Analytická geometrie I – Do hlubin goniometrie

Milý příteli,
v rukou držíš a nebo na Tvém monitoru svítí zbrusu nový matematický seriál. Letos se budeme zabývat řešením klasických geometrických úloh pomocí výpočetních metod. Naším cílem je zde rozšířit Tvou zásobu triků – užívání podobností, hledání úhlů, dokreslování nových bodů – o pár nových početních kousků, které Ti, věříme, budou dobře sloužit.

Provedeme Tě leckterými technikami analytické geometrie a ukážeme si, že i když jde o geometrii, můžeme v úlohách mnohé počítat a skutečně budeme počítat úlohy od lehkých až po ty nejtěžší. Tento díl se bude hlavně zaměřovat na práci s goniometrickými funkcemi, díl další už bude poněkud komplexnější.

Seriál pro Tebe letos píší Zdeněk Pezlar a Matouš Šafránek. Kdybys měl(a) jakékoli nejasnosti, nevěděl(a) si rady s úlohou nebo měl(a) touhu si postěžovat, neváhej nás kontaktovat na mailech *zdendapezlar@seznam.cz* a *matous.safranek@gmail.com* nebo se zeptat na PraSečím chatu. Stejně tak se rádi doslechneme, když nějakou úlohu vyřešíš lépe než my. Přejeme příjemné počítání :)

Počítání je fajn, ale... aneb jak pracovat se seriálem

V tomto díle seriálu postupně budujeme teorii, kterou zakládáme na znalosti goniometrických funkcí, i ty si ale znovu představíme. K pochopení seriálu tedy nepotřebuješ žádné speciální znalosti.

Tento text Ti doporučujeme číst pomalu, kreslit si, počítat a rozmyslet si, že tvrzení, která Ti představíme, opravdu platí. K důkazům nepřistupuj jako ke svatým textům, ale snaž se o jejich plné pochopení, aby sis ze svého čtení odnesl(a) co nejvíce. Důkazy některých tvrzení občas využívají triky, zkus si ale před přečtením důkazu tvrzení dokázat sám(sama).

V textu na Tebe čekají různé věty, úlohy, příklady a cvičení. „Příklady“ jsou zpravidla úlohy, které hezky ilustrují princip, o kterém se bavíme. „Cvičení“ a „úlohy“ jsou tu pro Tebe, aby sis vyzkoušel(a) práci s nově nabytými znalostmi. Cvičení často představují jednoduché důsledky probíraných tvrzení a jejich řešení najdeš na konci seriálu. Úlohy mohou být těžší a jejich řešení není potřeba ke čtení textu – pokud si s nějakou nevíš rady, s klidem se k ní vrať později. U cvičení Ti doporučujeme si přečíst řešení. K úlohám i cvičením každopádně najdeš na posledních stranách nápovědy.

Konečně se pobavme o samotné matematické stránce seriálu. Je důležité si uvědomit, že analytické metody jsou jenom to – metody! Není to převratný pohled na geometrii, který Ti umožní snadno vyřešit všechny úlohy. Proto až budeš mít celý papír popsaný úpravami výrazu, prosíme Tě, zadrž. Možná je lepší začít jinou metodou...

Aby ses naučil(a), které výpočty můžou vést k výsledku, je tu pro Tebe tento seriál. Nechceme Ti předepisovat jediný postup, ať Tě při řešení úlohy napadne jakýkoli způsob počítání, klidně si ho zkus, sám(sama) a zjistíš, zda vede k cíli. Postupem času si vypracuješ oko a snadno poznáš, kdy už úloha půjde snadno dokončit výpočtem. Pokud máš ambice uspět v olympiádě, pečuj i o své schopnosti řešit úlohu synteticky.

U každé úlohy, kterou budeš řešit, se pozastav a zamysli se, jestli opravdu dává smysl úlohu počítat. Do bitvy s úlohou se pusť s plánem a vírou, že konec leží v dohlednu. Tento pohled platí dvakrát na ostré soutěži – máš na vyřešení tří úloh jen málo času, nemarni cenné minuty!

Rozhodneš se tedy s čistou myslí nějakou z technik použít. Jak ale řešení sepsat? V tomto i dalších dílech budujeme teoretický základ jistých technik. Pokud nějakou z nich vytáhneš na soutěži, buď opatrný (opatrná) – různí opravovatelé berou různé poznatky za zřejmé. U pokročilejších a méně známých technik si zvykni odkazovat se na konkrétní tvrzení z článků a nebo dokazovat potřebná tvrzení na konci svého řešení. Speciálně, obsah sekce rovnání vln dle našich nejlepších vědomostí nebyl zatím popsán, pročež doporučujeme při jeho případném použití odkázat přímo na tento seriál.

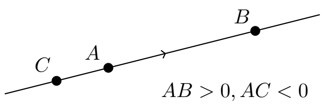
Vymítání absolutních hodnot

V klasické geometrii bereme vzdálenosti přirozeně jenom nezáporné, ale při počítání nám absolutní hodnoty spíš zavaří. Například leží-li na přímce body A, B, C a víme-li, že $|AB| = 2$ a $|BC| = 1$, kolik je $|AC|$? Jelikož v úlohách nechceme řešit, která ze dvou množností zrovna nastane, zavedeme si veličiny se znaménkem.

Na přímce rozlišíme dva směry, totiž „směry, kterými ji můžeme kreslit“.

Definice 1. *Orientovaná přímka* je přímka, jíž jeden směr označíme za kladný.

Definice 2. *Orientovaná vzdálenost* AB mezi dvěma body A, B na (orientované) přímce je v absolutní hodnotě rovna běžné vzdálenosti $|AB|$ a má kladné znaménko, pokud leží B v kladném směru od A, jinak má záporné znaménko.



Pokud si za přímku představíš číselnou osu, kde body odpovídají reálným číslům, je orientovaná vzdálenost bodu y od bodu x rovna $y - x$, kdežto absolutní vzdálenost je $|y - x|$. Pokud zapíšeme $\overrightarrow{AB}$, myslíme tím přímku AB orientovanou tak, aby byla vzdálenost AB kladná. Často však na konkrétní orientaci nezáleží. Následující pozorování je klíčovou vlastností orientovaných délek. Díky orientovaným délkám totiž nemusíme řešit, v jakém pořadí body na přímce leží.

Pozorování 3. *Pro body A, B, C na přímce platí $AB + BC = AC$. Speciálně $AB = -BA$.*

Definice 4. *Orientovaným úhlem* $\sphericalangle(p, q)$ mezi dvěma orientovanými přímkami p, q myslíme úhel, o který musíme otočit p, aby byla rovnoběžná s q a měla stejnou orientaci. Přitom se otočení jedním směrem (typicky proti směru hodinových ručiček) považuje za otočení o kladný úhel a druhým směrem o záporný. Orientovaným úhlem mezi třemi body $\sphericalangle BAC$ myslíme $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Orientovaný úhel je určen jednoznačně až na násobek $360°$.[1] Všimni si následující klíčové vlastnosti orientovaných úhlů, která nezávisí na vzájemné poloze přímek.

Pozorování 5. *Pro orientované přímky a, b, c platí $\sphericalangle(a, b) + \sphericalangle(b, c) = \sphericalangle(a, c)$. Speciálně $\sphericalangle(a, b) = -\sphericalangle(b, a)$.*

[1] Pozor, v různých zdrojích se můžeš dočíst o „orientovaném úhlu modulo 180°“, kde je úhel určen až na násobek 180° a má jiné vlastnosti.

Kromě výše zmíněných můžeme měřit ještě vzdálenost bodu od přímky. Tou rozumíme vzdálenost bodu od paty kolmice z něj. Jelikož jsou všechny kolmice rovnoběžné, můžeme každou orientovat stejně a tím definovat orientovanou vzdálenost bodu od přímky. Orientaci kolmic může být potřeba určit, pokud na ní záleží.

Definice 6. Dejme každé kolmici k přímce p stejnou orientaci. Veďme bodem B kolmici k p a její patu (průsečík s p) označme B_0. *Orientovanou vzdáleností Bp bodu B od přímky p* myslíme orientovanou vzdálenost B_0B.

Kartézské souřadnice

Kartézské souřadnice jsou dost možná to, co ze školy znáš pod pojmem „analytická geometrie“. Ačkoliv jsou kartézské souřadnice v mnoha ohledech nejpřirozenější, v klasických olympiádních úlohách s nimi tolik nezaboduješ, protože se výrazy rychle protáhnou. Můžou se ale hodit na úlohy s málo objekty, čtverce a obdélníky jsou tu Tvoji kamarádi. Připomeňme si to nejdůležitější.

Definice 7. Nechť jsou osa x a osa y dvě kolmé přímky. Kartézské souřadnice bodu jsou čísla x, y, kde x je jeho orientovaná vzdálenost od osy y a y je jeho orientovaná vzdálenost od osy x. Bod zadaný v kartézských souřadnicích značíme (x, y).

Průsečíku os říkáme počátek (počátek soustavy souřadnic) a značíme jej O. Osám běžně přiřazujeme orientaci takovou, aby měla osa x stejnou orientaci jako vzdálenost od osy y a naopak[2]. Úhly počítáme tak, aby $\sphericalangle(\text{osa } x, \text{osa } y) = 90°$ (a ne $-90°$).

Tvrzení 8. (Rovnice přímky) *Přímka se dá vyjádřit jako množina bodů splňujících $ax+by+c = 0$ pro nějaké konstanty a, b, c.*

Naopak pro každou trojici čísel a, b, c, kde aspoň jedno z a, b není nulové, je $ax + by + c = 0$ rovnice přímky.

Definice 9. O funkci, která přiřazuje bodu v rovině reálné číslo, řekneme, že je *lineární*, pokud se dá vyjádřit ve tvaru $f(x, y) = ax + by + c$.

Vzdálenosti v kartézských souřadnicích umíme vyjádřit přesně. Následující formule si zkus dokázat, bude se hodit Pythagorova věta.

Tvrzení 10. *Buďte $p : ax + by + c = 0$ daná přímka a $X = (x_0, y_0)$ bod v rovině. Poté je orientovaná vzdálenost Xp rovna*

$$\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Tvrzení 11. (Rovnice kružnice) *Kružnice se dá vyjádřit jako množina bodů splňujících*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0,$$

kde x_0, y_0 jsou souřadnice středu a r je poloměr.

Každou rovnici kružnice můžeme roznásobit do tvaru $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$ pro nějaké konstanty c, d, e. A naopak?

Cvičení 12. Množina bodů splňujících $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$ pro nějaké konstanty c, d, e je kružnice, bod, anebo prázdná množina.

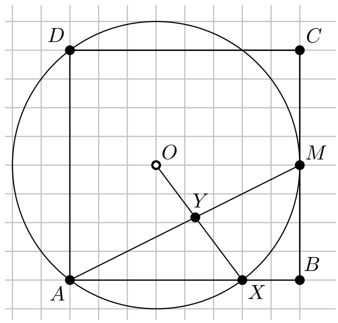
Rozmysli si, jak budou vypadat průsečíky přímek a kružnic. Kdy se dvě přímky neprotínají? Jak spočítat průsečíky dvou kružnic nebo kružnice a přímky? Pro souřadnice průsečíků získáš jenom

[2] Tedy tak, aby pro bod X na ose x měly vzdálenost OX a vzdálenost X od osy y stejné znaménko.

soustavu rovnic, kterou můžeš řešit například dosazováním nebo vhodným sčítáním a odečítáním rovnic.

Teď si ukážeme přímočarou aplikaci kartézských souřadnic v geometrické úloze. V praxi, pokud bys použil(a) kartézské souřadnice v olympiádní úloze, pravděpodobně si budeš muset s konfigurací více pohrát – například redukovat úlohu na tvrzení, které jde spočítat snadno.

Příklad 13. Buď $ABCD$ čtverec se stranou délky 8. Označme M střed BC, O střed kružnice ω opsané trojúhelníku MAD a X druhý průsečík této kružnice s přímkou AB. Přímky AM a XO se protínají v Y. Určete délku OY. (PuMAC 2016)



Řešení. V úloze máme daný čtverec a jedinou kružnici. Každý objekt v zadání bychom lehce spočítali, což navádí na použití kartézských souřadnic. Zaveďme soustavu souřadnic tak, že $A = (0,0)$, $B = (8,0)$, $C = (8,8)$ a $D = (0,8)$, bod M má pak souřadnice $(8,4)$. Nyní spočteme rovnici ω. Díky symetrii okolo přímky $y = 4$ leží její střed na této přímce – ať je to bod $O = (t,4)$. Potom vzdálenosti bodu O od bodů A a M musí být shodné

$$\sqrt{t^2 + 15} = |OA| = |OM| = |t - 8|,$$

což dává $t = 3$ a tedy $O = (3,4)$. Poloměr kružnice je $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Kružnice opsaná MAD má tedy tvar $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Její průsečíky s přímkou AB nalezneme jednoduše dosazením rovnice této přímky, $y = 0$. Průsečíky tak splňují $(x-3)^2 + 16 = 25$, tedy $x \in \{0,6\}$. Bod $X \neq A$ má tak souřadnice $(6,0)$. Nyní spočítáme rovnici přímky AM. Dosazením souřadnic těchto bodů do obecného tvaru přímky $ax + by + c = 0$ snadno najdeme, že rovnice přímky je $x = 2y$. Spočítáme též, že rovnice přímky XO je $4x + 3y = 24$. Souřadnice bodu Y získáme vyřešením této soustavy rovnic, dosazením získáme $x = \frac{48}{11}$ a $y = \frac{24}{11}$, tj. $Y = \left(\frac{48}{11}, \frac{24}{11}\right)$. Konečně, délku OY spočítáme jako $\sqrt{\left(3 - \frac{48}{11}\right)^2 + \left(4 - \frac{24}{11}\right)^2} = \frac{25}{11}$.

Úloha 14. Pro body A, B, C, D v rovině dokaž, že $AC \perp BD$ nastane právě tehdy, pokud platí $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.

Úloha 15. (Rovnoběžníkové pravidlo) Dokaž, že součet čtverců délek stran daného rovnoběžníku je roven součtu čtverců délek jeho úhlopříček.

Úloha 16. V trojúhelníku ABC označme D, E, F po řadě středy úseček AB, BC a AD. Dokaž, že přímka CD půlí úsečku EF. (Školní kolo MO C 2019)

Úloha 17. Na straně AB rovnoběžníka $ABCD$, v němž $|AB| = 1$, jsou zvoleny body K a L tak, že $|BK| = \frac{1}{2}$ a $|BL| = \frac{1}{3}$. Na straně CD jsou zvoleny body P a Q tak, že $|CP| = \frac{1}{2}$ a $|CQ| = \frac{1}{3}$. Průsečík přímek LD a KP označme X, průsečík přímek BD a LQ označme Y. Dokaž, že přímka XY půlí stranu BC. (Krajské kolo MO C 2019)

Úloha 18. Buď AB průměr kružnice s poloměrem $5\sqrt{2}$. Dále buď CD tětiva této kružnice, která protíná AB v bodě E splňujícím $|BE| = 2\sqrt{5}$ a $\sphericalangle AEC = 45°$. Urči $|CE|^2 + |DE|^2$.

(AMC 12 2020)

Kartézskými souřadnicemi samotnými se nebudeme příliš zabývat, ukážeme si ale jednu roztomilou skutečnost, která plyne z jejich základních vlastností.

Mocnost bodu ke kružnici

Definice 19. Buď ω kružnice se středem O a poloměrem r a P bod v rovině. Potom definujeme *mocnost bodu* P k ω jako $\rho(P, \omega) = |OP|^2 - r^2$.

Cvičení 20. Nechť má ω rovnici $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$. Pak je mocnost bodu (x, y) k ní rovna právě $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$.

Cvičení 21. Buď ω kružnice a bod P mimo ni. Délka tečny z P k ω (míněno od P k bodu doteku) je $\sqrt{\rho(P, \omega)}$.

Věta 22. (Linearita mocnosti) *Uvažme v rovině dvě kružnice ω_1, ω_2. Poté funkce bodu roviny*

$$f(P) = \rho(P, \omega_1) - \rho(P, \omega_2)$$

je lineární.

Důkaz. Podle cvičení 20 můžeme mocnosti vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\rho(P, \omega_1) &= x^2 + y^2 + c_1x + d_1y + e_1,\\ \rho(P, \omega_2) &= x^2 + y^2 + c_2x + d_2y + e_2,\end{aligned}$$

kde jsme rovnice rovnou roznásobili. Jejich rozdíl je pak

$$(c_1 - c_2)x + (d_1 - d_2)y + e_1 - e_2,$$

což je lineární. □

Cvičení 23. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice ω_1, ω_2. Dokaž, že množina bodů, jejichž rozdíl mocností $\rho(P, \omega_1) - \rho(P, \omega_2)$ je konstantní, je přímka kolmá na spojnici středů.

Příklad 24. Jsou dány dvě kružnice ω_1, ω_2. Dokaž, že množina bodů, jejichž podíl mocností $\frac{\rho(P,\omega_1)}{\rho(P,\omega_2)}$ je konstantní, je kružnice, prázdná množina, přímka nebo bod.

Důkaz. Hledáme množinu $\frac{\rho(P,\omega_1)}{\rho(P,\omega_2)} = k$ pro danou konstantu k. Pro $k = 1$ už víme, že vyjde přímka, pro zbylá k dokážeme, že nám vyjde kružnice.

Zaveďme nyní libovolně kartézské souřadnice s tím, že bod P má souřadnice (x, y). Jak víme ze cvičení 20, existují konstanty c_i, d_i a e_i takové, že mocnosti bodu P k těmto kružnicím jsou

$$\begin{aligned}\rho(P, \omega_1) &= x^2 + y^2 + c_1x + d_1y + e_1,\\ \rho(P, \omega_2) &= x^2 + y^2 + c_2x + d_2y + e_2.\end{aligned}$$

Množina bodů splňujících $\rho(P, \omega_1) = k\rho(P, \omega_2)$ je

$$0 = \rho(P, \omega_1) - k \cdot \rho(P, \omega_2) = (1 - k)x^2 + (1 - k)y^2 + (c_1 - kc_2)x + (d_1 - kd_2)y + (e_1 - ke_2).$$

To je po vydělení $1 - k \neq 0$ rovnice kružnice. Může to ovšem být bod nebo prázdná množina. □

Definice 25. Množinu bodů, které mají ke dvěma daným kružnicím k, ℓ stejnou mocnost, nazveme *chordálou.*

Pozorování 26. *Pokud se kružnice protínají, prochází chordála jejich průsečíky.*

Úloha 27. (Potenční střed) Jsou dané tři kružnice k, ℓ, m s navzájem různými středy. Dokaž, že tři jejich chordály jsou buď všechny rovnoběžné, nebo procházejí jedním bodem.

Dokázali jsme, že rozdíl mocností bodů ke dvěma kružnicím je lineární zobrazení. Pro více úloh využívající tuto techniku Tě odkážeme na *https://prase.cz/library/LinearitaRO/LinearitaRO.pdf.*

Úloha 28. Kružnice k, ℓ se dotýkají zevně v bodě S. Přímka skrz S protne k znovu v bodě K a ℓ znovu v bodě L. Dokaž, že podíl délky tečny z K k ℓ a délky tečny z L ke k nezávisí na volbě přímky.

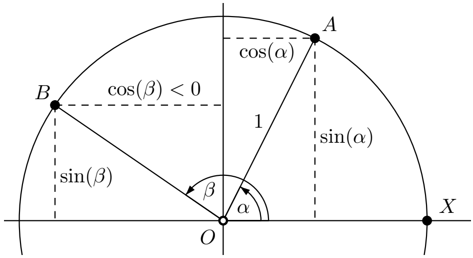
Goniometrie z rychlíku

Goniometrické funkce jsou funkce, které popisují vztahy mezi délkami stran pravoúhlého trojúhelníka a velikostmi jeho úhlů. S nimi ses buď setkal(a), nebo se setkáš na střední škole. Nebudeme se jimi příliš zabývat, ale budeme je potřebovat k počítání. Jestliže Ti nepostačí následující stručný úvod, můžeme Ti doporučit dobrý úvodní text do goniometrických funkcí, který se nachází na *https://prase.cz/library/GoniometrieMB/GoniometrieMB.pdf.*

Definice 29. Buď O bod $(0,0)$, X bod $(1,0)$ a j takzvaná *jednotková kružnice* s rovnicí

$$x^2 + y^2 = 1,$$

tedy kružnice se středem O procházející bodem P. Pro daný (orientovaný) úhel α najdeme na kružnici j bod A takový, že $\sphericalangle XOA = \alpha$. Jeho souřadnice x, y pak v tomto pořadí označíme jako *kosinus*, respektive *sinus* úhlu α. Značíme je $\cos(\alpha)$ a $\sin(\alpha)$.

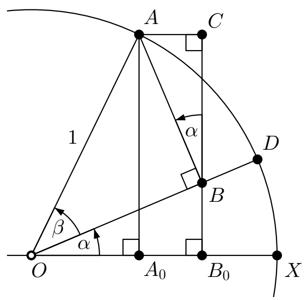


Rozmysli si, že jsme definovali sinus a kosinus v souladu s tím, jak je znáš v pravoúhlém trojúhelníku. K tomu můžeme přidat orientaci – jsou-li strany trojúhelníka orientovány tak, že $\sphericalangle(AB, BC) = 90°$, platí $BC = AC \sin(\sphericalangle(AB, AC))$ a $AB = AC \cos(\sphericalangle(AB, AC))$.

Tvrzení 30. *Připomeňme zde základní vlastnosti goniometrických funkcí, které budeme využívat. Zde uvažujeme α, β jako libovolné orientované úhly.*

(1) $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$.
(2) $\sin \alpha = \sin \beta$, *právě pokud platí* $\alpha - \beta = 2k\pi$ *pro přirozené* k *a nebo* $\alpha + \beta = k\pi$ *pro* k *liché.*
(3) *(součtový vzorec pro sinus)* $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.
(4) *(součtový vzorec pro kosinus)* $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.
(5) $\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$ a $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$.
(6) *(goniometrická jednička)* $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. *Naopak pro každá* a, b *splňující* $a^2 + b^2 = 1$ *existuje* α *takové, že* $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Důkaz. Tvrzení jsou známá a většinou jednoduchá, uveďme důkaz pouze bodům (3) a (4), takzvaným součtovým vzorcům. Uvažme konfiguraci jako na obrázku.



Důkaz uděláme plně orientovaně, což může vypadat složitě, ale zato bude platit ve všech konfiguracích. Máme tedy orientace $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA}$. Kolmicím dáme přirozeně orientaci takovou, aby

$$\sphericalangle(OX, A_0A) = \sphericalangle(OX, B_0B) = \sphericalangle(OD, BA) = 90^\circ.$$

Potom platí i se znaménkem

$$\begin{aligned} A_0A &= OA \cdot \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta), \\ BA &= OA \cdot \sin(\beta) = \sin(\beta), \\ OB &= OA \cdot \cos(\beta) = \cos(\beta), \\ B_0B &= OB \cdot \sin(\alpha) = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Dále si uvědomíme, že

$$\sphericalangle(BC, BA) = \sphericalangle(BC, OX) + \sphericalangle(OX, OD) + \sphericalangle(OD, BA) = -90^\circ + \alpha + 90^\circ = \alpha,$$

a z toho dostaneme

$$BC = BA \cdot \cos(\alpha) = \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha).$$

Z obdélníku A_0ACB_0 je ale patrné, že $A_0A = B_0B + BC$, což můžeme přepsat na

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha).$$

Součtový vzorec pro kosinus už získáme snadno pomocí ostatních vlastností:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) = \sin(90^\circ - \alpha - \beta) &= \sin(90^\circ - \alpha)\cos(\beta) + \cos(90^\circ - \alpha)\sin(-\beta) = \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$ □

Cvičení 31. Dokaž, že pro libovolné orientované úhly α, β platí

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta).$$

Rozmysli si, jak bude vypadat podobný vztah pro sinus.

Úmluva 32. V trojúhelníku ABC značíme a, b, c délky stran BC, AC a AB. Dále značíme α, β, γ velikosti úhlů $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ a $\sphericalangle ACB$. Obsah trojúhelníka XYZ značíme $[XYZ]$.

Věta 33. *Pro obsah trojúhelníka ABC platí $[ABC] = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.*

Důkaz. Je známý fakt, že je obsah trojúhelníka roven polovině součinu délky strany a výšky na ní kolmé. Označme tak v výšku z bodu B a D patu v na AC. Pak $BD = c\sin\alpha$ a tudíž $[ABC] = \frac{1}{2}b \cdot BD = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. □

Úloha 34. Urči poměr, ve kterém dělí výška protější stranu jen pomocí stran a délek v trojúhelníku. Zkus najít jedno vyjádření pro ostroúhlé i pro tupoúhlé trojúhelníky.

Počítání délek

Při práci s délkami trojúhelníka Tvoje první myšlenka určitě padne na podobnost a shodnost. Ty se učí na každém gymnáziu a často je využiješ v matematické olympiádě. Jak nám při práci s délkami pomohou goniometrické funkce?

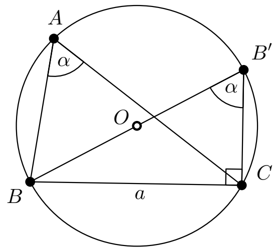
Sinová věta

V pravoúhlém trojúhelníku nám dávají siny a kosiny vztahy mezi délkami stran a úhly. Nyní si představíme trochu obecnější vztah, který nám poslouží v libovolném trojúhelníku, sinovou větu. Dokážeme ji jak jinak, než pomocí pravoúhlých trojúhelníků.

Věta 35. (Rozšířená sinová) *V trojúhelníku ABC s poloměrem r kružnice opsané platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Důkaz. Díky symetrii znění věty nám stačí ukázat rovnost $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$, zbytek plyne z cyklického argumentu. Tento tvar nám ale rovnou napovídá, jak jej dokázat. Nejprve si rozmysli, že v případě, že úhel α je pravý, je tvrzení triviální, proto tento případ dále nebudeme uvažovat.

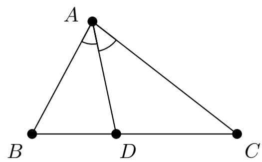


Dokresleme bod B' na kružnici opsané naproti B. Potom nám vzniká pravoúhlý trojúhelník $BB'C$ s přeponou BB' délky $2r$ a odvěsnou BC délky a. Obvodový úhel $\sphericalangle BB'C$ je roven buď α, nebo $180° - \alpha$, podle toho, na kterém oblouku kružnice leží. Siny těchto dvou úhlů jsou ovšem stejné, získáváme tak $\sin\alpha = \frac{2r}{a}$, což jsme přesně chtěli. □

Ukažme typický příklad využití sinové věty v olympiádní úloze. V konfiguraci dostaneme dva trojúhelníky, jejichž úhly budou buď shodné, nebo vzájemné doplňky. Pomocí sinové věty pak dokážeme vztah mezi délkami v trojúhelníku – *větu o ose úhlu.*

Příklad 36. V trojúhelníku ABC označme D průsečík osy úhlu z vrcholu A se stranou BC. Dokaž, že

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$



Řešení. Proč je tento příklad vhodný na použití sinové věty? Hledané délky můžeme vyjádřit jako poměry stran v trojúhelnících ABD a ACD. Protože platí rovnosti úhlů $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$ a $\sphericalangle BDA + \sphericalangle ADC = 180°$, tak dvojím použitím sinové věty máme

$$\frac{|DB|}{|AB|} = \frac{\sin \sphericalangle BAD}{\sin \sphericalangle BDA} = \frac{\sin \sphericalangle DAC}{\sin \sphericalangle ADC} = \frac{|DC|}{|AC|},$$

což jsme chtěli.

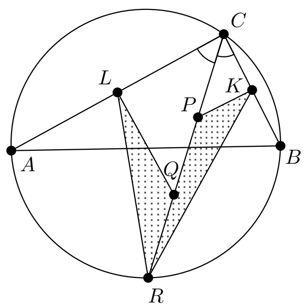
Úloha 37. Buď $A_1A_2A_3A_4A_5$ konvexní pětiúhelník. Dejme tomu, že se polopřímky A_2A_3 a A_5A_4 protínají v bodě X_1. Podobně definujme body $X_2, \ldots, X_5$. Ukaž, že

$$\prod_{i=1}^{5} |X_iA_{i+2}| = \prod_{i=1}^{5} |X_iA_{i+3}|.$$

Vytáhněte pravítka, teď jde do tuhého! Ukážeme si, jak využít naše počítání i na úlohách nejvyššího kalibru. Vyřešíme si úlohu z mezinárodní matematické olympiády[3] V této konfiguraci je možné najít vícero syntetických pozorování (zkus si!), my je pro názornost všechny naprosto mineme.

Příklad 38. Osa úhlu $\sphericalangle BCA$ trojúhelníka ABC protíná jeho opsanou kružnici v bodě R různém od bodu C, osu strany BC v bodě P a osu strany AC v bodě Q. Střed strany BC označme K a střed strany AC označme L. Dokaž, že obsahy trojúhelníků RPK a RQL se rovnají.

(IMO 2007/4)



Řešení. V úloze chceme spočítat obsahy dvou trojúhelníků. V nich figurují strany KP a LQ, které nebude problém spočítat. Snadno též vyúhlíme, že úhly $\sphericalangle KPR$ a $\sphericalangle RQL$ jsou oba dva rovné $90° + \sphericalangle ACR$. V obou trojúhelnících známe jednu stranu a přilehlý úhel, proto nás napadne použít větu 33. Chceme dokázat

$$[RPK] = \frac{1}{2}|PK| \cdot |PR| \cdot \sin \sphericalangle RPK \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}|QL| \cdot |QR| \cdot \sin \sphericalangle RQL = [RQL],$$

[3] Autor úlohy je Marek Pechal.

přičemž siny úhlů se rovnají. Úlohu tedy máme, pokud dokážeme

$$\frac{|QR|}{|PR|} \stackrel{?}{=} \frac{|PK|}{|QL|} = \frac{a/2 \cdot \tan \frac{\gamma}{2}}{b/2 \cdot \tan \frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{b}.$$

Jak uchopit délku úsečky QR? Vyjádříme ji jako $|CR| - |CQ|$, protože obě úsečky mají koncový bod v C, proto s nimi bude jednodušší počítat. Nyní je tedy náš úkol určit tyto dvě délky. Vyjádříme je pomocí poloměru r kružnice opsané a sinů úhlů trojúhelníka.

Délku CQ určíme snadno, z pravoúhlého trojúhelníka CQL je rovná $\frac{b}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{r\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. Délka CR taky nebude dělat obtíže – podle sinové věty v trojúhelníku BCR je rovna

$$2r \sin \sphericalangle CBR = 2r \cos \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Proto je

$$|CR| - |CQ| = 2r \cos \frac{\beta-\alpha}{2} - \frac{r \sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}} = r \frac{2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Díky cvičení 31 platí

$$2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\beta-\alpha-\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\alpha+\gamma}{2} = \cos(\beta - 90^\circ) + \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha + \sin\beta,$$

tedy $|QR| = |CR| - |CQ| = r\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. Podobně $|PR| = r\frac{\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}$, tedy konečně jednou naposled ze sinové věty opravdu platí

$$\frac{|QR|}{|PR|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} = \frac{|PK|}{|QL|}.$$

Tím jsme hotovi.

V následujících úlohách může pomoci nějaké to počítání – v těch těžších úlohách to ale nebude zadarmo, pořád potřebuješ získat půdu syntetickými pozorováními.

Úloha 39. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme M střed strany BC, K průsečík tečen v bodech B, C ke kružnici opsané a D průsečík přímky AK se stranou BC. Ukaž, že $\sphericalangle KAB = \sphericalangle CAM$ a $\frac{|BD|}{|CD|} = \left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^2$.

Definice 40. Těžnici překlopenou podle osy úhlu nazýváme *symediánou.*

Úloha 41. V ostroúhlém trojúhelníku ABC splňujícím $|AC| \neq |BC|$ s ortocentrem H označme body A', B' na přímce AB takové, že $|CA'| = |CA|$ a $|CB'| = |CB|$. Dokaž, že kružnice opsané trojúhelníkům ACB' a VCA' jsou shodné. (Krajské kolo MO B 2020)

Úloha 42. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek. Dejme tomu, že platí $|AH| = |BC|$. Dokaž, že $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. (Celostátní kolo MO 2011)

Úloha 43. V konvexním čtyřúhelníku platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Označme P průsečík jeho úhlopříček a O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABP a CDP. Dokaž, že čtyřúhelník O_1BCO_2 je rovnoběžník. (Celostátní kolo MO 2022)

Úloha 44. Pro daný trojúhelník ABC označme H ortocentrum a D bod takový, že čtyřúhelník $HABD$ je rovnoběžník. Sestrojme bod E ležící na přímce DH tak, že přímka AC půlí úsečku HE. Bod F je druhým průsečíkem přímky AC s kružnicí opsanou trojúhelníku DCE. Ukaž, že $|EF| = |AH|$. (IMO shortlist 2015/G1)

Úloha 45. V daném ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D, E, F po řadě paty výšek z bodů A, B a C. Označme ω_B, ω_C kružnice vepsané trojúhelníkům BDF a CDE a nechť se dotýkají úseček DF a DE v bodech M a N. Konečně, přímka MN protne ω_B a ω_C v bodech $P \neq M$ a $Q \neq N$. Dokaž, že $|MP| = |NQ|$. (Výběrko 2020, IMO shortlist 2019/G2)

Úloha 46. Dokaž, že pro libovolný trojúhelník ABC platí, že obsah trojúhelníka s vrcholy v bodech dotyku kružnice vepsané je roven obsahu trojúhelníka s vrcholy v bodech dotyku kružnic připsaných.

Pomyslná sestra sinové věty je věta kosinová, která nám dále doplňuje přehled o vztahu úhlů a stran v trojúhelníku. I když ji v řešení olympiádních úloh nepotkáš zdaleka tak často jako sinovou větu, pořád je to mocný nástroj na práci s délkami v trojúhelníku i dál.

Věta 47. (Kosinová) *V trojúhelníku ABC platí*

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Důkaz. Chceme porovnávat kosinus úhlu v trojúhelníku s délkami stran. Pravoúhlé trojúhelníky nám kosiny přirozeně zapojí do hry, spusťme proto výšku z A na BC a její patu označme D. Potom orientované vzdálenosti bodů B a C od přímky AD jsou

$$BD = c\cos\beta \qquad \text{a} \qquad CD = b\cos\gamma.$$

Platí tak

$$a = c\cos\beta + b\cos\gamma.$$

Rozmysli si, že právě získaný vztah platí díky orientovaným vzdálenostem i v případě tupoúhlého trojúhelníka. V kosinové větě se vyskytují druhé mocniny délek neznámých a výraz $bc\cos\alpha$, proto je přirozené tuto rovnost vynásobit délkou a:

$$a^2 = ac\cos\beta + ab\cos\gamma.$$

Analogicky získáme vztahy

$$b^2 = bc\cos\alpha + ab\cos\gamma,$$
$$c^2 = bc\cos\alpha + ac\cos\beta.$$

Všimni si, že v součtu posledních dvou rovnic získáme na pravé straně přesně $2bc\cos\alpha$ a potom výraz, který se vyskytuje v první získané rovnici. Pišme tedy

$$b^2 + c^2 = 2bc\cos\alpha + ac\cos\beta + ab\cos\gamma = 2bc\cos\alpha + a^2.$$

Získali jsme tedy vztah svazující délky stran a, b, c a $\cos\alpha$. Vztah ze znění věty obdržíš jednoduchou úpravou. □

Cvičení 48. Dokaž kosinovou větu pomocí kartézských souřadnic.

Cvičení 49. (Znovu rovnoběžníkové pravidlo) Dokaž, že součet čtverců délek stran daného rovnoběžníku je roven součtu čtverců délek jeho úhlopříček.

Úloha 50. Je daný konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$, $|AB| = |CD| = 180$ a $|AD| \neq |BC|$. Víme, že obvod $ABCD$ je 640. Urči $\cos\sphericalangle DAB$. (AIME I 2003/12)

Cvičení 51. Vyjádři poloměr kružnice opsané v trojúhelníku jen pomocí délek jeho stran.

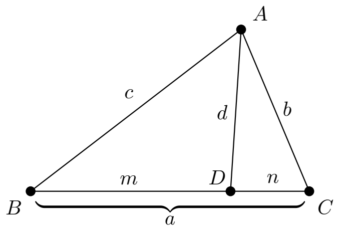
Návod. Kombinuj sinovou větu, kosinovou větu a goniometrickou jedničku.

Úloha 52. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou BC označme I střed kružnice vepsané a D, E paty os úhlů na strany AC, AB. Dokaž, že délky úseček AB, AC, BI, ID, CI a IE nemůžou být všechny naráz celočíselné. (USAMO 2010)

Sinová věta aplikovaná dvakrát nám v případě příkladu 36 dala informace o délkách v konfiguraci s osou úhlu. Analogické dvojnásobné použití věty kosinové bude mít větší sáh, jelikož se zaobírá pouze jedním úhlem. Můžeme tak spočítat nejen poměry, ve kterých osa úhlu dělí stranu, ale i samotnou její délku!

Věta 53. (Stewartova) *Uvažme bod D na straně BC trojúhelníka ABC. Označme d délku úsečky AD, m délku úsečky BD a n délku úsečky CD. Pro tyto délky platí vztah*[4]

$$mna + d^2a = mb^2 + nc^2.$$



Důkaz. Všimněme si, že $a = m + n$, a dokazovaný vztah se tak váže na délky stran ve dvou trojúhelnících, ABD a ACD. Porovnáme tentokrát vztahy dané kosinovou větou:

$$\frac{d^2 + m^2 - c^2}{2dm} = \cos\sphericalangle ADB = -\cos\sphericalangle ADC = -\frac{d^2 + n^2 - b^2}{2dn} = \frac{b^2 - d^2 - n^2}{2dn}.$$

Po roznásobení a úpravě nám vyjde

$$d^2a + amn = d^2(m + n) + mn(m + n) = b^2m + c^2n,$$

čímž jsme hotovi. □

Rozmysli si, jak bude situace vypadat, pokud bod D leží mimo úsečku AB.

Úloha 54. Urči délku těžnice a osy úhlu jenom pomocí délek stran trojúhelníka.

Úloha 55. V trojúhelníku ABC platí $|BC| = 1$ a zároveň na straně BC existuje právě jeden bod D takový, že $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Urči všechny možné hodnoty obvodu trojúhelníka ABC.

(Celostátní kolo MO 2016)

Pomocí Stewartovy věty můžeš spočítat skoro libovolnou délku v trojúhelníku, kterou si zamaneš. V olympiádních úlohách se tato věta nevyskytuje často, my, autoři seriálu, doporučujeme si nelámat hlavu s pamatováním jejího znění.V případě největší nouze si ji můžeš vždy odvodit z kosinové věty.

Cvičení 56. Dokaž linearitu mocnosti (větu 22) ještě jednou pomocí Stewartovy věty.

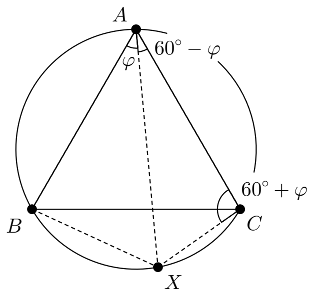
Teď se podíváme na metodu, která nám umožní bez konkrétních výpočtů dokázat některá tvrzení se vzdálenostmi „na kružnici“. Jak budeme k délkám na kružnici přistupovat? Přirozeně pomocí goniometrie.

[4]Pomůcka pro zapamatování ve tvaru $man + dad = bmb + cnc$: „A man and his dad put a bomb in the sink.“

Rovnání vln

Začneme příkladem.

Příklad 57. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Na kratším oblouku BC kružnice opsané leží bod X. Dokaž, že $|XB| + |XC| = |XA|$.



Řešení. Spočítáme všechny příslušné délky pomocí goniometrických hodnot úhlů. Nazvěme si poloměr kružnice r a $\varphi = \sphericalangle BAX$ (víme, že $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$). Pomocí sinové věty snadno spočítáme délky

$$|XB| = 2r \cdot \sin(\varphi), \qquad |XC| = 2r \cdot \sin(60^\circ - \varphi) \qquad \text{a} \qquad |XA| = 2r \cdot \sin(60^\circ + \varphi).$$

Chceme tedy dokázat rovnost $\sin(\varphi) + \sin(60^\circ - \varphi) = \sin(60^\circ + \varphi)$. To je díky součtovým vzorcům hračka:

$$\sin(60^\circ + \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \frac{1}{2} = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi = \sin(\varphi) + \sin(60^\circ - \varphi).$$

Po vynásobení $2r$ získáme požadovanou rovnost.

Pokud se obáváš, že za rohem číhá obdobný příklad s víceúhelníkem, obáváš se právem. Zobecněním naštěstí zvládneme zařídit, že nebudeme muset rozepisovat čím dál víc součtových vzorců. Vydrž teď s námi chvíli teorie a později si ušetříš počítání.[5]

Takže co jsme to udělali? Na kružnici uvažujeme jeden pevný a jeden „pohyblivý“ bod a sledujeme, jak se vzdálenost těchto dvou bodů mění. Abychom dobře definovali pohyblivý bod, zavedeme si takové univerzální číslo, proměnný úhel φ.

Definice 58. Pevnou přímku ℓ otočíme o proměnný úhel φ okolo bodu A, který na ní leží. Výsledná přímka se nazývá *pohyblivá přímka*.[6] Pevná přímka ℓ se nazývá základní přímka a bod A střed otáčení.

Když měníme úhel φ, pohyblivá přímka se jednoduše otáčí kolem jednoho bodu, středu otáčení. V příkladě 57 byla základní přímka AB, pohyblivá přímka AX a střed otáčení byl A.

[5] Zvlášť pokud už si se siny a kosiny rozumíš víc, nebude to nic těžkého.

[6] V geometrii už existuje vícero metod „hýbání“ s přímkami a body, jednu zmiňuje třeba seriál o projektivní geometrii z roku 2019/20. Takže pozor, aby se Ti nespletly.

Definice 59. Pokud prochází kružnice k středem otáčení pohyblivé přímky a, nazývá se druhý průsečík přímky a s kružnicí k *pohyblivý bod na kružnici* k.

Poznámka 60. Pokud je a tečna, dává smysl její druhý průsečík považovat za totožný s prvním, tedy se středem otáčení. Naopak když uvažujeme přímku procházející dvěma body na jedné kružnici a tyto body splynou (obyčejně je jeden pohyblivý a jeden pevný), je přirozené za jejich spojnici považovat tečnu v tomto bodě.

Pozorování 61. *Je-li na kružnici pohyblivý bod, je jeho polohou při $\varphi = 0$ (nebo jiném daném úhlu) jednoznačně určena jeho poloha při jakémkoliv úhlu. Na volbě středu otáčení nezáleží.*

Důkaz. Plyne z věty o obvodovém úhlu. Buď X pohyblivý bod na kružnici k a X_0 jeho poloha při $\varphi = 0$. Buď A, B na kružnici k dva různé středy otáčení. Přímky AX_0, AX svírají úhel φ a A, B, X, X_0 leží na jedné kružnici, takže i BX_0 a BX svírají úhel φ. To ovšem znamená, že oba středy definují X stejně a na středu opravdu nezáleží. Pro jiný úhel než 0 je důkaz analogický. □

To je také část důvodu, proč pohyblivý bod definujeme jen na kružnici, která prochází středem otáčení. Neuvažovat konkrétní přímku nám usnadní řešení úloh. V příkladě 57 jsme si spojnici AX dokreslili, ale to později nebude potřeba.

Definice 62. Hodnota závislá na φ se nazývá *vlna*, pokud se dá vyjádřit ve tvaru

$$a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \cos(\varphi),$$

kde jsou a a b konstanty.[7]

Všimni si, že v příkladě 57 byly obě strany rovnosti vlny. Na tomto pozorování stavíme následující sekci.

Tvrzení 63. *Je dána pohyblivá přímka a a pevný bod B. Orientovaná vzdálenost Ba je vlna.*

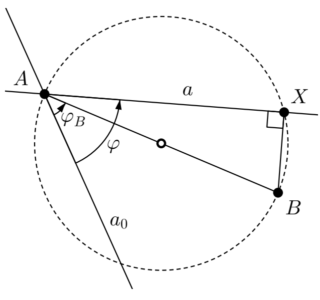
Důkaz. Buď A střed otáčení a a_0 základní přímka. Uvažme (pevný) úhel $\varphi_B = \sphericalangle(a_0, BA)$. Tedy při $\varphi = \varphi_B$ prochází a bodem B. Máme

$$\sphericalangle(a, BA) = \sphericalangle(a, a_0) + \sphericalangle(a_0, BA) = -\varphi + \varphi_B = \varphi_B - \varphi.$$

Vzdálenost Ba je (při vhodné orientaci BA) rovna $BA \cdot \sin(\sphericalangle(a, BA))$. To rozepíšeme pomocí součtového vzorce:

$$Ba = |BA| \cdot \sin(\sphericalangle(a, BA)) = |BA| \cdot \sin(\varphi_B - \varphi) = |BA| \cdot \sin(\varphi_B) \cdot \cos(\varphi) - |BA| \cdot \cos(\varphi_B) \cdot \sin(\varphi).$$

Hodnoty $|BA| \cdot \sin(\varphi_B)$ a $-|BA| \cdot \cos(\varphi_B)$ nezávisí na φ, takže získáváme požadovaný tvar vlny $a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \cos(\varphi)$ s konstantami a, b. □



[7] Název vlna vychází z tvaru grafu dané funkce proměnné φ. Formálněji této křivce říkáme sinusoida, ačkoli to je obecnější pojem. Když si vlnu třeba v GeoGebře vykreslíš pro různé hodnoty a, b, zjistíš, že je to opravdu jednoduchá sinová vlna, bez žádných zvláštních odchylek. Vysvětlení přijde za chvíli.

Doposud se mohlo zdát, že jsou orientované přímky při úhlech φ a $\varphi + 180°$ totožné, ale když uvažujeme orientaci vzdálenosti k nim, tak vidíme, že nejsou. Když přímku otočíme o $180°$, jednou během toho projde bodem B, tehdy se B dostane na druhou stranu a orientace se změní (sinus změní znaménko). Úhel φ je tedy orientovaný modulo $360°$. Zjednoznačněme si nyní orientaci od základní přímky.

Definice 64. Na kružnici leží pevný bod B a pohyblivý bod X. Označme A bod přímo naproti B. Pak *orientovanou vzdáleností bodu B od bodu X* rozumíme orientovanou vzdálenost bodu B od pohyblivé přímky (AX).

Z Thaletovy věty je úsečka BX kolmá na pohyblivou přímku AX, a jelikož vzdálenost měříme kolmo, tak si tyto dvě vzdálenosti v absolutní hodnotě skutečně odpovídají. Ale znaménko je novinka, orientovanou vzdálenost mezi dvěma body na kružnici jsme ještě nezkoumali, podívejme se na ni proto blíž.

Úhly φ a $\varphi + 180°$ pro orientovanou přímku určují stejnou přímku, ale opačnou orientaci vzdálenosti. Pohyblivý bod při úhlech φ a $\varphi + 180°$ leží na stejném místě, ovšem jeho vzdálenost od pevného bodu má opačné znaménko. Proto když určujeme bod X, musíme mimo jiné určit polohu i znaménko vzdálenosti. Pro ilustraci si představme, jak bod X objíždí po kružnici, když se mění hodnota φ. Nejprve vyjede z bodu B a vzdálenost XB je kladná, bod X objíždí kružnici. Při hodnotě $\varphi = 90°$ splývá s bodem A. Potom dojede zase do bodu B. Z pohledu středu už objel $360°$, ale úhel φ bereme z obvodu, takže má velikost jen $180°$. Bod objíždí kružnici dál, ale jakmile projede bodem B, orientace se změní a vzdálenost je teď záporná, až dokud X zase nedojede do B. Tehdy prošlo φ celou periodou $360°$ a začíná se od začátku. Díky vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem navíc platí, že pokud se φ mění „stálou rychlostí“, pohybuje se bod X stálou rychlostí.

Pamatuj, že jedna perioda vlny jsou pro X *dvě* objetí kružnice a že může být vlna na stejném místě ve dvou formálně různých pozicích (pozicích s opačným znaménkem). Jak jsme předestírali, vzdálenosti na kružnici se přirozeně chovají jako vlny.

Tvrzení 65. *Na kružnici leží pevný bod B a pohyblivý bod X. Orientovaná vzdálenost XB je vlna.*

Důkaz. Předchozí definice nám říká, že tato vzdálenost je ve skutečnosti orientovaná vzdálenost pevného bodu od pohyblivé přímky, o níž víme, že se jedná o vlnu. □

Tady už jsme použili trik, že na středu nezáleží a umožní nám to střed bezpečně zanedbat. Zatím si ale možná říkáš, že máme vlny, ale co s nimi?

Pokud se vrátíme k úvodnímu příkladu, právě jsme dokázali, že jsou obě strany rovnosti vlny (snad až na nějaká znaménka, protože v zadání jsou absolutní vzdálenosti). Snad věříš, že nás to přibližuje k důkazu, že jsou si rovny. Nejdřív si ale připravíme další pomůcky pro jiné úlohy.

Pozorování 66. *Součet dvou vln je vlna a konstantní násobek vlny je vlna.*

Důsledek 67. *Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou vlny a $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou reálná čísla. Potom součet $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$ je vlna.*

To speciálně znamená, že rozdíl vln je vlna. Následující tvrzení pak jednoduše charakterizuje vlny jako konstantní násobky sinusoidy. Toto tvrzení opodstatňuje název *vlna*. Díky němu bude zkoumání vlastností vln velmi přirozené.

Tvrzení 68. *Každá vlna se dá vyjádřit ve tvaru*

$$C \cdot \sin(\varphi - \varphi_0)$$

s nějakými konstantami C, φ_0.

Důkaz. Upravme si obecný výraz vlny do tvaru, ve kterém budeme moci používat sílu teorie goniometrických funkcí. Pišme

$$a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\varphi) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\varphi)\right).$$

Jelikož je

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

tak umíme najít úhel φ_0 takový, že $\cos(\varphi_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $\sin(\varphi_0) = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Jelikož jsou a a b konstanty, tak je i φ_0 konstanta. Označme též $C = \sqrt{a^2+b^2}$ vytýkanou konstantu. Vlnu konečně můžeme upravit do tvaru

$$a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\cos(\varphi_0)\sin(\varphi) - \sin(\varphi_0)\cos(\varphi)\Big) = C \cdot \sin(\varphi - \varphi_0),$$

což jsme chtěli. □

Každá vlna se dá vyjádřit jako konstantní násobek jednoho sinu – můžeme tak využít znalosti průběhu této funkce. Například víme, že sinus nabývá nuly jen dvakrát v periodě, a to v přesně opačných bodech periody (o úhel 180° vedle). Získáme tak následující tvrzení:

Tvrzení 69. *Pokud vlna nabývá nulové hodnoty při dvou úhlech, které se neliší o násobek* 180°, *pak je identicky nulová*[8].

Jelikož jsou pro nás úhly lišící se o 180° prakticky shodné, všechno, co potřebujeme k důkazu nulovosti vlny, je najít libovolné dva různé body X (nebo dvě přímky), pro které je vlna rovna nule. S těmito nově nabytými znalosti vyřešme těžší verzi příkladu z úvodu této sekce.

Příklad 70. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Na kratším oblouku BC kružnice opsané leží bod X. Dokaž, že $|XB| + |XC| + |XE| = |XA| + |XD|$.

Řešení. Vzdálenosti orientujeme tak, aby byly vzdálenosti ze zadání na kratším oblouku BC kladné.

Vezmeme výraz $XB + XC + XE - XA - XD$. Výraz $XB + XC + XE - XA - XD$ je součtem a rozdílem vln, takže taky vlna. Ukážeme teď, že je identicky nulová.

Podíváme se na její hodnotu ve dvou význačných pozicích bodu X, konkrétně $X = B$ a $X = C$. Když nastane $X = B$, tak ze symetrie platí $XA = XC$ a $XE = XD$ a taky $XB = 0$. Hodnota $XB + XC + XE - XA - XD$ je tedy 0. Analogický případ nastane pro $X = C$. Naše vlna má dva různé nulové body, proto je nulová všude, platí tedy $XB + XC + XE = XA + XD$ pro každý bod X na daném oblouku. Tím je úloha vyřešená.

Nesmíme zapomínat, že jsme rovnost ze zadání dokázali jen pro daný oblouk. Mimo něj orientované vzdálenosti mění znaménko. Z toho důvodu si musíme dávat pozor i na volbu poloh X. Když například zvolíme $X = A$, tak už bude X za bodem B, takže musíme vzdálenost XB počítat zápornou. Představuj si, že hýbeš bodem X po kružnici, a kdykoli projde jiným bodem, změní se znaménko vzdálenosti k tomu bodu.

Úloha 71. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Na kratším oblouku BC kružnice opsané leží bod X. Dokaž, že $|XA| + |XB| + |XC| + |XD| = |XE| + |XF|$.

Úloha 72. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC. Bod X leží na tom oblouku BC kružnice opsané, na kterém neleží A. Dokaž, že

$$\frac{|XA|}{|XB| + |XC|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

[8] To znamená, že je nulová všude.

Úloha 73. (Ptolemaiova věta) Pokud je $ABCD$ tětivový čtyřúhelník s běžně označenými stranami a úhlopříčkami e, f, platí $ac + bd = ef$.

Můžeš si zkusit vyřešit předchozí (i následující) úlohy Ptolemaiovou větou. Ne vždy můžeme vlnu jenom tak srovnat do nuly. Sledujme proto blíže, jak se vlny chovají.

Lemma 74. *Nenulová vlna nabývá nejvyšší i nejnižší hodnoty o úhel* $90°$ *vedle nuly. Jelikož měříme úhly obvodové, znamená to přímo naproti.*

Nediv se, že vlna nabývá nejvyšší a nejnižší hodnoty na jednom místě. Jednou tam má vlna vysokou hodnotu, ale když bodem X objedeme kolečko, tak má opačné znaménko.

Lemma 75. *Když mají dvě vlny nulu ve stejném bodě, pak mají jejich hodnoty všude konstantní poměr (kde má poměr smysl).*

Intuitivně tvrzení platí – obě vlny mají tvar $C_i \cdot \sin(\varphi - \varphi_0)$ pro stejný posun φ_0 a odlišné C.

Důkaz. Uvažme dvě vlny $C \cdot \sin(\varphi - \varphi_0)$ a $D \cdot \sin(\varphi - \varphi_1)$. Pokud je $CD = 0$, tvrzení je zřejmé. V opačném případě mají oba siny nulu ve stejném φ, pak platí $\varphi - \varphi_0 = k_1\pi$ a $\varphi - \varphi_1 = k_2\pi$ pro celá čísla k_1, k_2. Argumenty sinů se tak liší o násobek π, tudíž se příslušné siny v absolutní hodnotě vždy rovnají a podíl vln je konstantní. □

Úloha 76. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ splňující $AD \parallel BC$. Na tom oblouku BC kružnice jemu opsané, na kterém neleží A a D, leží bod X. Dokaž, že podíl

$$\frac{|XB| + |XC|}{|XA| + |XD|}$$

nezávisí na volbě bodu X.

Cvičení 77. Je dáno kladné číslo p, kružnice k a na ní body A, B. Na k je zvolen bod X tak, že je hodnota $p \cdot |XA| + |XB|$ největší možná. Bod Y leží na kružnici k naproti bodu X. Dokaž, že $p \cdot |YA| = |YB|$.

Úloha 78. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku BC kružnice opsané leží bod X. Dokaž, že

$$\frac{|XA| + |XC|}{|XB| + |XD|} = \frac{|XD|}{|XA|}.$$

Úloha 79. Body A_1, A_2, …, A_{3000} leží na kružnici ω s poloměrem 1. Dokaž, že na ω leží bod M takový, že $\sum_{i=1}^{3000} |MA_i| \leq 4000$.

Na více kružnicích

Uvažme dvě různé kružnice a na nich dva nezávislé pohyblivé body. Těmto bodům přísluší dvě různé vlny a i tyto dvě vlny můžeme sečíst. Obyčejně se ale bude hodit mít takové body nějak svázané, například na jedné pohyblivé přímce.

Úloha 80. Kružnice k, ℓ, m se protínají v bodech S, T. Přímka skrz S protne k znovu v bodě K, ℓ v bodě L a m v bodě M. Dokaž, že podíl

$$\frac{|KL|}{|LM|}$$

nezávisí na volbě přímky.

Úloha 81. Trojúhelník ABC má kružnici opsanou ω. Kružnice ω_1 se v bodě A dotýká přímky AB a prochází bodem C a kružnice ω_2 se v bodě A dotýká přímky AC a prochází bodem B. V bodě A sestrojíme tečnu k ω, která protne kružnici ω_1 podruhé v bodě X a protne kružnici ω_2 podruhé v bodě Y. Urči podíl $\frac{|AX|}{|XY|}$. (Finále SPbU 2018)

Úloha 82. Kružnice a, b, c se protínají v bodě S, přičemž se žádné dvě nedotýkají. Tečna k a v S protne b znovu v A_b a c znovu v A_c. Analogicky definujeme body B_c a B_a, C_a a C_b. Dokaž, že

$$\frac{|A_bS|}{|A_cS|} \cdot \frac{|B_cS|}{|B_aS|} \cdot \frac{|C_aS|}{|C_bS|} = 1.$$

Úloha 83. Uvnitř trojúhelníka ABC leží bod S. Přímka AS protíná kružnici opsanou trojúhelníku BCS znovu v bodě A_1. Analogicky definujeme body B_1 a C_1. Dokaž, že

$$\frac{|A_1S|}{|A_1A|} + \frac{|B_1S|}{|B_1B|} + \frac{|C_1S|}{|C_1C|} = 2.$$

Jiná vlnítka

Zatím jsme za vlny brali jen délky tětiv. Víme ale, že i vzdálenost bodu od pohyblivé přímky je vlna. Pojďme tuto vlnu studovat.

Úloha 84. Vrcholem A čtverce $ABCD$ prochází přímka p, která odděluje B od C a D. Dokaž, že $|Bp| + |Cp| = |Dp|$.

Úloha 85. Buď d přímka procházející vrcholem A ostroúhlého trojúhelníka ABC, jiná než AB a AC. Nechť jsou B_1 a C_1 po řadě kolmé průměty bodů B a C na přímku d. Najdi polohu přímky d, ve které je součet $|BB_1| + |CC_1|$ největší. (OKTV 2018)

Podobné úlohy se naučíme efektivněji řešit ve třetím díle, proto se jim nebudeme tolik věnovat teď. Nyní se podíváme, na jaké vlny narazíme, když na kružnici nestudujeme tětivy, ale tečny. Nebudeme pohybovat pouze body, ale i celými kružnicemi. Využijeme k tomu všechnu teorii, kterou jsme zatím vybudovali.

Tvrzení 86. *Kružnice k a ℓ se dotýkají tak, že k není uvnitř ℓ, a na kružnici k leží pohyblivý bod X. Potom délka tečny z X k ℓ se znaménkem je vlna a znaménko se mění, když projde X bodem doteku.*

Důkaz. Označme A bod doteku kružnic k a ℓ a a kružnici se středem v A s nulovým poloměrem. Společná vnitřní tečna k a ℓ prochází bodem a a je tedy i chordálou kružnic a, k. Z linearity mocnosti platí $\rho(X,\ell) - \rho(X,k) = p \cdot Xt$ a $\rho(X,A) - \rho(X,k) = q \cdot Xt$. Ovšem $\rho(X,k) = 0$, takže

$$\rho(X,\ell) = \frac{p}{q} \cdot \rho(X,A).$$

Odmocnina z mocnosti je délka tečny a délka tečny z X k A je jen vzdálenost XA. Délka tečny z X k ℓ je tedy $\sqrt{\frac{p}{q}} \cdot XA$, což je (s orientací) vlna. □

Příklad 87. Buď ABC rovnostranný trojúhelník a S jeho střed. Buďte a, b, c kružnice nad průměry AS, BS, CS. Na kratším oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC leží bod X a označme t_a, t_b, t_c délky tečen z X ke kružnicím a, b, c. Dokaž, že $t_a = t_b + t_c$.

Řešení. Uvažme X jako pohyblivý bod, poté je výraz $t_b + t_c - t_a$ s orientovanými délkami tečen vlna, přičemž znaménka zvolíme tak, aby byly t_a, t_b, t_c kladné na kratším oblouku BC. Ve zvláštním bodě $X = B$ platí $t_b = 0$ a ze symetrie $t_a = t_c$, tedy že je vlna nulová. Obdobně je nulová v $X = C$, takže je nulová všude a pro bod X na kratším oblouku BC z toho plyne $t_a = t_b + t_c$.

Úloha 88. Dvě kružnice mají vnější dotek. Jedna v sobě má vepsaný rovnostranný trojúhelník, který nemá vrchol v bodě doteku kružnic. Z každého vrcholu trojúhelníka vedeme tečnu k druhé kružnici. Dokaž, že je délka jedné výsledné tečny rovna součtu délek zbylých dvou tečen. (Estonské výběrko 1994)

Co se délky tečny z pohyblivého bodu X k pevné kružnici ℓ týče, zjevně nezáleží na tom, jestli bude kroužit bod X a ℓ zůstane na místě nebo jestli bude kroužit ℓ a X zůstane na místě. Stejně jako jsme definovali pohyblivý bod, definujeme pohyblivou kružnici. Předchozí tvrzení můžeme formulovat tak, že je délka tečny od pohyblivé kružnice k pevnému bodu na k vlna.

Definice 89. Na kružnici k leží pohyblivý bod T. *Pohyblivá kružnice na* k je kružnice s pevným poloměrem, která se dotýká (z pevné strany) k v bodě T.

Všimni si, že mnoho předchozích úloh šlo formulovat nejenom pomocí pohyblivých bodů, ale ekvivalentně pomocí pohyblivých kružnic.

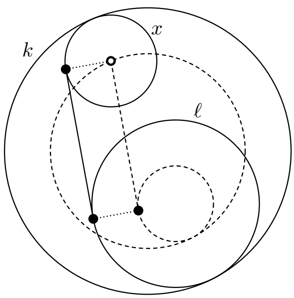
Úloha 90. (znovu) Kružnice k, ℓ se dotýkají zevně v bodě S. Přímka skrz S protne k znovu v bodě K a ℓ znovu v bodě L. Dokaž, že podíl délky tečny z K k ℓ a délky tečny z L ke k nezávisí na volbě přímky.

Úloha 91. Kružnice k, ℓ se dotýkají v bodě A, přičemž k neleží uvnitř ℓ. Na k leží bod B. Tečny z B ke kružnici ℓ se jí po řadě dotknou v bodech T_1, T_2 a protnou k znovu v bodech S_1, S_2. Nechť jsou R_1, R_2 takové body, že je T_1 střed R_1S_1 a T_2 střed R_2S_2. Dokaž, že se kružnice opsaná trojúhelníku BR_1R_2 dotýká kružnice ℓ.

Úloha 92. V trojúhelníku ABC je L průsečík symedián[9] a ω kružnice opsaná. Kružnice a prochází bodem L a dotýká se ω v bodě A, analogicky definujeme kružnice b, c. Buď X bod na oblouku BC kružnice ω, který neobsahuje A, a t_a, t_b, t_c délky tečen z X ke kružnicím a, b, c. Dokaž, že $t_a = t_b + t_c$.

Úloha 93. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice a se dotýká strany BC v jejím středu a také kružnice opsané, přičemž leží mimo trojúhelník. Analogicky definujeme kružnice b, c. Buď X bod na kružnici opsané takový, že nejbližší vrchol k němu je A, a t_a, t_b, t_c délky tečen z X ke kružnicím a, b, c. Dokaž, že $t_a = t_b + t_c$.

Tvrzení 94. *Je dána kružnice k, pohyblivá kružnice x na ní a pevná kružnice ℓ, která se vnějškem dotýká k. Délka společné tečny kružnic x a ℓ (vnější tečny, pokud jsou na stejné straně kružnice k, jinak vnitřní) je se znaménkem vlna. Znaménko se mění, když se projdou body doteku.*



Důkaz. Pro účely důkazu považujme poloměr kružnice, pokud se dotýká k zevně, za záporný. Zmenšíme poloměry všech kružnic o poloměr x, středy zachováme. Poté tvoří stará a nová tečna protilehlé strany obdélníka, tedy jsou stejně dlouhé. Doteky se zachovají a z x se stane pohyblivý bod na kružnici soustředné s k (díky stejnolehlosti). Takto redukujeme tvrzení na tvrzení 86. □

[9] Definovaných jako v úloze 39. Ve třetím díle si ukážeme, že se všechny tři symediány protnou v každém trojúhelníku, zatím to považuj za daný fakt.

Pomocí právě dokázaného tvrzení formulujeme ještě silnější fakt, než že délka společné tečny pevné a pohyblivé kružnice je tečna. Trochu si započítáš, když jsi ale došel(došla) tak daleko, určitě Tě to nezastaví.

Cvičení 95. Kružnice k se v bodě A dotýkají kružnice a_1, a_2 a v bodě B kružnice b. Nechť t_i značí délku společné tečny kružnic a_i a b (vnější tečny, pokud jsou a_i a b_j na stejné straně kružnice k, jinak vnitřní). Dokaž, že podíl $\frac{t_1}{t_2}$ nezávisí na volbě kružnice b (bodu doteku ani poloměru).

Cvičení 96. V úlohách 92 a 93 dokaž, že mají kružnice a, b, c po dvou všechny vnější společné tečny stejně dlouhé.

Uveďme zobecnění Ptolemaiovy věty, Caseyho větu. Ověř si, že Ptolemailova věta je speciální případ, když položíme poloměry kružnic nulové. Důkaz je analogický důkazu Ptolemaiovy věty, pouze s pohyblivou kružnicí.

Úloha 97. (Caseyho věta) Kružnice k se dotýkají popořadě kružnice k_1, k_2, k_3, k_4. Nechť značí t_{ij} délku společné tečny kružnic k_i a k_j (vnější tečny, pokud jsou k_i a k_j na stejné straně kružnice k, jinak vnitřní). Dokaž, že $t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{41} = t_{13} \cdot t_{24}$.

Občas se hodí uvažovat jen některé kružnice s nulovým poloměrem. Caseyho věta je tak vhodná například na úlohu 93, zkus ji aplikovat. Sbírku vlastností vln teď završíme tou nejbizarnější.

Tvrzení 98. *Na kružnici k leží pohyblivý bod X a k má tečnu t. Odmocnina vzdálenosti bodu X od t je se znaménkem vlna. Znaménko se mění, když projde X bodem doteku.*

Důkaz. Položme si situaci do kartézské soustavy, kde k je jednotková kružnice, t je přímka $y = -1$ a $X = (\sin(2\varphi), \cos(2\varphi))$ je pohyblivý bod. Všimni si, že je tam opravdu 2φ, protože to je středový úhel a φ bereme z obvodu. Poté vzdálenost X od t je $1+\cos(2\varphi)$, chceme tedy ukázat, že odmocnina z tohoto výrazu (se znaménkem) je vlna. K tomu využijeme cvičení 31, podle kterého platí

$$1 + \cos(2\varphi) = \cos(\varphi - \varphi) + \cos(\varphi + \varphi) = 2\cos(\varphi)^2 . \qquad \square$$

Úloha 99. Je dán rovnostranný trojúhelník se stranami a, b, c. Kružnice vepsaná se dotýká b v bodě E a c v bodě F. Na jejím kratším oblouku EF leží bod X. Dokaž, že

$$\sqrt{|Xb|} + \sqrt{|Xc|} = \sqrt{|Xa|}.$$

Pokud Ti náš výběr úloh na vlny nestačil, můžeš si jednoduše vymyslet své. Můžeš si pro úlohy z úvodu sekce rovnání vln najít analogie s kružnicí vepsanou nebo studovat pohyblivé tečny. To už ponecháme Tvé představivosti.

Závěrem

Scházíme se u konce prvního dílu letošního seriálu. Již obratně umíme pracovat s kartézskými souřadnicemi, spočítat libovolné délky v trojúhelníku a na dovolené u moře jsme zjistili, že mnohé délky na kružnice jsou jenom vlny. Děkujeme Ti, že jsi se dočetl(a) až sem.

Pokud Ti cokoliv nebylo jasné, určitě se nás zeptej na mailu nebo v chatu. Rádi Ti pomůžeme. A neboj, nepotřebuješ mít propočítané každé cvičení a každou úlohu na to, abys vyřešil(a) nějakou tu soutěžní úlohu. Proto směle do řešení tří soutěžních úloh :)

V příštích dílech se podíváme na metody, které jsou na moderní olympiádní úlohy jako ušité – druhý díl seriálu nás zavede do Gaussovy roviny k výběhu komplexních čísel. Těšíme se na opětovné setkání tam. Do té doby Ti přejeme, ať se daří!

Návody k úlohám a cvičením

12. Doplň na čtverec (čtverce).

17. Body v rovině tvoří rovnoběžník, právě pokud mají úhlopříčky stejný střed.

21. Pravoúhlý trojúhelník.

23. Téměř to plyne z linearity mocnosti, akorát si musíš rozmyslet, proč není rozdíl mocností konstantní a proč je potom taková přímka kolmá na spojnici středů.

37. Použij sinovou větu pro pět trojúhelníků a vynásob spolu poměry.

39. Použij sinovou větu v trojúhelnících ABK a ACK. Alternativně pracuj s bodem M' na BC takovým, že $\sphericalangle KAB = \sphericalangle CAM'$.

42. Rozmysli si, že trojúhelníky ABC a BHC mají stejný poloměr kružnice opsané. Pak aplikuj rozšířenou sinovou větu.

43. Rovnost $|O_1B| = |O_2C|$ dokaž pomocí sinové věty a zbytek vyúhli.

44. Pro M střed HE použij sinovou větu v trojúhelnících AHM a EFM, stačí Ti dokázat rovnost úhlů. Využij své syntetické schopnosti.

45. Pracuj s koeficientem podobnosti trojúhelníků BDF a CDE. Použij sinovou větu.

46. Spočítej délky tečen z vrcholů ABC k jednotlivým kružnicím. Odečítej od obsahu celého $\triangle ABC$.

49. Vyjádři úhlopříčky z kosinové věty. Co splňují $\cos(\alpha)$ a $\cos(180° - \alpha)$?

50. Napiš si vztahy pro zbylé dvě strany do rovnic, aby tam nefigurovala úhlopříčka. Zjednodušuj.

51. Vyjádři jeden úhel ze sinové i kosinové věty a dosaď do goniometrické jedničky. Vyjde to

$$\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} = \frac{abc}{\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}}.$$

52. Použij Pythagorovu větu a kosinovou větu. Délky ID a IE jsou jen mlha.

55. Pomocí Stewartovy věty najdi kvadratickou rovnici pro $|DB|$ a ukaž, že tato rovnice má dvojnásobný kořen.

56. Zvol si dva body A, B v rovině a použij Stewartovu větu v trojúhelnících O_1AB a O_2AB.

72. Když rovnost pronásobíš jmenovateli a převedeš na jednu stranu, vyjde Ti vlna, kterou hledáš. $|AC|$, $|BC|$ jsou konstanty.

73. Tři body nech pevné a jedním hýbej.

76. Najdi, kde mají čitatel i jmenovatel nulu. Nezapomeň, že vzdálenosti mění znaménka.

77. Naproti maximu je nula.

78. Přeuspořádej výraz tak, aby měly vlny v jednom zlomku nulu na stejném místě. Pak najdi zvláštní body.

79. Domysli si rovnostranný trojúhelník a počítej jako v úvodním příkladu 57.

80. $KL = KS - LS$. Příslušné vlny mají stejnou nulu.

81. Do vlny zahrň všechny tři kružnice. Za zvláštní případy vezmi tečny.

82. Když znáš dva poměry, umíš už sestrojit nulovou lineární kombinaci.

85. Maximum nastává o $90°$ od nuly. Co znamená v praxi nula? Ostroúhlost pomůže s výběrem ze dvou možností.

91. Nejprve si definuj pohyblivou dotyčnou kružnici a pak dokazuj středy.

92. Dokaž úlohu ve speciálních bodech. Hledej v úloze chordály.

93. Na kružnici je toho hodně, potřebuješ správně vybrat, na co se nejdřív zaměřit. Pak teprv řeš zvláštní body.

95. Ukaž, že je poměr pevný, když se hýbe b. Za zvláštní případ vezmi, když jsou A, B naproti sobě a trochu si započítej. Pomůže Ti zmenšení jako v předchozím tvrzení.

96. Ve zvláštních případech bodu X použij předchozí tvrzení 95. Bod je kružnice s nulovým poloměrem.

Řešení cvičení

12. Rovnici „doplníme na čtverec", tedy přepíšeme do tvaru

$$\left(x - \frac{-c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{-d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - e\right) = 0.$$

Pokud je poslední závorka kladná, můžeme ji zapsat jako r^2 pro nějaké r a máme rovnici kružnice se středem $(-c/2, -d/2)$ a poloměrem r. Pokud je nulová, dostaneme kružnici s nulovým poloměrem, tedy bod (rovnice bude splněna jen v bodě $(-c/2, -d/2)$). Pokud je záporná, má být nulový součet dvou druhých mocnin a kladného čísla, což se nemůže stát, takže pak to určuje prázdnou množinu.

20. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ je druhá mocnina vzdálenosti bodu od středu. Takže se výraz rovná mocnosti z definice.

21. Označme bod doteku T a střed ω O. Trojúhelník OTP má u T pravý úhel. Takže z Pythagorovy věty $|TP|^2 = |OP|^2 - |OT|^2$, což je, jelikož je $|OT|$ poloměr, z definice mocnost bodu P ke kružnici ω. Máme tedy $|TP|^2 = \rho(P, \omega)$, odmocnění dostaneme $|TP| = \sqrt{\rho(P, \omega)}$.

23. Dá se to dokázat z linearity mocnosti tak, že si uvědomíme, že (například) v průsečících spojnice středů s jednou kružnicí je rozdíl mocností různý, takže není konstantní. Z toho plyne, že množina bodů, kde je rozdíl nulový, je přímka (a ne prázdná množina nebo celá rovina). Když úlohu vyzrcadlíme podle spojnice středů, nezmění se, z této symetrie musí být tato přímka na spojnici kolmá.

Alternativně se to dá přímo dopočítat. Označme O_1, O_2 středy kružnic ω_1 a ω_2 a zaveďme souřadnou soustavu tak, že $O_1 = (0, 0)$ a $O_2 = (0, 1)$. V této souřadné soustavě mají tyto kružnice poloměry po řadě r_1, r_2.

Dokazujeme tvrzení ohledně rozdílu mocností, proto rovnice získané ve cvičení 20 od sebe odečteme:

$$\rho(P, \omega_1) - \rho(P, \omega_2) = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 - r_1^2 - (x - 0)^2 - (y - 1)^2 + r_2^2,$$
$$\rho(P, \omega_1) - \rho(P, \omega_2) = 2y + r_2^2 - 1 - r_1^2.$$

Množina bodů, kde je tato funkce konstantní, je tvaru $y = C$, tedy přímky kolmé na osu y.

31. Použijeme součtové vzorce pro kosinus, to nám díky vlastnostem z předchozího tvrzení dává

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Podobně získáme $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

48. Položme trojúhelník ABC do kartézské soustavy souřadnic tak, že $A = (0, 0)$, B leží na kladné poloose x a strana b má délku 1. Tedy $B = (c, 0)$ a $C = (u, v)$ tak, že $u^2 + v^2 = 1$.

Pak $\cos(\alpha) = u$. Snadno spočítáme

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = u^2 + v^2 + c^2 - 2\sqrt{u^2 + v^2} \cdot c \cdot u = u^2 + v^2 + c^2 - 2cu = (c - u)^2 + v^2 = a^2.$$

49. Označme vrcholy rovnoběžníka A, B, C, D, délky stran $a = |AB| = |CD|$ a $b = |BC| = |DA|$, úhlopříčky $e = |AC|$ a $f = |BD|$ a úhel $\alpha = |\sphericalangle DAB|$. Víme, že $|\sphericalangle ABC| = 180° - \alpha$. Kosinové věty v trojúhelnících DAB a ABC nám dají

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha),$$
$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha).$$

Víme, že $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$, takže součtem rovností získáme

$$e^2 + f^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2,$$

což jsme měli dokázat.

51. Sinová věta nám říká, že platí $\sin\alpha = \frac{2a}{r}$ a kosinová věta tvrdí $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Tyto dva vztahy dosadíme do goniometrické jedničky:

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{2a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2.$$

Z tohoto vztahu vyjádříme r a vyjde dokazovaný tvar.

56. Označme O_1, O_2 a r_1, r_2 po řadě poloměry kružnic ω_1 a ω_2. Dále uvažme dva body A, B tak, že $AB = 1$ a na přímce AB bod C tak, že $CB = k$. Podle Stewartovy věty platí

$$k(1-k) + |O_1C|^2 = k|AO_1|^2 + (1-k)|BO_1|^2.$$

Obou stran odečteme $r_1^2 = kr_1^2 + (1-k)r_1^2$ a získáme pro mocnosti vztah

$$k(1-k) + |O_1C|^2 - r_1^2 = k(|AO_1|^2 - r_1^2) + (1-k)(|BO_1|^2 - r_1^2),$$

což přepíšeme pomocí mocností příslušných bodů na

$$k(1-k) + \rho(C,\omega_1) = k\rho(A,\omega_1) + (1-k)\rho(B,\omega_1).$$

Analogický vztah napíšeme pro kružnici ω_2:

$$k(1-k) + \rho(C,\omega_2) = k\rho(A,\omega_2) + (1-k)\rho(B,\omega_2).$$

Rozdílem těchto dvou rovnic získáme

$$\rho(C,\omega_1) - \rho(C,\omega_2) = k(\rho(A,\omega_1) - \rho(A,\omega_2)) + (1-k)(\rho(B,\omega_1) - \rho(B,\omega_2)).$$

Jinak řečeno, $f(C) = kf(A) + (1-k)f(B)$. To platí pro libovolné body A, B, C na přímce, proto je f lineární.

77. Jelikož je p konstanta, je $p \cdot XA + XB$ s pohyblivým bodem X vlna. Orientujeme vzdálenosti tak, aby v tom bodě X, kde je $p \cdot |XA| + |XB|$ nejvyšší, bylo XA i XB kladné. Pak má v tom bodě vlna $p \cdot XA + XB$ největší hodnotu a přímo naproti, v bodě Y, je tudíž nulová. Dostáváme tak $p \cdot YA + YB = 0$. Aby byl součet nulový, musí být jeden člen kladný a druhý stejně velký a záporný, platí tak v absolutních hodnotách $p \cdot |YA| = |YB|$.

95. Představme si, že je B pohyblivý bod a b je tedy pohyblivá kružnice s (prozatím) pevným poloměrem. Poměr délek tečen je konstantní, protože obě vlny mají nulu při $B = A$. Nezávisí tak na bodu doteku a stačí se zaměřit na jednu polohu bodu B (kromě $B = A$) a měnit poloměr kružnice b. Uvažme tedy B přímo naproti A.

Označme r_1, r_2, s poloměry kružnic a_1, a_2, b a r poloměr k. Stejně jako v předchozím tvrzení považujme poloměr kružnice, pokud se dotýká k zevně, za záporný. Také analogicky uvážíme všechny kružnice zmenšené o s, už víme, že délky tečen se nezmění. Označme tyto kružnice po řadě k', a_1', a_2', b'. Kružnice b' je pak jediný bod, takže můžeme počítat délku tečny pomocí mocnosti:

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{\rho(b',a_1')}{\rho(b',a_2')}} = \sqrt{\frac{(2(r-s)-(r_1-s))^2-(r_1-s)^2}{(2(r-s)-(r_2-s))^2-(r_2-s)^2}} = \sqrt{\frac{4(r-s)(r-r_1)}{4(r-s)(r-r_2)}} = \sqrt{\frac{r-r_1}{r-r_2}}.$$

Hledaný poměr tedy nezávisí ani na poloměru kružnice b.

96. Označme t_{xy} délku společné tečny kružnic x a y. Uvažme bod X v bodě doteku kružnice b s kružnici opsanou. V tomto případě je $t_b = 0$, takže platí $t_a = t_c$, jak jsme ve cvičení dokázali. Podle cvičení 95 platí

$$\frac{t_{ba}}{t_a} = \frac{t_{bc}}{t_c},$$

kde X považujeme za kružnici s nulovým poloměrem. Získáme tak $t_{ba} = t_{bc}$. Analogicky, je-li X v bodě doteku c, získáme $t_{ca} = t_{cb}$. Tím máme hotovo.