeta_2+\cdots+\zeta_{n-1} = 1+\zeta_1+\zeta_1^2+\cdots+\zeta_1^{n-1}$ *získáme jako součet geometrické řady*

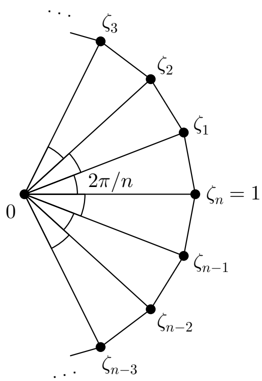
$$1+\zeta_1+\zeta_1^2+\cdots+\zeta_1^{n-1} = \frac{\zeta_1^n-1}{\zeta_1-1} = 0.$$

Získáš ho i pomocí Vièttových vztahů pro polynom x^n-1.

Cvičení 83. Pro pátou odmocninu z jedné převeď součet $1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4=0$ na kvadratickou rovnici a díky tomu spočítej $2\cos 36^\circ$ a z toho dále najdi $\cos 18^\circ$.

Konečně máme tedy opodstatněný název těchto zvláštních čísel. Zamysleme se nad nimi ale geometricky. Čtvrté odmocniny z jedné jsou právě $1, -1, i$ a $-i$, které tvoří v rovině čtverec. Vzhledem k jisté symetrii, která panuje mezi goniometrickým předpisem ζ_k, bychom intuitivně čekali, že řešení x^n-1 budou pravidelně rozestavená v rovině. A opravdu, pojďme si to (překvapivě) spočítat:

Věta 84. *Body* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ *tvoří v komplexní rovině pravidelný* n*-úhelník.*



Důkaz. Argumenty čísel $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ jsou přímo z definice po řadě $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, 2\pi$. Snadno tak vidíme, že střed kružnice opsané se na úsečku danou body ζ_k, ζ_{k+1} dívá pod úhlem $\frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$, což je pro všechna k stejné. Rovnoramenné trojúhelníky dané ζ_k, ζ_{k+1} a počátkem tak mají všechny stejné úhly a jsou tedy navzájem shodné, z čehož plyne, že strany mnohoúhelníka jsou stejně dlouhé. □

Můžeme dokonce říct více. Všimni si, že absolutní hodnota obsahující nějaké odmocniny z jedné v sobě bude obsahovat jen nějaké siny a kosiny, se kterými již umíme obratně pracovat. Určeme tedy poměr délky strany a poloměru kružnice opsané.

Věta 85. *Pravidelný* n*-úhelník vepsaný do kružnice o poloměru* 1 *má délku strany rovnou* $\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{n}}$.

[6] *https://prase.cz/archive/30/9.pdf*

Důkaz. Chceme spočítat délku nějaké strany, jinak řečeno vzdálenost dvou po sobě jdoucích odmocnin. Spočítejme tedy vzdálenost komplexních čísel ζ_k a ζ_{k+1}, tedy $|\zeta_{k+1}-\zeta_k|$.

Tu umíme spočítat jako $\sqrt{(\zeta_{k+1}-\zeta_k)\overline{(\zeta_{k+1}-\zeta_k)}}$. Rozepíšeme to pomocí mocnin ζ_1.

$$\sqrt{(\zeta_{k+1}-\zeta_k)\overline{(\zeta_{k+1}-\zeta_k)}} = \sqrt{\left(\zeta_1^{k+1}-\zeta_1^k\right)\overline{\left(\zeta_1^{k+1}-\zeta_1^k\right)}} = \sqrt{\left(\zeta_1^{k+1}-\zeta_1^k\right)\left(\left(\overline{\zeta_1}\right)^{k+1}-\left(\overline{\zeta_1}\right)^k\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\zeta_1^{k+1}-\zeta_1^k\right)\left(\frac{1}{\zeta_1^{k+1}}-\frac{1}{\zeta_1^k}\right)} = \sqrt{\frac{\zeta_1^{k+1}}{\zeta_1^{k+1}}+\frac{\zeta_1^k}{\zeta_1^k}-\frac{\zeta_1^{k+1}}{\zeta_1^k}-\frac{\zeta_1^k}{\zeta_1^{k+1}}} =$$

$$= \sqrt{2-\zeta_1-\frac{1}{\zeta_1}} = \sqrt{2-(\zeta_1+\overline{\zeta_1})}.$$

A ζ_1 už známe. Pokud napíšeme $\zeta_1 = a+bi = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, tak $\zeta_1+\overline{\zeta_1} = a+bi+a-bi = 2a = 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Dohromady dostáváme

$$|\zeta_{k+1}-\zeta_k| = \sqrt{2-2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)},$$

což je stejné pro všechna k. $\square$

Cvičení 86. Adaptuj předchozí důkaz a urči délky všech úhlopříček v pravidelném n-úhelníku s poloměrem kružnice opsané rovným jedné.

Ukážeme si jeden pořádný příklad na závěr. Šikovné úpravy a dobrá volba počáteční situace nám umožní si zjednodušit složité výpočty. Vždy přemýšlej, kam položit obrázek do komplexní roviny – jestli se vhodná kružnice stane jednotkovou, vhodná přímka reálnou osou, ... Občas si můžeš volbu nechat v záloze a udělat ji, až když vidíš, že se Ti nějaký výraz zjednoduší.

Příklad 87. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou na úhlopříčkách AC a CE dány body M, N tak, že

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = r \in \mathbb{R}.$$

Určete hodnotu r, pokud body B, M, N leží na přímce. (IMO 1982)

Řešení. Šestiúhelník jistě vepíšeme do jednotkové kružnice, zbývá nám volba, který bod bude reprezentován jedničkou. Jelikož dokazujeme fakta o B, položme $B=1$, $C=\zeta$, ..., $A=\zeta^5$. Platí $\zeta = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Bod M je takový, že $(m-a) = r(c-a)$, tj. $m = rc+(1-r)a$. Rozepišme pomocí goniometrických funkcí:

$$m = r\zeta+(1-r)\zeta^5 = r\zeta+(1-r)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = r\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+(r-1)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),$$

což je rovno $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}(2r-1)}{2}i$. To vůbec není špatné!

Podobně napíšeme $n = re+(1-r)c = r\zeta^3+(1-r)\zeta = -r+(1-r)\zeta$, znovu rozepíšeme

$$n = -r+(1-r)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -r+(1-r)\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3r}{2}+\frac{\sqrt{3}(1-r)}{2}i.$$

Kolinearita těchto dvou s B je ekvivalentní s

$$\frac{b-m}{b-n} = \frac{1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}(2r-1)}{2}i}{1-\frac{1-3r}{2}-\frac{\sqrt{3}(1-r)}{2}i} = \frac{1-\sqrt{3}(2r-1)i}{3r+1+\sqrt{3}(r-1)i} \in \mathbb{R}.$$

Chceme tedy určit, kdy je hledaný zlomek reálné číslo. Podobně jako při dělení komplexních čísel rozšíříme zlomek o číslo sdružené ke jmenovateli. Jmenovatel poté bude reálné číslo, takže už nás jen zajímá, aby byl reálný čitatel. Zbývá nám pak určit r takové, že

$$\left(1-\sqrt{3}(2r-1)i\right)\left(3r+1-\sqrt{3}(r-1)i\right)\in\mathbb{R}.$$

Imaginární složka tohoto čísla je rovna

$$-\sqrt{3}(2r-1)\cdot(3r+1)-\sqrt{3}(r-1)=-\sqrt{3}((2r-1)(3r+1)+r-1)=-\sqrt{3}(6r^2-2).$$

Ta bude nulová právě tehdy, když $r^2=\frac{1}{3}$. Jelikož r je kladné číslo, nastane to právě tehdy, když $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Úloha 88. Na kružnici opsané pravidelnému $2n$-úhelníku $A_1A_2\dots A_{2n}$ leží bod P. Dokažte, že ortocentra trojúhelníků PA_1A_2, PA_3A_4, ... , $PA_{2n-1}A_{2n}$ tvoří pravidelný n-úhelník.

(BdMO 2023)

Úloha 89. Je daný pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$ vepsaný do jednotkové kružnice. Dokaž, že platí $|AB|^2+|AC|^2+|AD|^2=7$.

Úloha 90. Je daný pravidelný n-úhelník $A_1A_2\dots A_n$ vepsaný do kružnice se středem O a poloměrem R. Na polopřímce opačné k A_1O najdeme bod P. Dokaž, že platí

$$\prod_{i=1}^{n}|PA_i|=|PO|^n-R^n.$$

(Putnam 1955)

V minulém díle jsme se bavili o vlnách – ztělesnění goniometrických funkcí. Jelikož komplexní čísla a obzvláště odmocniny z jedné mají ke goniometrii velmi blízko, můžeš si zkusit vyřešit některé úlohy z předchozího dílu pomocí nově nabytých znalostí.

Úloha 91. Na kružnici opsané pravidelného mnohoúhelníka se pohybuje bod. Dokaž, že součet druhých mocnin jeho vzdáleností ke stranám je stále stejný.

Úloha 92. (znovu) Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Na kratším oblouku BC kružnice opsané leží bod X. Dokaž, že $|XB|+|XC|=|XA|$.

Závěrem...

Imaginární sušenku posíláme všem, kteří dočetli druhý díl až sem. Spolu s tímto textem přichází i zadání druhé seriálové série, přejeme Ti co nejméně početních chyb při jejím řešení!

Komplexní čísla jsou silným nástrojem k řešení geometrických úloh, kde figuruje jedna centrální kružnice – na takové kousky jsou komplexní čísla jako stvořena. Naopak pro úlohy s více kružnicemi nebo všudypřítomnými průsečíky přímek doporučujeme zadržet v počítání.

Pointa je následující: geometrické úlohy řeš pomocí nástrojů, které máš k dispozici, tedy Tvé standardní podobnosti, mocnosti bodu ke kružnici a tak dále. Jakmile ale úlohu převedeš do tvaru, který by byl v rozumném čase spočitatelný, zapřemýšlej i nad výpočetní metodou. Než takové řešení spácháš na soutěži jako ústřední kolo, MEMO nebo IMO, vzpomeň na svatou trojici ze začátku seriálu:

(1) Úloha jde spočítat pomocí komplexních čísel.
(2) Znám dobře všechna tvrzení a dokážu je obhájit.
(3) Mám na řešení čas.

Mnoho z těchto bodů přichází jednoduše se zkušeností v počítání, nenech se tedy už déle zdržovat a pusť se do počítání! Spolu s touto sérii Ti do obálky přistála i zadaní druhé seriálové série. Pokud budeš apelovat na nějaké tvrzení ze seriálu, prosíme, odkaž se na něj. Přejeme hodně zdaru.

V posledním letošním díle se podíváme na početní metodu vhodnější na práci s délkami a přímkami – barycentrické souřadnice. Naučíme se vážit body, počítat obsahy a zase si spočítáme nepřeberné množství příkladů. Těšíme se na opětovné setkání!

Návody k úlohám a cvičením

5. Podívej se na obrázek. Je to totéž jako v kartézských souřadnicích.

8. Absolutní hodnota je vzdálenost bodu od počátku.

10. Kam se zobrazí 1?

11. Úsečky jsou si podobné, takže $c = za + k, d = zb + k$.

12. Střed podobnosti si dej do bodu 0, pak je spirální podobnost jenom násobení. Čím musíš vynásobit, aby se bod X posunul na bod Y?

13. Zapiš $a' = ra$, $a'' = sa$ pro nějaká $r, s \in \mathbb{C}$.

14. Podívej se na obrázek.

16. Vzpomeň na pravidlo pro rovnoběžník z příkladu 3.

21. Překlopením útvaru podle reálné osy získáš útvar s ním nepřímo shodný.

22. Ověř, že takovéto dělení funguje, jak má, tedy že $(a/b) \cdot b = a$.

23. Uvaž zpětné násobení: $(w/z) \cdot z = w$.

24. Vzpomeň si na vzorec $t = \frac{a+b+c}{3}$. Nezapomeň, že poměr $\frac{|a-t|}{|d-e|}$ se rovná $\left|\frac{a-t}{d-e}\right|$. Může se Ti hodit umístit si bod 0 do těžiště a používat $a + b + c = 0$.

25. Rozepiš si komplexní čísla po složkách: $a = x + yi$, $b = u + vi$.

27. $z \cdot \overline{z} = 1$.

30. $\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}$. Obě přímky posuň, aby procházely počátkem, pak už můžeš ověřovat, že jsou všechny body na jedné přímce.

31. Použij na oba transformaci jako v důkazu věty. Získáš vždy trojúhelník podobný původnímu.

32. Když opět uvážíme spirálku $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$, která zobrazí a na 0 a b na 1, kam se musí zobrazit c? U čtverce zkombinuj víc trojúhelníků.

33. Jeden překlop, pak už jsou přímo podobné.

34. Použij předchozí cvičení nebo opět podobnost, která přesune a na 0 a b na 1. Potom vyjádři z rovnosti.

38. Na (3) využij, že $\overline{x} = \frac{1}{x}$.

39. Dokaž kolmost AB a SC.

40. To, že je KL kolmé na MN a má stejnou délku, se pozná tak, že $\frac{k-l}{m-n} = \pm i$. To proto, že pak otočení okolo počátku o pravý úhel zobrazí čísla $k - l$ a $m - n$ na sebe.

41. Střed jednoho čtverce otoč okolo sousedního středu a ukaž, že padne na protější střed.

42. Průsečík tří přímek bude těžiště původního trojúhelníka.

43. Zaveď rovinu tak, že těžiště trojúhelníka bude bod 0 a používej $a + b + c = 0$.

45. Pro první část najdi takové reálné k, že $y = kz$. Nezapomeň, co je $|z|^2$. Druhá část pro Tebe už bude jistě hračka :)

48. Vzpomeň si na kritérium rovnoběžnosti a postupuj jako v předchozím příkladě. Alternativně se zamysli nad středy tětiv AB a CD.

51. Dosaď do vzorce pro přímku nebo překlopení.

52. Použij střed tětivy a najdi vhodnou spirální podobnost.

53. Zvol kružnici vepsanou jako jednotkovou a použij předchozí cvičení.

54. Hledaný bod bude $\frac{a+b+c+d}{2}$. Pro obě části jednoduše ověř kolmost.

55. Poněkud více vzorců, ale všechny už jsi viděl(a). Hodí se 19, 47, 49. Pak jen ukaž rovnost.

56. Použij vzorec pro patu výšky a počítej.

57. Zvol kružnici vepsanou jako jednotkovou se středem O. Dejme tomu, že N je hledaný průsečík, poté by mělo platit $A_2N \parallel OA_1$. Urči pomocí toho N.

58. Trojúhelníky budou nepřímo podobné. Použij buď cvičení 33 a nebo spočítej poměry délek.

61. Zvol $a = 1$, $k = -1$ a předefinuj body L a Q. Pak chceš ukázat, že MP je kolmá na reálnou osu, což je snadný výpočet.

62. Vhodně zvol osy tak, aby platilo $b = \overline{a}$. Jaký bude vztah bodu P a průsečíku úhlopříček?

63. Polož (DAB) jako jednotkovou kružnici. Bod M spočítáš snadno pomocí úlohy 51. Zbytek je jen cvičení se vzorci.

64. Vezmi kružnici vepsanou jako jednotkovou a bod dotyku s BC bude 1. Pak prostě počítej, vyjde to hezky.

65. Rozdíl $r - q$ zkus rozložit na činitele. K tomu využij dobrý trik: pokud se výrazy budou rovnat například pro $a = c$, tak můžeš vytknout z rozdílu činitel $(a - c)$. Pokus se rozdíly co nejvíce rozložit. Konečný podíl vyjde hezky.

66. Z rozdílů bude opět možno něco málo vytknout.

69. Stejnolehlost zobrazí G na H.

70. Ověř, že mají absolutní hodnotu 1.

71. Jak elegantně zahrnout podmínku pro rovnoběžnost? Celý obrázek si otoč tak, aby byly úsečky kolmé na reálnou osu, potom dokonce $d = \overline{a} = \frac{1}{a}$.

72. Ukaž, že středy úseček AH a BC tvoří průměr této kružnice. Alternativně spočítej, že vzdálenost středu od všech bodů je stejná.

74. Střed PH leží na přímce se dvěma patami.

75. Místo počítání průsečíku CO s AB uvaž bod přímo naproti C.

77. Sinus a kosinus jsou periodické funkce.

80. $\zeta_k = \zeta_1^k$.

83. Pro pátou odmocninu z jedné ζ si rozmysli, že platí $2\cos 36^\circ = \zeta + \frac{1}{\zeta}$. Z rovnosti $1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4=0$ odvoď kvadratickou rovnici, kterou toto číslo splňuje. Druhou část spočti pomocí formule pro dvojnásobný úhel.

88. Využij vzorec pro ortocentrum a ověř jedním výpočtem, že jsou u každého vrcholu stejně dlouhé strany a stejný úhel.

89. Absolutní hodnoty roznásob a použij $1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^6=0$.

90. Levá strana je velikost čísla $(p-1)(p-\zeta)(p-\zeta^2)\cdots(p-\zeta^{n-1}) = p^n-\zeta^n$, což je reálné číslo.

91. Spočítej paty výšek z bodu na jednotlivé strany a poté počítej vzdálenosti.

92. Čísla $x-1$, $x-\zeta$ a $x-\zeta^2$ vhodně přenásob odmocninami z jedné a sečti na nulu. Co to znamená pro příslušné délky?

Řešení cvičení

5. Z prvního dílu víme (v podstatě z definice goniometrických funkcí), že když uvážíme kružnici s poloměrem r, středem v počátku a na ní bod Z, který splňuje $\sphericalangle(\text{osa } x, \overrightarrow{OZ}) = \alpha$, má Z souřadnice $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, což je v komplexních číslech $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Když $r=|z|$ a $\alpha = \arg z$, dostaneme přesně goniometrický tvar bodu Z, takže vidíme, že $\sphericalangle(\text{osa } x, \overrightarrow{OZ}) = \arg z$.

8. Je to jednotková kružnice. Absolutní hodnota je vzdálenost bodu od počátku, čili všechny takové body mají vzdálenost od počátku 1, tedy leží na kružnici. Obecná kružnice se středem S a poloměrem r je tedy množina všech bodů Z takových, že $|z-s|=r$.

10. Číslo 1 se při násobení zobrazí přesně na číslo z, čili si stačí uvědomit, kam se v jednotlivých případech zobrazí bod 1, tedy kartézsky $(1,0)$. Vzdálenost od středu zachovají všechna tři zobrazení, proto z musí být bod splňující $|z|=|1|=1$. To máme absolutní hodnotu, co argument? z musí být takový bod, že $\sphericalangle(O1, \overrightarrow{OZ})$ je hledaný úhel otočení (středová souměrnost je otočení o 180°). To je ovšem úhel $\sphericalangle(\text{reálná osa}, \overrightarrow{OZ})$, což je $\arg z$. Díky goniometrickému tvaru budou příslušné body po řadě $\cos(\pi)+i\sin\pi=-1$, pak $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$ a konečně $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

11. Úsečky jsou si podobné (dají se zvětšit, otočit a posunout na sebe), takže platí $c=za+k, d=zb+k$ pro nějaká z, $k\in\mathbb{C}$. Najdeme takový bod m podobného zobrazení $x\mapsto zx+k$, který se nezmění, tedy který splňuje $m=zm+k$. To je bod $m=\frac{k}{1-z}$. Všimněme si, že tohle můžeme udělat, když $z\neq 1$, což je případ, kdy se na sebe dají přesunout posunutím. Teď vidíme, že se čísla a, b, m podobným zobrazením $x\mapsto zx+k$ zobrazí na body c, d, m, čili jsou si trojúhelníky ABM a CDM opravdu podobné.

12. Položme $s=0$. Pak existuje komplexní číslo r takové, že $x'=rx\neq 0$ a $y'=ry$. Pak chceme najít spirální podobnost, která přenese body x, $x'=rx$ na y, $y'=ry$. Je pak zjevné, že stačí zvolit střed podobnosti s a koeficient násobení bude komplexní číslo $\frac{y}{x}$.

14. Podobné zobrazení $x\mapsto a+(b-a)x$ zobrazí 0 na a a 1 na b. Stačí tedy najít střed čtverce nad úsečkou 01 a pak ho zobrazit touto podobností. Na obrázku u cvičení je část souřadnicové mřížky zobrazená touto podobností. Jeden ze dvou čtverců nad úsečkou 01 má vrcholy 0, 1, $1+i$, i a střed $\frac{1+i}{2}$. Střed se tedy zobrazí na

$$a+(b-a)\frac{1+i}{2} = a+\frac{1+i}{2}b-\frac{1+i}{2}a = \frac{1-i}{2}a+\frac{1+i}{2}b.$$

Stejně určíme střed rovnostranného trojúhelníka, který je nad úsečkou 01 v bodě $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ a obecně pak v bodě $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)b$.

20. Rovnost $a + bi = \overline{(a+bi)} = a - bi$ nastane právě tehdy, když $b = 0$, tedy z je reálné číslo. Podobně druhá rovnost nastane právě pro ryze imaginární čísla.

21. Mějme dva nepřímo podobné útvary. Komplexním sdružením $x \mapsto \overline{x}$ jeden útvar překlopíme (podle reálné osy), takže je přímo podobný s tím druhým. Potom už ho můžeme standardně otočit, naškálovat a posunout na druhý útvar zobrazením $\overline{x} \mapsto z\overline{x} + k$.

22. Podle tvrzení 19 platí $|b|^2 = b\overline{b}$, takže $a\overline{b}/|b|^2 = a\overline{b}/(b\overline{b}) = a/b$. To se hezky napíše, ale tváříme se přitom, že se vůbec nějak dělit dá. Tím si ovšem nemůžeme být tak jisti vzhledem k tomu, jak zvláštně se násobí. Můžeme to ověřit pořádně. Dělení má být opačná operace k násobení, chceme tedy ověřit, že $(a/b) \cdot b = a$:

$$(a/b) \cdot b = a\overline{b}/|b|^2 \cdot b = a\overline{b}b/|b|^2 = a|b|^2/|b|^2 = a.$$

Dá se snadno ověřit, že platí i další běžné vlastnosti dělení, třeba $(a/b)/c = a/(bc)$. Spočítáme pak $(8+i)/(2-3i) = (8+i)(2+3i)/(2^2+3^2) = (13+26i)/13 = 2+i$.

23. Pokud $z \neq 0$, tak $|z| \cdot |w/z| = |w|$. Obdobně $\arg(w/z) + \arg z = \arg w$.

25. Zapišme $a = x + yi$, $b = u + vi$, potom všechno snadno spočítáme. První vlastnost je jasná $\overline{a+b} = x + u - (y+v)i = \overline{a} + \overline{b}$. U druhé vlastnosti

$$\overline{(x+yi)(u+vi)} = \overline{[xu - yu + (xv+uy)i]} = u - yu - (xv+uy)i = (x-yi)(u-vi).$$

32. Podle úlohy 31 je $\triangle ABC$ rovnostranný, když $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Podmínka pro to, aby byl $ABCD$ čtverec, může být třeba $\frac{a-b}{c-b} = \frac{d-c}{b-c} = \pm i$. Odpovídá to ověření, že jsou ABC a BCD přímo podobné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky.

33. Překlopíme ABC podle reálné osy na $A'B'C'$. To je sdružení, takže $a' = \overline{a}, b' = \overline{b}, c' = \overline{c}$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou si nepřímo podobné, takže už stačí ověřit podle úlohy 31 přímou podobnost trojúhelníků $A'B'C'$ a DEF, takže vhodná podmínka bude například $\frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = \frac{f-d}{e-d}$.

34. Je to

$$\frac{(b-a)\overline{z} + \overline{b}a - b\overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}.$$

Je-li Z' zrcadlový obraz podle přímky AB, jsou trojúhelníky ABZ a ABZ' nepřímo podobné, takže můžeme vyjádřit z' ze vzorce z předchozího cvičení $\frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = \frac{z'-a}{b-a}$. Také můžeme použít podobnost $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$, která zobrazí a na 0 a b na 1. Tedy zobrazí AB na reálnou osu. Překlopení podle reálné osy je ovšem sdružení, takže obrazy z a z' musí být sdružené, z čehož vypadne stejná rovnost jako předtím.

Zajímavé je ověřit to pomocí obecné nepřímé podobnosti. Vidíme, že řešení je tvaru $k\overline{z} + c$, takže to je nepřímá podobnost. Dosadíme-li a a b, zjistíme, že se touto podobností zachovají. Jediná nepřímá podobnost, která zachovává body A, B, je osová souměrnost podle přímky AB.

Pata výšky je střed úsečky ZZ', takže ji spočítáme jako $\frac{z+z'}{2}$.

36. (3), (4) leží na přímce, (2) jsou kolmé. (1) ani jedno.

48. Podle úlohy 30 platí, že $AB \parallel CD$ platí právě tehdy, když $\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}$. Pro A, B, C, D na jednotkové kružnici toto znamená

$$\frac{b-a}{d-c} = \overline{\left(\frac{b-a}{d-c}\right)} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{c}} = \frac{cd(a-b)}{ab(c-d)},$$

což nastane právě pokud $ab = cd$.

52. Ukážeme si, jak na to přijít. Označme P průsečík tečen a M střed AB. Pak $\triangle OMA \sim \triangle OBP$, tedy pro nějaké $r \in \mathbb{C}$ platí $r\frac{a+b}{2} = b$ a zároveň $p = ra$. Z toho snadno získáme $p = \frac{2ab}{a+b}$.

69. Uvažme komplexní rovinu tak, že kružnice opsaná ABC je jednotková. Potom $o = 0$, $g = \frac{a+b+c}{3}$ a $h = a + b + c$. Stejnolehlost se středem v O a koeficientem 3 zobrazí G na H, proto jsme hotovi.

70. Oproti přímému výpočtu si můžeme malinko ušetřit práci. Průsečík výšky s opsanou kružnicí má podle příkladu 47 vzorec $-\frac{bc}{a}$. Pata výšky z A na BC má tvar $d = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right)$, tedy je to střed bodů $a+b+c = h$ a $-\frac{bc}{a}$, čímž jsme ověřili, že je zrcadlový obraz bodu H na kružnici opsané $-\frac{bc}{a}$ a leží tak na kružnici opsané. Obdobně, bod A' přímo naproti A má příslušné komplexní číslo $-a$. Pak $b + c = -a + a + b + c$, tedy B, A', C, H tvoří rovnoběžník a středy úhlopříček splývají, čili je A' obraz H ve středové souměrnosti podle středu BC.

71. Natočíme si rovinu tak, aby tři rovnoběžky byly kolmé na reálnou osu. Pak bude platit $d = \overline{a} = \frac{1}{a}$ a podobně $be = cf = 1$. Poté $s = b + c - \frac{bc}{d} = b + c - abc$ a $t = a + c - abc$, $u = a + b - abc$. Toto dosadíme do zlomku z věty o kružnici:

$$\frac{s-t}{s-u} : \frac{h-t}{h-u} = \frac{b-a}{c-a} : \frac{b+abc}{c+abc} = \frac{(b-a)(1+ab)}{(c-a)(1+ac)}.$$

Číslo sdružené k danému zlomku je

$$\frac{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{ab}\right)}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{ac}\right)} = \frac{(a-b)\,(ab+1)}{(a-c)\,(ac+1)},$$

což je to samé – tedy zlomek je reálné číslo a jsme hotovi.

77. Upravíme tvar z definice.

$$\zeta_{k+n} = \cos\left(\frac{2\pi(k+n)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(k+n)}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n} + 2\pi\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \zeta_k.$$

80. Podle Moivrovy věty platí $\zeta_k \cdot \zeta_l = \zeta_1^k \cdot \zeta_1^l = \zeta_1^{k+l} = \zeta_{k+l}$. Dále jelikož má ζ_k absolutní hodnotu rovnou jedné, je $\overline{\zeta_k} = \frac{1}{\zeta_k}$. Podle první části cvičení ovšem platí $\zeta_k \cdot \zeta_{n-k} = \zeta_n = 1$, z čehož vidíme, že $\frac{1}{\zeta_k} = \zeta_{n-k}$.

83. Nejprve si všimni, že obě čísla budou kladná. Máme trochu nápovědně napsáno $2\cos 36°$ Označme $\zeta = \cos 36° + i\sin 36°$ pátou odmocninu z jedné. Pak $2\cos 36° = \zeta + \frac{1}{\zeta}$. Jak toto číslo určit? Platí

$$0 = 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 \implies 0 = \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} + 1 + \zeta + \zeta^2 = \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2 + \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - 1,$$

z čehož získáme $\zeta + \frac{1}{\zeta} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Pomocí formule pro dvojnásobný úhel získáme $\cos 18° = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

86. Můžeme postupovat analogicky jako u předchozí věty, dojdeme k

$$|\zeta_k - \zeta_\ell| = \sqrt{2 - (\zeta_{k-\ell} + \overline{\zeta_{k-\ell}})} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2(k-\ell)\pi}{n}}.$$