Povídání k druhé jarní sérii

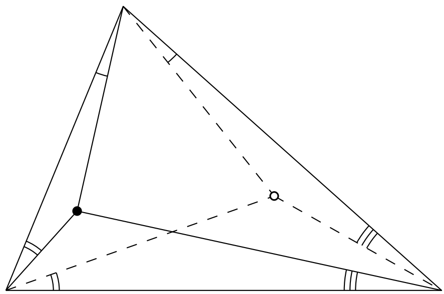
Milý příteli,

vítej u úvodního textu na téma *kamarádi.* Ač to tak nezní, je to pojem z geometrie. Budeme zkoumat, kdy jsou dva body vůči pevnému trojúhelníku takzvaní kamarádi. Nejprve si definujeme pojem, který zní možná děsivěji, ale je to vlastně kamarádění se přímek vzhledem k nějakému úhlu.

Definice. Přímky AP, AQ nazveme *izogonálami* v úhlu XAY, pokud se na sebe zobrazí v osové souměrnosti podle osy úhlu XAY.

Obvykle se izogonály definují pomocí úhlů: Pokud P a Q leží uvnitř úhlu XAY, jsou AP, AQ izogonálami v úhlu XAY, právě když $|\sphericalangle PAX| = |\sphericalangle QAY|$. Definice výše ale postihuje i další případy polohy bodů P a Q. Nyní už si konečně můžeme říct, co jsou to ti kamarádi.

Definice. Mějme trojúhelník ABC a bod P, který se neshoduje s žádným z jeho vrcholů. Bod Q nazveme *kamarádem* bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC, pokud jsou AP, AQ izogonály v úhlu BAC, BP, BQ jsou izogonály v úhlu ABC a CP, CQ jsou izogonály v úhlu BCA.



Například takový střed kružnice vepsané leží na osách úhlů, takže je kamarádem sám se sebou. Když P leží na kružnici opsané ABC, příslušné izogonály, jejichž protnutím bychom získali kamaráda P, jsou rovnoběžky. Tudíž body na kružnici opsané kamaráda nemají. Není vlastně vůbec jasné, jestli nějaký bod kromě středu kružnice vepsané kamaráda má – ony tři izogonály se nemusí protínat. Ukážeme si, že je tomu právě naopak a kromě bodů na kružnici opsané mají kamaráda všechny body v rovině. Nejprve si ale ukážeme jednu známou dvojici kamarádů.

Tvrzení. (OH jsou kamarádi) *Je dán trojúhelník ABC. Střed jeho kružnice opsané a průsečík výšek jsou kamarádi.*

Důkaz. Označme střed kružnice opsané ABC jako O a průsečík výšek ABC jako H. Dokážeme tvrzení pro ostroúhlý trojúhelník, pro tupoúhlý je to obdobné, jen je třeba si rozmyslet, kde O a H leží. V ostroúhlém trojúhelníku leží O a H uvnitř, takže nám ze symetrie stačí ukázat, že AH a AO jsou izogonály v úhlu BAC. Označme $|\sphericalangle ABC|$ jako β. Protože AH je kolmice na BC, $|\sphericalangle BAH| = 90° - \beta$. Z věty o obvodovém a středovém úhlu víme, že $|\sphericalangle AOC| = 2\beta$. Protože trojúhelník AOC je rovnoramenný se základnou AC, dopočítáme, že $|\sphericalangle CAO| = 90° - \beta = |\sphericalangle BAH|$, přesně jak chceme.

Tvrzení. *Mějme trojúhelník ABC. Každý bod neležící na jeho kružnici opsané má vzhledem k ABC kamaráda.*

Toto tvrzení se dá lehce dokázat pomocí takzvané goniometrické Cevovy věty nebo plyne z následujícího tvrzení. Jakkoli jsou totiž kamarádi úzce spojeni s izogonálami, dají se definovat zcela bez nich. V této alternativní konstrukci už není pochyb, že by něco bylo definováno nejednoznačně. Využijeme toho, že o osách stran trojúhelníku víme, že se protínají v jednom bodě, a to středu kružnice opsané.

Tvrzení. (alternativní konstrukce kamaráda) *Je dán trojúhelník ABC a bod P neležící na jeho kružnici opsané. Označme postupně P_a, P_b, P_c obrazy bodu P v osové souměrnosti podle přímek BC, CA, AB. Potom je střed kružnice opsané $P_aP_bP_c$ kamarád bodu P vzhledem k ABC.*

Důkaz. Ze symetrie stačí ukázat, že osa P_bP_c je izogonála AP v úhlu BAC. Potom je ještě třeba ukázat, že P_a, P_b, P_c neleží na přímce. Taková věc se stane právě tehdy, když P leží na kružnici opsané ABC. Je potřeba trocha počítání úhlů, které ponecháváme jako cvičení.

Nyní si rozmyslíme, že osa P_bP_c prochází bodem A. Bod A je střed kružnice opsané PP_bP_c, neboť leží na osách stran PP_b, PP_c. Tudíž leží i na ose třetí strany, jak chceme. Označme osu P_bP_c jako p.

Protože přímka p je kolmice na P_bP_c a AC je kolmice na PP_b, je (orientovaný)[1] úhel mezi přímkami p a AC stejný jako (orientovaný) úhel mezi přímkami P_bP_c a PP_b, označme ho φ. Z věty o obvodovém a středovém úhlu použité na kružnici opsanou PP_bP_c se středem A víme, že orientovaný úhel mezi AP_c a AP je 2φ. Dále využijeme toho, že osa strany PP_c je AB, což je tím pádem i osa úhlu P_cAP. Tudíž orientovaný úhel mezi AB a AP je φ. Tím jsme získali požadovanou rovnost úhlů.

Jak již bylo řečeno, toto tvrzení je užitečné třeba k tomu, abychom ukázali, že kamarád téměř libovolného bodu opravdu existuje. Je známo, že zvolíme-li P jako průsečík výšek ABC, budou P_a, P_b, P_c ležet na kružnici opsané ABC. Tím získáváme další důkaz „OH jsou kamarádi". Tím ale užitečnost tvrzení nekončí, lze ho využít i v důkazu následující věty. Pokud jsi už slyšel(a) o Feuerbachově kružnici, bude Ti tato věta včetně důkazu možná lehce povědomá.

Věta. (Six feet theorem) *Je dán trojúhelník ABC a bod P neležící na jeho kružnici opsané. Kamaráda P vzhledem k ABC označíme Q. Potom paty kolmic z P na strany trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici s patami kolmic z Q na strany trojúhelníku ABC.*

Důkaz. Označme P_a, P_b, P_c jako v předchozím tvrzení, obdobně označme Q_a, Q_b a Q_c.

Uvažme stejnolehlost s koeficientem $\frac{1}{2}$ a středem P. Body P_a, P_b a P_c se zobrazí na paty kolmic z P na strany trojúhelníku ABC. Protože střed kružnice opsané $P_aP_bP_c$ byl Q, leží střed kružnice opsané patám z P ve středu úsečky PQ. Kamarádění je symetrické, takže střed kružnice opsané patám z Q také leží ve středu PQ. Stačí tedy ukázat, že tyto dvě kružnice mají stejný poloměr.

Označme paty z P a Q na BC postupně P' a Q'. Potom je $PP'Q'Q$ pravoúhlý lichoběžník, tedy jeho střední příčka je i osou $P'Q'$. Tudíž střed PQ je stejně daleko od P' a Q' a výše zmíněné kružnice mají vskutku stejný poloměr, je to tedy ta samá kružnice.

Přejeme Ti mnoho štěstí při řešení úloh,

Tvoji organizátoři

[1] Pokud neznáš orientované úhly, představuj si P uvnitř trojúhelníku a pak si zkus rozebrat další možné konfigurace.