Analytická geometrie I – Do hlubin goniometrie

Milý příteli,
v rukou držíš a nebo na Tvém monitoru svítí zbrusu nový matematický seriál. Letos se budeme zabývat řešením klasických geometrických úloh pomocí výpočetních metod. Naším cílem je zde rozšířit Tvou zásobu triků – užívání podobností, hledání úhlů, dokreslování nových bodů – o pár nových početních kousků, které Ti, věříme, budou dobře sloužit.

Provedeme Tě leckterými technikami analytické geometrie a ukážeme si, že i když jde o geometrii, můžeme v úlohách mnohé počítat a skutečně budeme počítat úlohy od lehkých až po ty nejtěžší. Tento díl se bude hlavně zaměřovat na práci s goniometrickými funkcemi, díl další už bude poněkud komplexnější.

Seriál pro Tebe letos píší Zdeněk Pezlar a Matouš Šafránek. Kdybys měl(a) jakékoli nejasnosti, nevěděl(a) si rady s úlohou nebo měl(a) touhu si postěžovat, neváhej nás kontaktovat na mailech *zdendapezlar@seznam.cz* a *matous.safranek@gmail.com* nebo se zeptat na PraSečím chatu. Stejně tak se rádi doslechneme, když nějakou úlohu vyřešíš lépe než my. Přejeme příjemné počítání :)

Počítání je fajn, ale… aneb jak pracovat se seriálem

V tomto díle seriálu postupně budujeme teorii, kterou zakládáme na znalosti goniometrických funkcí, i ty si ale znovu představíme. K pochopení seriálu tedy nepotřebuješ žádné speciální znalosti.

Tento text Ti doporučujeme číst pomalu, kreslit si, počítat a rozmyslet si, že tvrzení, která Ti představíme, opravdu platí. K důkazům nepřistupuj jako ke svatým textům, ale snaž se o jejich plné pochopení, aby sis ze svého čtení odnesl(a) co nejvíce. Důkazy některých tvrzení občas využívají triky, zkus si ale před přečtením důkazu tvrzení dokázat sám(sama).

V textu na Tebe čekají různé věty, úlohy, příklady a cvičení. „Příklady“ jsou zpravidla úlohy, které hezky ilustrují princip, o kterém se bavíme. „Cvičení“ a „úlohy“ jsou tu pro Tebe, aby sis vyzkoušel(a) práci s nově nabytými znalostmi. Cvičení často představují jednoduché důsledky probíraných tvrzení a jejich řešení najdeš na konci seriálu. Úlohy mohou být těžší a jejich řešení není potřeba ke čtení textu – pokud si s nějakou nevíš rady, s klidem se k ní vrať později. U cvičení Ti doporučujeme si přečíst řešení. K úlohám i cvičením každopádně najdeš na posledních stranách nápovědy.

Konečně se pobavme o samotné matematické stránce seriálu. Je důležité si uvědomit, že analytické metody jsou jenom to – metody! Není to převratný pohled na geometrii, který Ti umožní snadno vyřešit všechny úlohy. Proto až budeš mít celý papír popsaný úpravami výrazu, prosíme Tě, zadrž. Možná je lepší začít jinou metodou…

Aby ses naučil(a), které výpočty můžou vést k výsledku, je tu pro Tebe tento seriál. Nechceme Ti předepisovat jediný postup, ať Tě při řešení úlohy napadne jakýkoli způsob počítání, klidně si ho zkus, sám(sama) a zjistíš, zda vede k cíli. Postupem času si vypracuješ oko a snadno poznáš, kdy už úloha půjde snadno dokončit výpočtem. Pokud máš ambice uspět v olympiádě, pečuj i o své schopnosti řešit úlohu synteticky.

U každé úlohy, kterou budeš řešit, se pozastav a zamysli se, jestli opravdu dává smysl úlohu počítat. Do bitvy s úlohou se pusť s plánem a vírou, že konec leží v dohlednu. Tento pohled platí dvakrát na ostré soutěži – máš na vyřešení tří úloh jen málo času, nemarni cenné minuty!

Rozhodneš se tedy s čistou myslí nějakou z technik použít. Jak ale řešení sepsat? V tomto i dalších dílech budujeme teoretický základ jistých technik. Pokud nějakou z nich vytáhneš na soutěži, buď opatrný (opatrná) – různí opravovatelé berou různé poznatky za zřejmé. U pokročilejších a méně známých technik si zvykni odkazovat se na konkrétní tvrzení z článků a nebo dokazovat potřebná tvrzení na konci svého řešení. Speciálně, obsah sekce rovnání vln dle našich nejlepších vědomostí nebyl zatím popsán, pročež doporučujeme při jeho případném použití odkázat přímo na tento seriál.

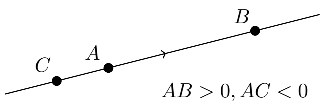
Vymítání absolutních hodnot

V klasické geometrii bereme vzdálenosti přirozeně jenom nezáporné, ale při počítání nám absolutní hodnoty spíš zavaří. Například leží-li na přímce body A, B, C a víme-li, že $|AB| = 2$ a $|BC| = 1$, kolik je $|AC|$? Jelikož v úlohách nechceme řešit, která ze dvou možností zrovna nastane, zavedeme si veličiny se znaménkem.

Na přímce rozlišíme dva směry, totiž „směry, kterými ji můžeme kreslit“.

Definice 1. *Orientovaná přímka* je přímka, jíž jeden směr označíme za kladný.

Definice 2. *Orientovaná vzdálenost* AB mezi dvěma body A, B na (orientované) přímce je v absolutní hodnotě rovna běžné vzdálenosti $|AB|$ a má kladné znaménko, pokud leží B v kladném směru od A, jinak má záporné znaménko.



Pokud si za přímku představíš číselnou osu, kde body odpovídají reálným číslům, je orientovaná vzdálenost bodu y od bodu x rovna $y - x$, kdežto absolutní vzdálenost je $|y - x|$. Pokud zapíšeme $\overrightarrow{AB}$, myslíme tím přímku AB orientovanou tak, aby byla vzdálenost AB kladná. Často však na konkrétní orientaci nezáleží. Následující pozorování je klíčovou vlastností orientovaných délek. Díky orientovaným délkám totiž nemusíme řešit, v jakém pořadí body na přímce leží.

Pozorování 3. *Pro body A, B, C na přímce platí $AB + BC = AC$. Speciálně $AB = -BA$.*

Definice 4. *Orientovaným úhlem* $\sphericalangle(p, q)$ mezi dvěma orientovanými přímkami p, q myslíme úhel, o který musíme otočit p, aby byla rovnoběžná s q a měla stejnou orientaci. Přitom se otočení jedním směrem (typicky proti směru hodinových ručiček) považuje za otočení o kladný úhel a druhým směrem o záporný. Orientovaným úhlem mezi třemi body $\sphericalangle BAC$ myslíme $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Orientovaný úhel je určen jednoznačně až na násobek $360°$.[1] Všimni si následující klíčové vlastnosti orientovaných úhlů, která nezávisí na vzájemné poloze přímek.

Pozorování 5. *Pro orientované přímky a, b, c platí $\sphericalangle(a, b) + \sphericalangle(b, c) = \sphericalangle(a, c)$. Speciálně $\sphericalangle(a, b) = -\sphericalangle(b, a)$.*

[1] Pozor, v různých zdrojích se můžeš dočíst o „orientovaném úhlu modulo $180°$“, kde je úhel určen až na násobek $180°$ a má jiné vlastnosti.

Kromě výše zmíněných můžeme měřit ještě vzdálenost bodu od přímky. Tou rozumíme vzdálenost bodu od paty kolmice z něj. Jelikož jsou všechny kolmice rovnoběžné, můžeme každou orientovat stejně a tím definovat orientovanou vzdálenost bodu od přímky. Orientaci kolmic může být potřeba určit, pokud na ní záleží.

Definice 6. Dejme každé kolmici k přímce p stejnou orientaci. Veďme bodem B kolmici k p a její patu (průsečík s p) označme B_0. *Orientovanou vzdáleností Bp bodu B od přímky p* myslíme orientovanou vzdálenost B_0B.

Kartézské souřadnice

Kartézské souřadnice jsou dost možná to, co ze školy znáš pod pojmem „analytická geometrie“. Ačkoliv jsou kartézské souřadnice v mnoha ohledech nejpřirozenější, v klasických olympiádních úlohách s nimi tolik nezaboduješ, protože se výrazy rychle protáhnou. Můžou se ale hodit na úlohy s málo objekty, čtverce a obdélníky jsou tu Tvoji kamarádi. Připomeňme si to nejdůležitější.

Definice 7. Nechť jsou osa x a osa y dvě kolmé přímky. Kartézské souřadnice bodu jsou čísla x, y, kde x je jeho orientovaná vzdálenost od osy y a y je jeho orientovaná vzdálenost od osy x. Bod zadaný v kartézských souřadnicích značíme (x, y).

Průsečíku os říkáme počátek (počátek soustavy souřadnic) a značíme jej O. Osám běžně přiřazujeme orientaci takovou, aby měla osa x stejnou orientaci jako vzdálenost od osy y a naopak[2]. Úhly počítáme tak, aby $\sphericalangle(\text{osa } x, \text{osa } y) = 90°$ (a ne $-90°$).

Tvrzení 8. (Rovnice přímky) *Přímka se dá vyjádřit jako množina bodů splňujících $ax+by+c = 0$ pro nějaké konstanty a, b, c.*

Naopak pro každou trojici čísel a, b, c, kde aspoň jedno z a, b není nulové, je $ax + by + c = 0$ rovnice přímky.

Definice 9. O funkci, která přiřazuje bodu v rovině reálné číslo, řekneme, že je *lineární*, pokud se dá vyjádřit ve tvaru $f(x, y) = ax + by + c$.

Vzdálenosti v kartézských souřadnicích umíme vyjádřit přesně. Následující formule si zkus dokázat, bude se hodit Pythagorova věta.

Tvrzení 10. *Buďte $p : ax + by + c = 0$ daná přímka a $X = (x_0, y_0)$ bod v rovině. Poté je orientovaná vzdálenost Xp rovna*
$$\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Tvrzení 11. (Rovnice kružnice) *Kružnice se dá vyjádřit jako množina bodů splňujících*
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0,$$
kde x_0, y_0 jsou souřadnice středu a r je poloměr.

Každou rovnici kružnice můžeme roznásobit do tvaru $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$ pro nějaké konstanty c, d, e. A naopak?

Cvičení 12. Množina bodů splňujících $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$ pro nějaké konstanty c, d, e je kružnice, bod, anebo prázdná množina.

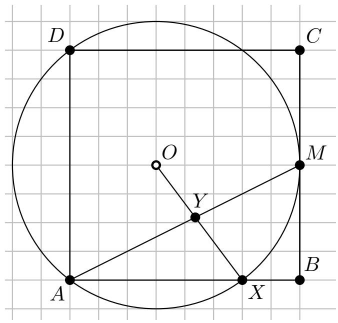
Rozmysli si, jak budou vypadat průsečíky přímek a kružnic. Kdy se dvě přímky neprotínají? Jak spočítat průsečíky dvou kružnic nebo kružnice a přímky? Pro souřadnice průsečíků získáš jenom

[2] Tedy tak, aby pro bod X na ose x měly vzdálenost OX a vzdálenost X od osy y stejné znaménko.

soustavu rovnic, kterou můžeš řešit například dosazováním nebo vhodným sčítáním a odečítáním rovnic.

Teď si ukážeme přímočarou aplikaci kartézských souřadnic v geometrické úloze. V praxi, pokud bys použil(a) kartézské souřadnice v olympiádní úloze, pravděpodobně si budeš muset s konfigurací více pohrát – například redukovat úlohu na tvrzení, které jde spočítat snadno.

Příklad 13. Buď $ABCD$ čtverec se stranou délky 8. Označme M střed BC, O střed kružnice ω opsané trojúhelníku MAD a X druhý průsečík této kružnice s přímkou AB. Přímky AM a XO se protínají v Y. Určete délku OY. (PuMAC 2016)



Řešení. V úloze máme daný čtverec a jedinou kružnici. Každý objekt v zadání bychom lehce spočítali, což navádí na použití kartézských souřadnic. Zaveďme soustavu souřadnic tak, že $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (8, 8)$ a $D = (0, 8)$, bod M má pak souřadnice $(8, 4)$. Nyní spočteme rovnici ω. Díky symetrii okolo přímky $y = 4$ leží její střed na této přímce – ať je to bod $O = (t, 4)$. Potom vzdálenosti bodu O od bodů A a M musí být shodné

$$\sqrt{t^2 + 15} = |OA| = |OM| = |t - 8|,$$

což dává $t = 3$ a tedy $O = (3, 4)$. Poloměr kružnice je $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Kružnice opsaná MAD má tedy tvar $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. Její průsečíky s přímkou AB nalezneme jednoduše dosazením rovnice této přímky, $y = 0$. Průsečíky tak splňují $(x - 3)^2 + 16 = 25$, tedy $x \in \{0, 6\}$. Bod $X \neq A$ má tak souřadnice $(6, 0)$. Nyní spočítáme rovnici přímky AM. Dosazením souřadnic těchto bodů do obecného tvaru přímky $ax + by + c = 0$ snadno najdeme, že rovnice přímky je $x = 2y$. Spočítáme též, že rovnice přímky XO je $4x + 3y = 24$. Souřadnice bodu Y získáme vyřešením této soustavy rovnic, dosazením získáme $x = \frac{48}{11}$ a $y = \frac{24}{11}$, tj. $Y = \left(\frac{48}{11}, \frac{24}{11}\right)$. Konečně, délku OY spočítáme jako $\sqrt{\left(3 - \frac{48}{11}\right)^2 + \left(4 - \frac{24}{11}\right)^2} = \frac{25}{11}$.

Úloha 14. Pro body A, B, C, D v rovině dokaž, že $AC \perp BD$ nastane právě tehdy, pokud platí $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.

Úloha 15. (Rovnoběžníkové pravidlo) Dokaž, že součet čtverců délek stran daného rovnoběžníku je roven součtu čtverců délek jeho úhlopříček.

Úloha 16. V trojúhelníku ABC označme D, E, F po řadě středy úseček AB, BC a AD. Dokaž, že přímka CD půlí úsečku EF. (Školní kolo MO C 2019)

Úloha 17. Na straně AB rovnoběžníka $ABCD$, v němž $|AB| = 1$, jsou zvoleny body K a L tak, že $|BK| = \frac{1}{2}$ a $|BL| = \frac{1}{3}$. Na straně CD jsou zvoleny body P a Q tak, že $|CP| = \frac{1}{2}$ a $|CQ| = \frac{1}{3}$. Průsečík přímek LD a KP označme X, průsečík přímek BD a LQ označme Y. Dokaž, že přímka XY půlí stranu BC. (Krajské kolo MO C 2019)

Úloha 18. Buď AB průměr kružnice s poloměrem $5\sqrt{2}$. Dále buď CD tětiva této kružnice, která protíná AB v bodě E splňujícím $|BE| = 2\sqrt{5}$ a $\sphericalangle AEC = 45°$. Urči $|CE|^2 + |DE|^2$.

(AMC 12 2020)

Kartézskými souřadnicemi samotnými se nebudeme příliš zabývat, ukážeme si ale jednu roztomilou skutečnost, která plyne z jejich základních vlastností.

Mocnost bodu ke kružnici

Definice 19. Buď ω kružnice se středem O a poloměrem r a P bod v rovině. Potom definujeme *mocnost bodu* P k ω jako $\rho(P, \omega) = |OP|^2 - r^2$.

Cvičení 20. Nechť má ω rovnici $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$. Pak je mocnost bodu (x, y) k ní rovna právě $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$.

Cvičení 21. Buď ω kružnice a bod P mimo ni. Délka tečny z P k ω (míněno od P k bodu doteku) je $\sqrt{\rho(P, \omega)}$.

Věta 22. (Linearita mocnosti) *Uvažme v rovině dvě kružnice ω_1, ω_2. Poté funkce bodu roviny*

$$f(P) = \rho(P, \omega_1) - \rho(P, \omega_2)$$

je lineární.

Důkaz. Podle cvičení 20 můžeme mocnosti vyjádřit ve tvaru

$$\rho(P, \omega_1) = x^2 + y^2 + c_1x + d_1y + e_1,$$
$$\rho(P, \omega_2) = x^2 + y^2 + c_2x + d_2y + e_2,$$

kde jsme rovnice rovnou roznásobili. Jejich rozdíl je pak

$$(c_1 - c_2)x + (d_1 - d_2)y + e_1 - e_2,$$

což je lineární. □

Cvičení 23. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice ω_1, ω_2. Dokaž, že množina bodů, jejichž rozdíl mocností $\rho(P, \omega_1) - \rho(P, \omega_2)$ je konstantní, je přímka kolmá na spojnici středů.

Příklad 24. Jsou dány dvě kružnice ω_1, ω_2. Dokaž, že množina bodů, jejichž podíl mocností $\frac{\rho(P,\omega_1)}{\rho(P,\omega_2)}$ je konstantní, je kružnice, prázdná množina, přímka nebo bod.

Důkaz. Hledáme množinu $\frac{\rho(P,\omega_1)}{\rho(P,\omega_2)} = k$ pro danou konstantu k. Pro $k = 1$ už víme, že vyjde přímka, pro zbylá k dokážeme, že nám vyjde kružnice.

Zaveďme nyní libovolně kartézské souřadnice s tím, že bod P má souřadnice (x, y). Jak víme ze cvičení 20, existují konstanty c_i, d_i a e_i takové, že mocnosti bodu P k těmto kružnicím jsou

$$\rho(P, \omega_1) = x^2 + y^2 + c_1x + d_1y + e_1,$$
$$\rho(P, \omega_2) = x^2 + y^2 + c_2x + d_2y + e_2.$$

Množina bodů splňujících $\rho(P, \omega_1) = k\rho(P, \omega_2)$ je

$$0 = \rho(P, \omega_1) - k \cdot \rho(P, \omega_2) = (1 - k)x^2 + (1 - k)y^2 + (c_1 - kc_2)x + (d_1 - kd_2)y + (e_1 - ke_2).$$

To je po vydělení $1 - k \neq 0$ rovnice kružnice. Může to ovšem být bod nebo prázdná množina. □

Definice 25. Množinu bodů, které mají ke dvěma daným kružnicím k, ℓ stejnou mocnost, nazveme *chordálou*.

Pozorování 26. *Pokud se kružnice protínají, prochází chordála jejich průsečíky.*

Úloha 27. (Potenční střed) Jsou dané tři kružnice k, ℓ, m s navzájem různými středy. Dokaž, že tři jejich chordály jsou buď všechny rovnoběžné, nebo procházejí jedním bodem.

Dokázali jsme, že rozdíl mocností bodů ke dvěma kružnicím je lineární zobrazení. Pro více úloh využívající tuto techniku Tě odkážeme na *https://prase.cz/library/LinearitaRO/LinearitaRO.pdf*.

Úloha 28. Kružnice k, ℓ se dotýkají zevně v bodě S. Přímka skrz S protne k znovu v bodě K a ℓ znovu v bodě L. Dokaž, že podíl délky tečny z K k ℓ a délky tečny z L ke k nezávisí na volbě přímky.

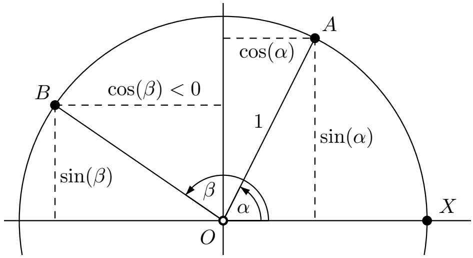
Goniometrie z rychlíku

Goniometrické funkce jsou funkce, které popisují vztahy mezi délkami stran pravoúhlého trojúhelníka a velikostmi jeho úhlů. S nimi ses buď setkal(a), nebo se setkáš na střední škole. Nebudeme se jimi příliš zabývat, ale budeme je potřebovat k počítání. Jestliže Ti nepostačí následující stručný úvod, můžeme Ti doporučit dobrý úvodní text do goniometrických funkcí, který se nachází na *https://prase.cz/library/GoniometrieMB/GoniometrieMB.pdf*.

Definice 29. Buď O bod $(0,0)$, X bod $(1,0)$ a j takzvaná *jednotková kružnice* s rovnicí

$$x^2 + y^2 = 1,$$

tedy kružnice se středem O procházející bodem P. Pro daný (orientovaný) úhel α najdeme na kružnici j bod A takový, že $\sphericalangle XOA = \alpha$. Jeho souřadnice x, y pak v tomto pořadí označíme jako *kosinus*, respektive *sinus* úhlu α. Značíme je $\cos(\alpha)$ a $\sin(\alpha)$.

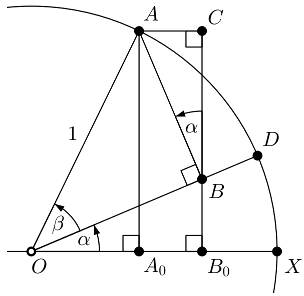


Rozmysli si, že jsme definovali sinus a kosinus v souladu s tím, jak je znáš v pravoúhlém trojúhelníku. K tomu můžeme přidat orientaci – jsou-li strany trojúhelníka orientovány tak, že $\sphericalangle(AB, BC) = 90°$, platí $BC = AC \sin(\sphericalangle(AB, AC))$ a $AB = AC \cos(\sphericalangle(AB, AC))$.

Tvrzení 30. *Připomeňme zde základní vlastnosti goniometrických funkcí, které budeme využívat. Zde uvažujeme α, β jako libovolné orientované úhly.*

(1) $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$.
(2) $\sin\alpha = \sin\beta$, *právě pokud platí* $\alpha - \beta = 2k\pi$ *pro přirozené* k *a nebo* $\alpha + \beta = k\pi$ *pro* k *liché.*
(3) *(součtový vzorec pro sinus)* $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.
(4) *(součtový vzorec pro kosinus)* $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
(5) $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$ a $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.
(6) *(goniometrická jednička)* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. *Naopak pro každá* a, b *splňující* $a^2 + b^2 = 1$ *existuje* α *takové, že* $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Důkaz. Tvrzení jsou známá a většinou jednoduchá, uveďme důkaz pouze bodům (3) a (4), takzvaným součtovým vzorcům. Uvažme konfiguraci jako na obrázku.



Důkaz uděláme plně orientovaně, což může vypadat složitě, ale zato bude platit ve všech konfiguracích. Máme tedy orientace $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA}$. Kolmicím dáme přirozeně orientaci takovou, aby

$$\sphericalangle(OX, A_0A) = \sphericalangle(OX, B_0B) = \sphericalangle(OD, BA) = 90^\circ.$$

Potom platí i se znaménkem

$$\begin{aligned}
A_0A &= OA \cdot \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta),\\
BA &= OA \cdot \sin(\beta) = \sin(\beta),\\
OB &= OA \cdot \cos(\beta) = \cos(\beta),\\
B_0B &= OB \cdot \sin(\alpha) = \cos(\beta)\cdot\sin(\alpha).
\end{aligned}$$

Dále si uvědomíme, že

$$\sphericalangle(BC, BA) = \sphericalangle(BC, OX) + \sphericalangle(OX, OD) + \sphericalangle(OD, BA) = -90^\circ + \alpha + 90^\circ = \alpha,$$

a z toho dostaneme

$$BC = BA \cdot \cos(\alpha) = \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha).$$

Z obdélníku A_0ACB_0 je ale patrné, že $A_0A = B_0B + BC$, což můžeme přepsat na

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha).$$

Součtový vzorec pro kosinus už získáme snadno pomocí ostatních vlastností:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) = \sin(90^\circ-\alpha-\beta) &= \sin(90^\circ-\alpha)\cos(\beta) + \cos(90^\circ-\alpha)\sin(-\beta) =\\
&= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).
\end{aligned}$$

□

Cvičení 31. Dokaž, že pro libovolné orientované úhly α, β platí

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta).$$

Rozmysli si, jak bude vypadat podobný vztah pro sinus.

Úmluva 32. V trojúhelníku ABC značíme a, b, c délky stran BC, AC a AB. Dále značíme α, β, γ velikosti úhlů $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ a $\sphericalangle ACB$. Obsah trojúhelníka XYZ značíme $[XYZ]$.

Věta 33. *Pro obsah trojúhelníka ABC platí $[ABC] = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.*

Důkaz. Je známý fakt, že je obsah trojúhelníka roven polovině součinu délky strany a výšky na ní kolmé. Označme tak v výšku z bodu B a D patu v na AC. Pak $BD = c\sin\alpha$ a tudíž $[ABC] = \frac{1}{2}b \cdot BD = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. □

Úloha 34. Urči poměr, ve kterém dělí výška protější stranu jen pomocí stran a délek v trojúhelníku. Zkus najít jedno vyjádření pro ostroúhlé i pro tupoúhlé trojúhelníky.

Počítání délek

Při práci s délkami trojúhelníka Tvoje první myšlenka určitě padne na podobnost a shodnost. Ty se učí na každém gymnáziu a často je využiješ v matematické olympiádě. Jak nám při práci s délkami pomohou goniometrické funkce?

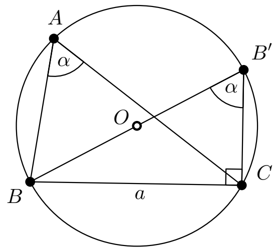
Sinová věta

V pravoúhlém trojúhelníku nám dávají siny a kosiny vztahy mezi délkami stran a úhly. Nyní si představíme trochu obecnější vztah, který nám poslouží v libovolném trojúhelníku, sinovou větu. Dokážeme ji jak jinak, než pomocí pravoúhlých trojúhelníků.

Věta 35. (Rozšířená sinová) *V trojúhelníku ABC s poloměrem r kružnice opsané platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Důkaz. Díky symetrii znění věty nám stačí ukázat rovnost $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$, zbytek plyne z cyklického argumentu. Tento tvar nám ale rovnou napovídá, jak jej dokázat. Nejprve si rozmysli, že v případě, že úhel α je pravý, je tvrzení triviální, proto tento případ dále nebudeme uvažovat.

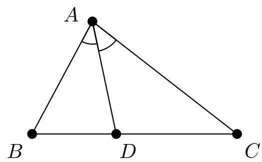


Dokresleme bod B' na kružnici opsané naproti B. Potom nám vzniká pravoúhlý trojúhelník $BB'C$ s přeponou BB' délky $2r$ a odvěsnou BC délky a. Obvodový úhel $\sphericalangle BB'C$ je roven buď α, nebo $180^\circ - \alpha$, podle toho, na kterém oblouku kružnice leží. Siny těchto dvou úhlů jsou ovšem stejné, získáváme tak $\sin\alpha = \frac{2r}{a}$, což jsme přesně chtěli. □

Ukažme typický příklad využití sinové věty v olympiádní úloze. V konfiguraci dostaneme dva trojúhelníky, jejichž úhly budou buď shodné, nebo vzájemné doplňky. Pomocí sinové věty pak dokážeme vztah mezi délkami v trojúhelníku – *větu o ose úhlu.*

Příklad 36. V trojúhelníku ABC označme D průsečík osy úhlu z vrcholu A se stranou BC. Dokaž, že

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$



Řešení. Proč je tento příklad vhodný na použití sinové věty? Hledané délky můžeme vyjádřit jako poměry stran v trojúhelnících ABD a ACD. Protože platí rovnosti úhlů $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$ a $\sphericalangle BDA + \sphericalangle ADC = 180^\circ$, tak dvojím použitím sinové věty máme

$$\frac{|DB|}{|AB|} = \frac{\sin\sphericalangle BAD}{\sin\sphericalangle BDA} = \frac{\sin\sphericalangle DAC}{\sin\sphericalangle ADC} = \frac{|DC|}{|AC|},$$

což jsme chtěli.

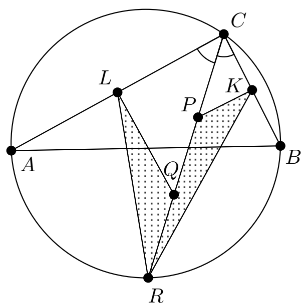
Úloha 37. Buď $A_1A_2A_3A_4A_5$ konvexní pětiúhelník. Dejme tomu, že se polopřímky A_2A_3 a A_5A_4 protínají v bodě X_1. Podobně definujme body $X_2, \ldots, X_5$. Ukaž, že

$$\prod_{i=1}^{5} |X_iA_{i+2}| = \prod_{i=1}^{5} |X_iA_{i+3}|.$$

Vytáhněte pravítka, teď jde do tuhého! Ukážeme si, jak využít naše počítání i na úlohách nejvyššího kalibru. Vyřešíme si úlohu z mezinárodní matematické olympiády[3] V této konfiguraci je možné najít vícero syntetických pozorování (zkus si!), my je pro názornost všechny naprosto mineme.

Příklad 38. Osa úhlu $\sphericalangle BCA$ trojúhelníka ABC protíná jeho opsanou kružnici v bodě R různém od bodu C, osu strany BC v bodě P a osu strany AC v bodě Q. Střed strany BC označme K a střed strany AC označme L. Dokaž, že obsahy trojúhelníků RPK a RQL se rovnají.

(IMO 2007/4)



Řešení. V úloze chceme spočítat obsahy dvou trojúhelníků. V nich figurují strany KP a LQ, které nebude problém spočítat. Snadno též vyúhlíme, že úhly $\sphericalangle KPR$ a $\sphericalangle RQL$ jsou oba dva rovné $90^\circ + \sphericalangle ACR$. V obou trojúhelnících známe jednu stranu a přilehlý úhel, proto nás napadne použít větu 33. Chceme dokázat

$$[RPK] = \frac{1}{2}|PK| \cdot |PR| \cdot \sin\sphericalangle RPK \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}|QL| \cdot |QR| \cdot \sin\sphericalangle RQL = [RQL],$$

[3] Autor úlohy je Marek Pechal.

přičemž siny úhlů se rovnají. Úlohu tedy máme, pokud dokážeme

$$\frac{|QR|}{|PR|} \stackrel{?}{=} \frac{|PK|}{|QL|} = \frac{a/2 \cdot \tan\frac{\gamma}{2}}{b/2 \cdot \tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{b}.$$

Jak uchopit délku úsečky QR? Vyjádříme ji jako $|CR| - |CQ|$, protože obě úsečky mají koncový bod v C, proto s nimi bude jednodušší počítat. Nyní je tedy náš úkol určit tyto dvě délky. Vyjádříme je pomocí poloměru r kružnice opsané a sinů úhlů trojúhelníka.

Délku CQ určíme snadno, z pravoúhlého trojúhelníka CQL je rovná $\frac{b}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{r\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. Délka CR taky nebude dělat obtíže – podle sinové věty v trojúhelníku BCR je rovna

$$2r\sin\sphericalangle CBR = 2r\cos\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Proto je

$$|CR| - |CQ| = 2r\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - \frac{r\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}} = r\frac{2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Díky cvičení 31 platí

$$2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\beta-\alpha-\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\alpha+\gamma}{2} = \cos(\beta - 90^\circ) + \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha + \sin\beta,$$

tedy $|QR| = |CR| - |CQ| = r\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. Podobně $|PR| = r\frac{\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}$, tedy konečně jednou naposled ze sinové věty opravdu platí

$$\frac{|QR|}{|PR|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} = \frac{|PK|}{|QL|}.$$

Tím jsme hotovi.

V následujících úlohách může pomoci nějaké to počítání – v těch těžších úlohách to ale nebude zadarmo, pořád potřebuješ získat půdu syntetickými pozorováními.

Úloha 39. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme M střed strany BC, K průsečík tečen v bodech B, C ke kružnici opsané a D průsečík přímky AK se stranou BC. Ukaž, že $\sphericalangle KAB = \sphericalangle CAM$ a $\frac{|BD|}{|CD|} = \left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^2$.

Definice 40. Těžnici překlopenou podle osy úhlu nazýváme *symediánou.*

Úloha 41. V ostroúhlém trojúhelníku ABC splňujícím $|AC| \neq |BC|$ s ortocentrem H označme body A', B' na přímce AB takové, že $|CA'| = |CA|$ a $|CB'| = |CB|$. Dokaž, že kružnice opsané trojúhelníkům ACB' a VCA' jsou shodné. (Krajské kolo MO B 2020)

Úloha 42. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek. Dejme tomu, že platí $|AH| = |BC|$. Dokaž, že $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. (Celostátní kolo MO 2011)

Úloha 43. V konvexním čtyřúhelníku platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Označme P průsečík jeho úhlopříček a O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABP a CDP. Dokaž, že čtyřúhelník O_1BCO_2 je rovnoběžník. (Celostátní kolo MO 2022)

Úloha 44. Pro daný trojúhelník ABC označme H ortocentrum a D bod takový, že čtyřúhelník $HABD$ je rovnoběžník. Sestrojme bod E ležící na přímce DH tak, že přímka AC půlí úsečku HE. Bod F je druhým průsečíkem přímky AC s kružnicí opsanou trojúhelníku DCE. Ukaž, že $|EF| = |AH|$. (IMO shortlist 2015/G1)

Úloha 45. V daném ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D, E, F po řadě paty výšek z bodů A, B a C. Označme ω_B, ω_C kružnice vepsané trojúhelníkům BDF a CDE a nechť se dotýkají úseček DF a DE v bodech M a N. Konečně, přímka MN protne ω_B a ω_C v bodech $P \neq M$ a $Q \neq N$. Dokaž, že $|MP| = |NQ|$. (Výběrko 2020, IMO shortlist 2019/G2)

Úloha 46. Dokaž, že pro libovolný trojúhelník ABC platí, že obsah trojúhelníka s vrcholy v bodech dotyku kružnice vepsané je roven obsahu trojúhelníka s vrcholy v bodech dotyku kružnic připsaných.

Pomyslná sestra sinové věty je věta kosinová, která nám dále doplňuje přehled o vztahu úhlů a stran v trojúhelníku. I když ji v řešení olympiádních úloh nepotkáš zdaleka tak často jako sinovou větu, pořád je to mocný nástroj na práci s délkami v trojúhelníku i dál.

Věta 47. (Kosinová) *V trojúhelníku ABC platí*

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Důkaz. Chceme porovnávat kosinus úhlu v trojúhelníku s délkami stran. Pravoúhlé trojúhelníky nám kosiny přirozeně zapojí do hry, spusťme proto výšku z A na BC a její patu označme D. Potom orientované vzdálenosti bodů B a C od přímky AD jsou

$$BD = c\cos\beta \qquad \text{a} \qquad CD = b\cos\gamma.$$

Platí tak

$$a = c\cos\beta + b\cos\gamma.$$

Rozmysli si, že právě získaný vztah platí díky orientovaným vzdálenostem i v případě tupoúhlého trojúhelníka. V kosinové větě se vyskytují druhé mocniny délek neznámých a výraz $bc\cos\alpha$, proto je přirozené tuto rovnost vynásobit délkou a:

$$a^2 = ac\cos\beta + ab\cos\gamma.$$

Analogicky získáme vztahy

$$b^2 = bc\cos\alpha + ab\cos\gamma,$$
$$c^2 = bc\cos\alpha + ac\cos\beta.$$

Všimni si, že v součtu posledních dvou rovnic získáme na pravé straně přesně $2bc\cos\alpha$ a potom výraz, který se vyskytuje v první získané rovnici. Pišme tedy

$$b^2 + c^2 = 2bc\cos\alpha + ac\cos\beta + ab\cos\gamma = 2bc\cos\alpha + a^2.$$

Získali jsme tedy vztah svazující délky stran a, b, c a $\cos\alpha$. Vztah ze znění věty obdržíš jednoduchou úpravou. □

Cvičení 48. Dokaž kosinovou větu pomocí kartézských souřadnic.

Cvičení 49. (Znovu rovnoběžníkové pravidlo) Dokaž, že součet čtverců délek stran daného rovnoběžníku je roven součtu čtverců délek jeho úhlopříček.

Úloha 50. Je daný konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$, $|AB| = |CD| = 180$ a $|AD| \neq |BC|$. Víme, že obvod $ABCD$ je 640. Urči $\cos\sphericalangle DAB$. (AIME I 2003/12)

Cvičení 51. Vyjádři poloměr kružnice opsané v trojúhelníku jen pomocí délek jeho stran.

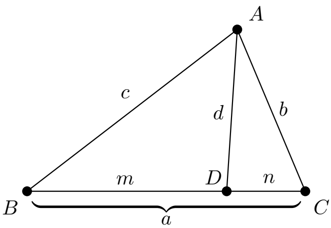
Návod. Kombinuj sinovou větu, kosinovou větu a goniometrickou jedničku.

Úloha 52. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou BC označme I střed kružnice vepsané a D, E paty os úhlů na strany AC, AB. Dokaž, že délky úseček AB, AC, BI, ID, CI a IE nemůžou být všechny naráz celočíselné. (USAMO 2010)

Sinová věta aplikovaná dvakrát nám v případě příkladu 36 dala informace o délkách v konfiguraci s osou úhlu. Analogické dvojnásobné použití věty kosinové bude mít větší sáh, jelikož se zaobírá pouze jedním úhlem. Můžeme tak spočítat nejen poměry, ve kterých osa úhlu dělí stranu, ale i samotnou její délku!

Věta 53. (Stewartova) *Uvažme bod D na straně BC trojúhelníka ABC. Označme d délku úsečky AD, m délku úsečky BD a n délku úsečky CD. Pro tyto délky platí vztah*[4]

$$mna + d^2a = mb^2 + nc^2.$$



Důkaz. Všimněme si, že $a = m + n$, a dokazovaný vztah se tak váže na délky stran ve dvou trojúhelnících, ABD a ACD. Porovnáme tentokrát vztahy dané kosinovou větou:

$$\frac{d^2 + m^2 - c^2}{2dm} = \cos\sphericalangle ADB = -\cos\sphericalangle ADC = -\frac{d^2 + n^2 - b^2}{2dn} = \frac{b^2 - d^2 - n^2}{2dn}.$$

Po roznásobení a úpravě nám vyjde

$$d^2a + amn = d^2(m + n) + mn(m + n) = b^2m + c^2n,$$

čímž jsme hotovi. □

Rozmysli si, jak bude situace vypadat, pokud bod D leží mimo úsečku AB.

Úloha 54. Urči délku těžnice a osy úhlu jenom pomocí délek stran trojúhelníka.

Úloha 55. V trojúhelníku ABC platí $|BC| = 1$ a zároveň na straně BC existuje právě jeden bod D takový, že $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Urči všechny možné hodnoty obvodu trojúhelníka ABC.

(Celostátní kolo MO 2016)

Pomocí Stewartovy věty můžeš spočítat skoro libovolnou délku v trojúhelníku, kterou si zamaneš. V olympiádních úlohách se tato věta nevyskytuje často, my, autoři seriálu, doporučujeme si nelámat hlavu s pamatováním jejího znění.V případě největší nouze si ji můžeš vždy odvodit z kosinové věty.

Cvičení 56. Dokaž linearitu mocnosti (větu 22) ještě jednou pomocí Stewartovy věty.

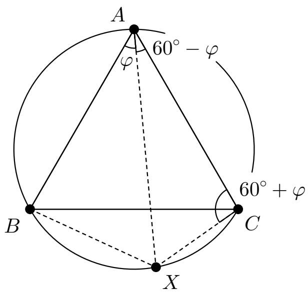
Teď se podíváme na metodu, která nám umožní bez konkrétních výpočtů dokázat některá tvrzení se vzdálenostmi „na kružnici“. Jak budeme k délkám na kružnici přistupovat? Přirozeně pomocí goniometrie.

[4]Pomůcka pro zapamatování ve tvaru $man + dad = bmb + cnc$: „A man and his dad put a bomb in the sink.“

Rovnání vln

Začneme příkladem.

Příklad 57. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Na kratším oblouku BC kružnice opsané leží bod X. Dokaž, že $|XB| + |XC| = |XA|$.



Řešení. Spočítáme všechny příslušné délky pomocí goniometrických hodnot úhlů. Nazvěme si poloměr kružnice r a $\varphi = \sphericalangle BAX$ (víme, že $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$). Pomocí sinové věty snadno spočítáme délky

$$|XB| = 2r \cdot \sin(\varphi), \qquad |XC| = 2r \cdot \sin(60^\circ - \varphi) \qquad \text{a} \qquad |XA| = 2r \cdot \sin(60^\circ + \varphi).$$

Chceme tedy dokázat rovnost $\sin(\varphi) + \sin(60^\circ - \varphi) = \sin(60^\circ + \varphi)$. To je díky součtovým vzorcům hračka:

$$\sin(60^\circ + \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \frac{1}{2} = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi = \sin(\varphi) + \sin(60^\circ - \varphi).$$

Po vynásobení $2r$ získáme požadovanou rovnost.

Pokud se obáváš, že za rohem číhá obdobný příklad s víceúhelníkem, obáváš se právem. Zobecněním naštěstí zvládneme zařídit, že nebudeme muset rozepisovat čím dál víc součtových vzorců. Vydrž teď s námi chvíli teorie a později si ušetříš počítání.[5]

Takže co jsme to udělali? Na kružnici uvažujeme jeden pevný a jeden „pohyblivý" bod a sledujeme, jak se vzdálenost těchto dvou bodů mění. Abychom dobře definovali pohyblivý bod, zavedeme si takové univerzální číslo, proměnný úhel φ.

Definice 58. Pevnou přímku ℓ otočíme o proměnný úhel φ okolo bodu A, který na ní leží. Výsledná přímka se nazývá *pohyblivá přímka*.[6] Pevná přímka ℓ se nazývá základní přímka a bod A střed otáčení.

Když měníme úhel φ, pohyblivá přímka se jednoduše otáčí kolem jednoho bodu, středu otáčení. V příkladě 57 byla základní přímka AB, pohyblivá přímka AX a střed otáčení byl A.

[5] Zvlášť pokud už si se siny a kosiny rozumíš víc, nebude to nic těžkého.

[6] V geometrii už existuje vícero metod „hýbání" s přímkami a body, jednu zmiňuje třeba seriál o projektivní geometrii z roku 2019/20. Takže pozor, aby se Ti nespletly.

Definice 59. Pokud prochází kružnice k středem otáčení pohyblivé přímky a, nazývá se druhý průsečík přímky a s kružnicí k *pohyblivý bod na kružnici k.*

Poznámka 60. Pokud je a tečna, dává smysl její druhý průsečík považovat za totožný s prvním, tedy se středem otáčení. Naopak když uvažujeme přímku procházející dvěma body na jedné kružnici a tyto body splynou (obyčejně je jeden pohyblivý a jeden pevný), je přirozené za jejich spojnici považovat tečnu v tomto bodě.

Pozorování 61. *Je-li na kružnici pohyblivý bod, je jeho polohou při $\varphi = 0$ (nebo jiném daném úhlu) jednoznačně určena jeho poloha při jakémkoliv úhlu. Na volbě středu otáčení nezáleží.*

Důkaz. Plyne z věty o obvodovém úhlu. Buď X pohyblivý bod na kružnici k a X_0 jeho poloha při $\varphi = 0$. Buď A, B na kružnici k dva různé středy otáčení. Přímky AX_0, AX svírají úhel φ a A, B, X, X_0 leží na jedné kružnici, takže i BX_0 a BX svírají úhel φ. To ovšem znamená, že oba středy definují X stejně a na středu opravdu nezáleží. Pro jiný úhel než 0 je důkaz analogický. □

To je také část důvodu, proč pohyblivý bod definujeme jen na kružnici, která prochází středem otáčení. Neuvažovat konkrétní přímku nám usnadní řešení úloh. V příkladě 57 jsme si spojnici AX dokreslili, ale to později nebude potřeba.

Definice 62. Hodnota závislá na φ se nazývá *vlna*, pokud se dá vyjádřit ve tvaru

$$a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \cos(\varphi),$$

kde jsou a a b konstanty.[7]

Všimni si, že v příkladě 57 byly obě strany rovnosti vlny. Na tomto pozorování stavíme následující sekci.

Tvrzení 63. *Je dána pohyblivá přímka a a pevný bod B. Orientovaná vzdálenost Ba je vlna.*

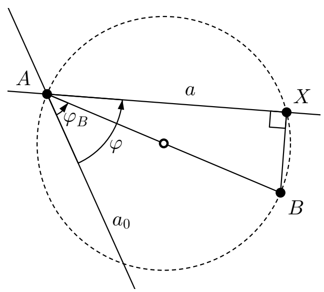
Důkaz. Buď A střed otáčení a a_0 základní přímka. Uvažme (pevný) úhel $\varphi_B = \sphericalangle(a_0, BA)$. Tedy při $\varphi = \varphi_B$ prochází a bodem B. Máme

$$\sphericalangle(a, BA) = \sphericalangle(a, a_0) + \sphericalangle(a_0, BA) = -\varphi + \varphi_B = \varphi_B - \varphi.$$

Vzdálenost Ba je (při vhodné orientaci BA) rovna $BA \cdot \sin(\sphericalangle(a, BA))$. To rozepíšeme pomocí součtového vzorce:

$$Ba = |BA| \cdot \sin(\sphericalangle(a, BA)) = |BA| \cdot \sin(\varphi_B - \varphi) = |BA| \cdot \sin(\varphi_B) \cdot \cos(\varphi) - |BA| \cdot \cos(\varphi_B) \cdot \sin(\varphi).$$

Hodnoty $|BA| \cdot \sin(\varphi_B)$ a $-|BA| \cdot \cos(\varphi_B)$ nezávisí na φ, takže získáváme požadovaný tvar vlny $a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \cos(\varphi)$ s konstantami a, b. □



[7] Název vlna vychází z tvaru grafu dané funkce proměnné φ. Formálněji této křivce říkáme sinusoida, ačkoli to je obecnější pojem. Když si vlnu třeba v GeoGebře vykreslíš pro různé hodnoty a, b, zjistíš, že je to opravdu jednoduchá sinová vlna, bez žádných zvláštních odchylek. Vysvětlení přijde za chvíli.

Doposud se mohlo zdát, že jsou orientované přímky při úhlech φ a $\varphi + 180°$ totožné, ale když uvažujeme orientaci vzdálenosti k nim, tak vidíme, že nejsou. Když přímku otočíme o $180°$, jednou během toho projde bodem B, tehdy se B dostane na druhou stranu a orientace se změní (sinus změní znaménko). Úhel φ je tedy orientovaný modulo $360°$. Zjednoznačněme si nyní orientaci od základní přímky.

Definice 64. Na kružnici leží pevný bod B a pohyblivý bod X. Označme A bod přímo naproti B. Pak *orientovanou vzdáleností bodu B od bodu X* rozumíme orientovanou vzdálenost bodu B od pohyblivé přímky (AX).

Z Thaletovy věty je úsečka BX kolmá na pohyblivou přímku AX, a jelikož vzdálenost měříme kolmo, tak si tyto dvě vzdálenosti v absolutní hodnotě skutečně odpovídají. Ale znaménko je novinka, orientovanou vzdálenost mezi dvěma body na kružnici jsme ještě nezkoumali, podívejme se na ni proto blíž.

Úhly φ a $\varphi + 180°$ pro orientovanou přímku určují stejnou přímku, ale opačnou orientaci vzdálenosti. Pohyblivý bod při úhlech φ a $\varphi + 180°$ leží na stejném místě, ovšem jeho vzdálenost od pevného bodu má opačné znaménko. Proto když určujeme bod X, musíme mimo jiné určit polohu i znaménko vzdálenosti. Pro ilustraci si představme, jak bod X objíždí po kružnici, když se mění hodnota φ. Nejprve vyjede z bodu B a vzdálenost XB je kladná, bod X objíždí kružnici. Při hodnotě $\varphi = 90°$ splývá s bodem A. Potom dojede zase do bodu B. Z pohledu středu už objel $360°$, ale úhel φ bereme z obvodu, takže má velikost jen $180°$. Bod objíždí kružnici dál, ale jakmile projede bodem B, orientace se změní a vzdálenost je teď záporná, až dokud X zase nedojede do B. Tehdy prošlo φ celou periodou $360°$ a začíná se od začátku. Díky vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem navíc platí, že pokud se φ mění „stálou rychlostí“, pohybuje se bod X stálou rychlostí.

Pamatuj, že jedna perioda vlny jsou pro X *dvě* objetí kružnice a že může být vlna na stejném místě ve dvou formálně různých pozicích (pozicích s opačným znaménkem). Jak jsme předestírali, vzdálenosti na kružnici se přirozeně chovají jako vlny.

Tvrzení 65. *Na kružnici leží pevný bod B a pohyblivý bod X. Orientovaná vzdálenost XB je vlna.*

Důkaz. Předchozí definice nám říká, že tato vzdálenost je ve skutečnosti orientovaná vzdálenost pevného bodu od pohyblivé přímky, o níž víme, že se jedná o vlnu. □

Tady už jsme použili trik, že na středu nezáleží a umožní nám to střed bezpečně zanedbat. Zatím si ale možná říkáš, že máme vlny, ale co s nimi?

Pokud se vrátíme k úvodnímu příkladu, právě jsme dokázali, že jsou obě strany rovnosti vlny (snad až na nějaká znaménka, protože v zadání jsou absolutní vzdálenosti). Snad věříš, že nás to přibližuje k důkazu, že jsou si rovny. Nejdřív si ale připravíme další pomůcky pro jiné úlohy.

Pozorování 66. *Součet dvou vln je vlna a konstantní násobek vlny je vlna.*

Důsledek 67. *Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou vlny a $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou reálná čísla. Potom součet $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$ je vlna.*

To speciálně znamená, že rozdíl vln je vlna. Následující tvrzení pak jednoduše charakterizuje vlny jako konstantní násobky sinusoidy. Toto tvrzení opodstatňuje název *vlna*. Díky němu bude zkoumání vlastností vln velmi přirozené.

Tvrzení 68. *Každá vlna se dá vyjádřit ve tvaru*

$$C \cdot \sin(\varphi - \varphi_0)$$

s nějakými konstantami C, φ_0.

Důkaz. Upravme si obecný výraz vlny do tvaru, ve kterém budeme moci používat sílu teorie goniometrických funkcí. Pišme

$$a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\varphi) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\varphi)\right).$$

Jelikož je

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

tak umíme najít úhel φ_0 takový, že $\cos(\varphi_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $\sin(\varphi_0) = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Jelikož jsou a a b konstanty, tak je i φ_0 konstanta. Označme též $C = \sqrt{a^2+b^2}$ vytýkanou konstantu. Vlnu konečně můžeme upravit do tvaru

$$a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\cos(\varphi_0)\sin(\varphi) - \sin(\varphi_0)\cos(\varphi)\Big) = C \cdot \sin(\varphi - \varphi_0),$$

což jsme chtěli. □

Každá vlna se dá vyjádřit jako konstantní násobek jednoho sinu – můžeme tak využít znalosti průběhu této funkce. Například víme, že sinus nabývá nuly jen dvakrát v periodě, a to v přesně opačných bodech periody (o úhel 180° vedle). Získáme tak následující tvrzení:

Tvrzení 69. *Pokud vlna nabývá nulové hodnoty při dvou úhlech, které se neliší o násobek* 180°, *pak je identicky nulová*[8].

Jelikož jsou pro nás úhly lišící se o 180° prakticky shodné, všechno, co potřebujeme k důkazu nulovosti vlny, je najít libovolné dva různé body X (nebo dvě přímky), pro které je vlna rovna nule. S těmito nově nabytými znalosti vyřešme těžší verzi příkladu z úvodu této sekce.

Příklad 70. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Na kratším oblouku BC kružnice opsané leží bod X. Dokaž, že $|XB| + |XC| + |XE| = |XA| + |XD|$.

Řešení. Vzdálenosti orientujeme tak, aby byly vzdálenosti ze zadání na kratším oblouku BC kladné.

Vezmeme výraz $XB + XC + XE - XA - XD$. Výraz $XB + XC + XE - XA - XD$ je součtem a rozdílem vln, takže taky vlna. Ukážeme teď, že je identicky nulová.

Podíváme se na její hodnotu ve dvou význačných pozicích bodu X, konkrétně $X = B$ a $X = C$. Když nastane $X = B$, tak ze symetrie platí $XA = XC$ a $XE = XD$ a taky $XB = 0$. Hodnota $XB + XC + XE - XA - XD$ je tedy 0. Analogický případ nastane pro $X = C$. Naše vlna má dva různé nulové body, proto je nulová všude, platí tedy $XB + XC + XE = XA + XD$ pro každý bod X na daném oblouku. Tím je úloha vyřešená.

Nesmíme zapomínat, že jsme rovnost ze zadání dokázali jen pro daný oblouk. Mimo něj orientované vzdálenosti mění znaménko. Z toho důvodu si musíme dávat pozor i na volbu poloh X. Když například zvolíme $X = A$, tak už bude X za bodem B, takže musíme vzdálenost XB počítat zápornou. Představuj si, že hýbeš bodem X po kružnici, a kdykoli projde jiným bodem, změní se znaménko vzdálenosti k tomu bodu.

Úloha 71. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Na kratším oblouku BC kružnice opsané leží bod X. Dokaž, že $|XA| + |XB| + |XC| + |XD| = |XE| + |XF|$.

Úloha 72. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC. Bod X leží na tom oblouku BC kružnice opsané, na kterém neleží A. Dokaž, že

$$\frac{|XA|}{|XB| + |XC|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

[8] To znamená, že je nulová všude.

Úloha 73. (Ptolemaiova věta) Pokud je $ABCD$ tětivový čtyřúhelník s běžně označenými stranami a úhlopříčkami e, f, platí $ac + bd = ef$.

Můžeš si zkusit vyřešit předchozí (i následující) úlohy Ptolemaiovou větou. Ne vždy můžeme vlnu jenom tak srovnat do nuly. Sledujme proto blíže, jak se vlny chovají.

Lemma 74. *Nenulová vlna nabývá nejvyšší i nejnižší hodnoty o úhel* $90°$ *vedle nuly. Jelikož měříme úhly obvodové, znamená to přímo naproti.*

Nediv se, že vlna nabývá nejvyšší a nejnižší hodnoty na jednom místě. Jednou tam má vlna vysokou hodnotu, ale když bodem X objedeme kolečko, tak má opačné znaménko.

Lemma 75. *Když mají dvě vlny nulu ve stejném bodě, pak mají jejich hodnoty všude konstantní poměr (kde má poměr smysl).*

Intuitivně tvrzení platí – obě vlny mají tvar $C_i \cdot \sin(\varphi - \varphi_0)$ pro stejný posun φ_0 a odlišné C.

Důkaz. Uvažme dvě vlny $C \cdot \sin(\varphi - \varphi_0)$ a $D \cdot \sin(\varphi - \varphi_1)$. Pokud je $CD = 0$, tvrzení je zřejmé. V opačném případě mají oba siny nulu ve stejném φ, pak platí $\varphi - \varphi_0 = k_1\pi$ a $\varphi - \varphi_1 = k_2\pi$ pro celá čísla k_1, k_2. Argumenty sinů se tak liší o násobek π, tudíž se příslušné siny v absolutní hodnotě vždy rovnají a podíl vln je konstantní. □

Úloha 76. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ splňující $AD \parallel BC$. Na tom oblouku BC kružnice jemu opsané, na kterém neleží A a D, leží bod X. Dokaž, že podíl

$$\frac{|XB| + |XC|}{|XA| + |XD|}$$

nezávisí na volbě bodu X.

Cvičení 77. Je dáno kladné číslo p, kružnice k a na ní body A, B. Na k je zvolen bod X tak, že je hodnota $p \cdot |XA| + |XB|$ největší možná. Bod Y leží na kružnici k naproti bodu X. Dokaž, že $p \cdot |YA| = |YB|$.

Úloha 78. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku BC kružnice opsané leží bod X. Dokaž, že

$$\frac{|XA| + |XC|}{|XB| + |XD|} = \frac{|XD|}{|XA|}.$$

Úloha 79. Body A_1, A_2, …, A_{3000} leží na kružnici ω s poloměrem 1. Dokaž, že na ω leží bod M takový, že $\sum_{i=1}^{3000} |MA_i| \leq 4000$.

Na více kružnicích

Uvažme dvě různé kružnice a na nich dva nezávislé pohyblivé body. Těmto bodům přísluší dvě různé vlny a i tyto dvě vlny můžeme sečíst. Obyčejně se ale bude hodit mít takové body nějak svázané, například na jedné pohyblivé přímce.

Úloha 80. Kružnice k, ℓ, m se protínají v bodech S, T. Přímka skrz S protne k znovu v bodě K, ℓ v bodě L a m v bodě M. Dokaž, že podíl

$$\frac{|KL|}{|LM|}$$

nezávisí na volbě přímky.

Úloha 81. Trojúhelník ABC má kružnici opsanou ω. Kružnice ω_1 se v bodě A dotýká přímky AB a prochází bodem C a kružnice ω_2 se v bodě A dotýká přímky AC a prochází bodem B. V bodě A sestrojíme tečnu k ω, která protne kružnici ω_1 podruhé v bodě X a protne kružnici ω_2 podruhé v bodě Y. Urči podíl $\frac{|AX|}{|XY|}$. (Finále SPbU 2018)

Úloha 82. Kružnice a, b, c se protínají v bodě S, přičemž se žádné dvě nedotýkají. Tečna k a v S protne b znovu v A_b a c znovu v A_c. Analogicky definujeme body B_c a B_a, C_a a C_b. Dokaž, že

$$\frac{|A_bS|}{|A_cS|} \cdot \frac{|B_cS|}{|B_aS|} \cdot \frac{|C_aS|}{|C_bS|} = 1.$$

Úloha 83. Uvnitř trojúhelníka ABC leží bod S. Přímka AS protíná kružnici opsanou trojúhelníku BCS znovu v bodě A_1. Analogicky definujeme body B_1 a C_1. Dokaž, že

$$\frac{|A_1S|}{|A_1A|} + \frac{|B_1S|}{|B_1B|} + \frac{|C_1S|}{|C_1C|} = 2.$$

Jiná vlnítka

Zatím jsme za vlny brali jen délky tětiv. Víme ale, že i vzdálenost bodu od pohyblivé přímky je vlna. Pojďme tuto vlnu studovat.

Úloha 84. Vrcholem A čtverce $ABCD$ prochází přímka p, která odděluje B od C a D. Dokaž, že $|Bp| + |Cp| = |Dp|$.

Úloha 85. Buď d přímka procházející vrcholem A ostroúhlého trojúhelníka ABC, jiná než AB a AC. Nechť jsou B_1 a C_1 po řadě kolmé průměty bodů B a C na přímku d. Najdi polohu přímky d, ve které je součet $|BB_1| + |CC_1|$ největší. (OKTV 2018)

Podobné úlohy se naučíme efektivněji řešit ve třetím díle, proto se jim nebudeme tolik věnovat teď. Nyní se podíváme, na jaké vlny narazíme, když na kružnici nestudujeme tětivy, ale tečny. Nebudeme pohybovat pouze body, ale i celými kružnicemi. Využijeme k tomu všechnu teorii, kterou jsme zatím vybudovali.

Tvrzení 86. *Kružnice k a ℓ se dotýkají tak, že k není uvnitř ℓ, a na kružnici k leží pohyblivý bod X. Potom délka tečny z X k ℓ se znaménkem je vlna a znaménko se mění, když projde X bodem doteku.*

Důkaz. Označme A bod doteku kružnic k a ℓ a a kružnici se středem v A s nulovým poloměrem. Společná vnitřní tečna k a ℓ prochází bodem a a je tedy i chordálou kružnic a, k. Z linearity mocnosti platí $\rho(X,\ell) - \rho(X,k) = p \cdot Xt$ a $\rho(X,A) - \rho(X,k) = q \cdot Xt$. Ovšem $\rho(X,k) = 0$, takže

$$\rho(X,\ell) = \frac{p}{q} \cdot \rho(X,A).$$

Odmocnina z mocnosti je délka tečny a délka tečny z X k A je jen vzdálenost XA. Délka tečny z X k ℓ je tedy $\sqrt{\frac{p}{q}} \cdot XA$, což je (s orientací) vlna. □

Příklad 87. Buď ABC rovnostranný trojúhelník a S jeho střed. Buďte a, b, c kružnice nad průměry AS, BS, CS. Na kratším oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC leží bod X a označme t_a, t_b, t_c délky tečen z X ke kružnicím a, b, c. Dokaž, že $t_a = t_b + t_c$.

Řešení. Uvažme X jako pohyblivý bod, poté je výraz $t_b + t_c - t_a$ s orientovanými délkami tečen vlna, přičemž znaménka zvolíme tak, aby byly t_a, t_b, t_c kladné na kratším oblouku BC. Ve zvláštním bodě $X = B$ platí $t_b = 0$ a ze symetrie $t_a = t_c$, tedy že je vlna nulová. Obdobně je nulová v $X = C$, takže je nulová všude a pro bod X na kratším oblouku BC z toho plyne $t_a = t_b + t_c$.

Úloha 88. Dvě kružnice mají vnější dotek. Jedna v sobě má vepsaný rovnostranný trojúhelník, který nemá vrchol v bodě doteku kružnic. Z každého vrcholu trojúhelníka vedeme tečnu k druhé kružnici. Dokaž, že je délka jedné výsledné tečny rovna součtu délek zbylých dvou tečen. (Estonské výběrko 1994)

Co se délky tečny z pohyblivého bodu X k pevné kružnici ℓ týče, zjevně nezáleží na tom, jestli bude kroužit bod X a ℓ zůstane na místě nebo jestli bude kroužit ℓ a X zůstane na místě. Stejně jako jsme definovali pohyblivý bod, definujeme pohyblivou kružnici. Předchozí tvrzení můžeme formulovat tak, že je délka tečny od pohyblivé kružnice k pevnému bodu na k vlna.

Definice 89. Na kružnici k leží pohyblivý bod T. *Pohyblivá kružnice na k* je kružnice s pevným poloměrem, která se dotýká (z pevné strany) k v bodě T.

Všimni si, že mnoho předchozích úloh šlo formulovat nejenom pomocí pohyblivých bodů, ale ekvivalentně pomocí pohyblivých kružnic.

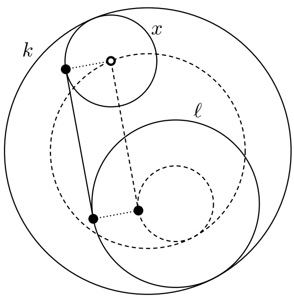
Úloha 90. (znovu) Kružnice k, ℓ se dotýkají zevně v bodě S. Přímka skrz S protne k znovu v bodě K a ℓ znovu v bodě L. Dokaž, že podíl délky tečny z K k ℓ a délky tečny z L ke k nezávisí na volbě přímky.

Úloha 91. Kružnice k, ℓ se dotýkají v bodě A, přičemž k neleží uvnitř ℓ. Na k leží bod B. Tečny z B ke kružnici ℓ se jí po řadě dotknou v bodech T_1, T_2 a protnou k znovu v bodech S_1, S_2. Nechť jsou R_1, R_2 takové body, že je T_1 střed R_1S_1 a T_2 střed R_2S_2. Dokaž, že se kružnice opsaná trojúhelníku BR_1R_2 dotýká kružnice ℓ.

Úloha 92. V trojúhelníku ABC je L průsečík symediánů[9] a ω kružnice opsaná. Kružnice a prochází bodem L a dotýká se ω v bodě A, analogicky definujeme kružnice b, c. Buď X bod na oblouku BC kružnice ω, který neobsahuje A, a t_a, t_b, t_c délky tečen z X ke kružnicím a, b, c. Dokaž, že $t_a = t_b + t_c$.

Úloha 93. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice a se dotýká strany BC v jejím středu a také kružnice opsané, přičemž leží mimo trojúhelník. Analogicky definujeme kružnice b, c. Buď X bod na kružnici opsané takový, že nejbližší vrchol k němu je A, a t_a, t_b, t_c délky tečen z X ke kružnicím a, b, c. Dokaž, že $t_a = t_b + t_c$.

Tvrzení 94. *Je dána kružnice k, pohyblivá kružnice x na ní a pevná kružnice ℓ, která se vnějškem dotýká k. Délka společné tečny kružnic x a ℓ (vnější tečny, pokud jsou na stejné straně kružnice k, jinak vnitřní) je se znaménkem vlna. Znaménko se mění, když se projdou body doteku.*



Důkaz. Pro účely důkazu považujme poloměr kružnice, pokud se dotýká k zevně, za záporný. Zmenšíme poloměry všech kružnic o poloměr x, středy zachováme. Poté tvoří stará a nová tečna protilehlé strany obdélníka, tedy jsou stejně dlouhé. Doteky se zachovají a z x se stane pohyblivý bod na kružnici soustředné s k (díky stejnolehlosti). Takto redukujeme tvrzení na tvrzení 86. □

[9] Definovaných jako v úloze 39. Ve třetím díle si ukážeme, že se všechny tři symediány protnou v každém trojúhelníku, zatím to považuj za daný fakt.

Pomocí právě dokázaného tvrzení formulujeme ještě silnější fakt, než že délka společné tečny pevné a pohyblivé kružnice je tečna. Trochu si započítáš, když jsi ale došel(došla) tak daleko, určitě Tě to nezastaví.

Cvičení 95. Kružnice k se v bodě A dotýkají kružnice a_1, a_2 a v bodě B kružnice b. Nechť t_i značí délku společné tečny kružnic a_i a b (vnější tečny, pokud jsou a_i a b_j na stejné straně kružnice k, jinak vnitřní). Dokaž, že podíl $\frac{t_1}{t_2}$ nezávisí na volbě kružnice b (bodu doteku ani poloměru).

Cvičení 96. V úlohách 92 a 93 dokaž, že mají kružnice a, b, c po dvou všechny vnější společné tečny stejně dlouhé.

Uveďme zobecnění Ptolemaiovy věty, Caseyho větu. Ověř si, že Ptolemailova věta je speciální případ, když položíme poloměry kružnic nulové. Důkaz je analogický důkazu Ptolemaiovy věty, pouze s pohyblivou kružnicí.

Úloha 97. (Caseyho věta) Kružnice k se dotýkají popořadě kružnice k_1, k_2, k_3, k_4. Nechť značí t_{ij} délku společné tečny kružnic k_i a k_j (vnější tečny, pokud jsou k_i a k_j na stejné straně kružnice k, jinak vnitřní). Dokaž, že $t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{41} = t_{13} \cdot t_{24}$.

Občas se hodí uvažovat jen některé kružnice s nulovým poloměrem. Caseyho věta je tak vhodná například na úlohu 93, zkus ji aplikovat. Sbírku vlastností vln teď završíme tou nejbizarnější.

Tvrzení 98. *Na kružnici k leží pohyblivý bod X a k má tečnu t. Odmocnina vzdálenosti bodu X od t je se znaménkem vlna. Znaménko se mění, když projde X bodem doteku.*

Důkaz. Položme si situaci do kartézské soustavy, kde k je jednotková kružnice, t je přímka $y = -1$ a $X = (\sin(2\varphi), \cos(2\varphi))$ je pohyblivý bod. Všimni si, že je tam opravdu 2φ, protože to je středový úhel a φ bereme z obvodu. Poté vzdálenost X od t je $1+\cos(2\varphi)$, chceme tedy ukázat, že odmocnina z tohoto výrazu (se znaménkem) je vlna. K tomu využijeme cvičení 31, podle kterého platí

$$1 + \cos(2\varphi) = \cos(\varphi - \varphi) + \cos(\varphi + \varphi) = 2\cos(\varphi)^2 . \qquad \square$$

Úloha 99. Je dán rovnostranný trojúhelník se stranami a, b, c. Kružnice vepsaná se dotýká b v bodě E a c v bodě F. Na jejím kratším oblouku EF leží bod X. Dokaž, že

$$\sqrt{|Xb|} + \sqrt{|Xc|} = \sqrt{|Xa|}.$$

Pokud Ti náš výběr úloh na vlny nestačil, můžeš si jednoduše vymyslet své. Můžeš si pro úlohy z úvodu sekce rovnání vln najít analogie s kružnicí vepsanou nebo studovat pohyblivé tečny. To už ponecháme Tvé představivosti.

Závěrem

Scházíme se u konce prvního dílu letošního seriálu. Již obratně umíme pracovat s kartézskými souřadnicemi, spočítat libovolné délky v trojúhelníku a na dovolené u moře jsme zjistili, že mnohé délky na kružnice jsou jenom vlny. Děkujeme Ti, že jsi se dočetl(a) až sem.

Pokud Ti cokoliv nebylo jasné, určitě se nás zeptej na mailu nebo v chatu. Rádi Ti pomůžeme. A neboj, nepotřebuješ mít propočítané každé cvičení a každou úlohu na to, abys vyřešil(a) nějakou tu soutěžní úlohu. Proto směle do řešení tří soutěžních úloh :)

V příštích dílech se podíváme na metody, které jsou na moderní olympiádní úlohy jako ušité – druhý díl seriálu nás zavede do Gaussovy roviny k výběhu komplexních čísel. Těšíme se na opětovné setkání tam. Do té doby Ti přejeme, ať se daří!

Návody k úlohám a cvičením

12. Doplň na čtverec (čtverce).

17. Body v rovině tvoří rovnoběžník, právě pokud mají úhlopříčky stejný střed.

21. Pravoúhlý trojúhelník.

23. Téměř to plyne z linearity mocnosti, akorát si musíš rozmyslet, proč není rozdíl mocností konstantní a proč je potom taková přímka kolmá na spojnici středů.

37. Použij sinovou větu pro pět trojúhelníků a vynásob spolu poměry.

39. Použij sinovou větu v trojúhelnících ABK a ACK. Alternativně pracuj s bodem M' na BC takovým, že $\sphericalangle KAB = \sphericalangle CAM'$.

42. Rozmysli si, že trojúhelníky ABC a BHC mají stejný poloměr kružnice opsané. Pak aplikuj rozšířenou sinovou větu.

43. Rovnost $|O_1B| = |O_2C|$ dokaž pomocí sinové věty a zbytek vyúhli.

44. Pro M střed HE použij sinovou větu v trojúhelnících AHM a EFM, stačí Ti dokázat rovnost úhlů. Využij své syntetické schopnosti.

45. Pracuj s koeficientem podobnosti trojúhelníků BDF a CDE. Použij sinovou větu.

46. Spočítej délky tečen z vrcholů ABC k jednotlivým kružnicím. Odečítej od obsahu celého $\triangle ABC$.

49. Vyjádři úhlopříčky z kosinové věty. Co splňují $\cos(\alpha)$ a $\cos(180^\circ - \alpha)$?

50. Napiš si vztahy pro zbylé dvě strany do rovnic, aby tam nefigurovala úhlopříčka. Zjednodušuj.

51. Vyjádři jeden úhel ze sinové i kosinové věty a dosaď do goniometrické jedničky. Vyjde to

$$\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} = \frac{abc}{\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}.$$

52. Použij Pythagorovu větu a kosinovou větu. Délky ID a IE jsou jen mlha.

55. Pomocí Stewartovy věty najdi kvadratickou rovnici pro $|DB|$ a ukaž, že tato rovnice má dvojnásobný kořen.

56. Zvol si dva body A, B v rovině a použij Stewartovu větu v trojúhelnících O_1AB a O_2AB.

72. Když rovnost pronásobíš jmenovateli a převedeš na jednu stranu, vyjde Ti vlna, kterou hledáš. $|AC|$, $|BC|$ jsou konstanty.

73. Tři body nech pevné a jedním hýbej.

76. Najdi, kde mají čitatel i jmenovatel nulu. Nezapomeň, že vzdálenosti mění znaménka.

77. Naproti maximu je nula.

78. Přeuspořádej výraz tak, aby měly vlny v jednom zlomku nulu na stejném místě. Pak najdi zvláštní body.

79. Domysli si rovnostranný trojúhelník a počítej jako v úvodním příkladu 57.

80. $KL = KS - LS$. Příslušné vlny mají stejnou nulu.

81. Do vlny zahrň všechny tři kružnice. Za zvláštní případy vezmi tečny.

82. Když znáš dva poměry, umíš už sestrojit nulovou lineární kombinaci.

85. Maximum nastává o 90° od nuly. Co znamená v praxi nula? Ostroúhlost pomůže s výběrem ze dvou možností.

91. Nejprve si definuj pohyblivou dotyčnou kružnici a pak dokazuj středy.

92. Dokaž úlohu ve speciálních bodech. Hledej v úloze chordály.

93. Na kružnici je toho hodně, potřebuješ správně vybrat, na co se nejdřív zaměřit. Pak teprv řeš zvláštní body.

95. Ukaž, že je poměr pevný, když se hýbe b. Za zvláštní případ vezmi, když jsou A, B naproti sobě a trochu si započítej. Pomůže Ti zmenšení jako v předchozím tvrzení.

96. Ve zvláštních případech bodu X použij předchozí tvrzení 95. Bod je kružnice s nulovým poloměrem.

Řešení cvičení

12. Rovnici „doplníme na čtverec", tedy přepíšeme do tvaru

$$\left(x - \frac{-c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{-d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - e\right) = 0.$$

Pokud je poslední závorka kladná, můžeme ji zapsat jako r^2 pro nějaké r a máme rovnici kružnice se středem $(-c/2, -d/2)$ a poloměrem r. Pokud je nulová, dostaneme kružnici s nulovým poloměrem, tedy bod (rovnice bude splněna jen v bodě $(-c/2, -d/2)$). Pokud je záporná, má být nulový součet dvou druhých mocnin a kladného čísla, což se nemůže stát, takže pak to určuje prázdnou množinu.

20. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ je druhá mocnina vzdálenosti bodu od středu. Takže se výraz rovná mocnosti z definice.

21. Označme bod doteku T a střed ω O. Trojúhelník OTP má u T pravý úhel. Takže z Pythagorovy věty $|TP|^2 = |OP|^2 - |OT|^2$, což je, jelikož je $|OT|$ poloměr, z definice mocnost bodu P ke kružnici ω. Máme tedy $|TP|^2 = \rho(P, \omega)$, odmocnění dostaneme $|TP| = \sqrt{\rho(P, \omega)}$.

23. Dá se to dokázat z linearity mocnosti tak, že si uvědomíme, že (například) v průsečících spojnice středů s jednou kružnicí je rozdíl mocností různý, takže není konstantní. Z toho plyne, že množina bodů, kde je rozdíl nulový, je přímka (a ne prázdná množina nebo celá rovina). Když úlohu vyzrcadlíme podle spojnice středů, nezmění se, z této symetrie musí být tato přímka na spojnici kolmá.

Alternativně se to dá přímo dopočítat. Označme O_1, O_2 středy kružnic ω_1 a ω_2 a zaveďme souřadnou soustavu tak, že $O_1 = (0, 0)$ a $O_2 = (0, 1)$. V této souřadné soustavě mají tyto kružnice poloměry po řadě r_1, r_2.

Dokazujeme tvrzení ohledně rozdílu mocností, proto rovnice získané ve cvičení 20 od sebe odečteme:

$$\rho(P, \omega_1) - \rho(P, \omega_2) = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 - r_1^2 - (x - 0)^2 - (y - 1)^2 + r_2^2,$$
$$\rho(P, \omega_1) - \rho(P, \omega_2) = 2y + r_2^2 - 1 - r_1^2.$$

Množina bodů, kde je tato funkce konstantní, je tvaru $y = C$, tedy přímky kolmé na osu y.

31. Použijeme součtové vzorce pro kosinus, to nám díky vlastnostem z předchozího tvrzení dává

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Podobně získáme $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

48. Položme trojúhelník ABC do kartézské soustavy souřadnic tak, že $A = (0, 0)$, B leží na kladné poloose x a strana b má délku 1. Tedy $B = (c, 0)$ a $C = (u, v)$ tak, že $u^2 + v^2 = 1$.

Pak $\cos(\alpha) = u$. Snadno spočítáme

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = u^2 + v^2 + c^2 - 2\sqrt{u^2 + v^2} \cdot c \cdot u = u^2 + v^2 + c^2 - 2cu = (c - u)^2 + v^2 = a^2.$$

49. Označme vrcholy rovnoběžníka A, B, C, D, délky stran $a = |AB| = |CD|$ a $b = |BC| = |DA|$, úhlopříčky $e = |AC|$ a $f = |BD|$ a úhel $\alpha = |\sphericalangle DAB|$. Víme, že $|\sphericalangle ABC| = 180° - \alpha$. Kosinové věty v trojúhelnících DAB a ABC nám dají

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha),$$
$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha).$$

Víme, že $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$, takže součtem rovností získáme

$$e^2 + f^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2,$$

což jsme měli dokázat.

51. Sinová věta nám říká, že platí $\sin\alpha = \frac{2a}{r}$ a kosinová věta tvrdí $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Tyto dva vztahy dosadíme do goniometrické jedničky:

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{2a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2.$$

Z tohoto vztahu vyjádříme r a vyjde dokazovaný tvar.

56. Označme O_1, O_2 a r_1, r_2 po řadě poloměry kružnic ω_1 a ω_2. Dále uvažme dva body A, B tak, že $AB = 1$ a na přímce AB bod C tak, že $CB = k$. Podle Stewartovy věty platí

$$k(1-k) + |O_1C|^2 = k|AO_1|^2 + (1-k)|BO_1|^2.$$

Obou stran odečteme $r_1^2 = kr_1^2 + (1-k)r_1^2$ a získáme pro mocnosti vztah

$$k(1-k) + |O_1C|^2 - r_1^2 = k(|AO_1|^2 - r_1^2) + (1-k)(|BO_1|^2 - r_1^2),$$

což přepíšeme pomocí mocností příslušných bodů na

$$k(1-k) + \rho(C,\omega_1) = k\rho(A,\omega_1) + (1-k)\rho(B,\omega_1).$$

Analogický vztah napíšeme pro kružnici ω_2:

$$k(1-k) + \rho(C,\omega_2) = k\rho(A,\omega_2) + (1-k)\rho(B,\omega_2).$$

Rozdílem těchto dvou rovnic získáme

$$\rho(C,\omega_1) - \rho(C,\omega_2) = k(\rho(A,\omega_1) - \rho(A,\omega_2)) + (1-k)(\rho(B,\omega_1) - \rho(B,\omega_2)).$$

Jinak řečeno, $f(C) = kf(A) + (1-k)f(B)$. To platí pro libovolné body A, B, C na přímce, proto je f lineární.

77. Jelikož je p konstanta, je $p \cdot XA + XB$ s pohyblivým bodem X vlna. Orientujeme vzdálenosti tak, aby v tom bodě X, kde je $p \cdot |XA| + |XB|$ nejvyšší, bylo XA i XB kladné. Pak má v tom bodě vlna $p \cdot XA + XB$ největší hodnotu a přímo naproti, v bodě Y, je tudíž nulová. Dostáváme tak $p \cdot YA + YB = 0$. Aby byl součet nulový, musí být jeden člen kladný a druhý stejně velký a záporný, platí tak v absolutních hodnotách $p \cdot |YA| = |YB|$.

95. Představme si, že je B pohyblivý bod a b je tedy pohyblivá kružnice s (prozatím) pevným poloměrem. Poměr délek tečen je konstantní, protože obě vlny mají nulu při $B = A$. Nezávisí tak na bodu doteku a stačí se zaměřit na jednu polohu bodu B (kromě $B = A$) a měnit poloměr kružnice b. Uvažme tedy B přímo naproti A.

Označme r_1, r_2, s poloměry kružnic a_1, a_2, b a r poloměr k. Stejně jako v předchozím tvrzení považujme poloměr kružnice, pokud se dotýká k zevně, za záporný. Také analogicky uvážíme všechny kružnice zmenšené o s, už víme, že délky tečen se nezmění. Označme tyto kružnice po řadě k', a_1', a_2', b'. Kružnice b' je pak jediný bod, takže můžeme počítat délku tečny pomocí mocnosti:

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{\rho(b',a_1')}{\rho(b',a_2')}} = \sqrt{\frac{(2(r-s)-(r_1-s))^2-(r_1-s)^2}{(2(r-s)-(r_2-s))^2-(r_2-s)^2}} = \sqrt{\frac{4(r-s)(r-r_1)}{4(r-s)(r-r_2)}} = \sqrt{\frac{r-r_1}{r-r_2}}.$$

Hledaný poměr tedy nezávisí ani na poloměru kružnice b.

96. Označme t_{xy} délku společné tečny kružnic x a y. Uvažme bod X v bodě doteku kružnice b s kružnici opsanou. V tomto případě je $t_b = 0$, takže platí $t_a = t_c$, jak jsme ve cvičení dokázali. Podle cvičení 95 platí

$$\frac{t_{ba}}{t_a} = \frac{t_{bc}}{t_c},$$

kde X považujeme za kružnici s nulovým poloměrem. Získáme tak $t_{ba} = t_{bc}$. Analogicky, je-li X v bodě doteku c, získáme $t_{ca} = t_{cb}$. Tím máme hotovo.

Analytická geometrie II – $\mathbb{K}$omplexní výrazy

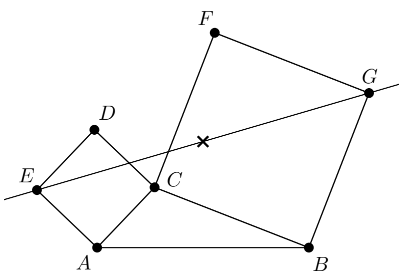
Milý příteli,

nastává ten čas, kdy se naučíš kouzla, o kterých jsi snad slyšel(a) vyprávět zkušené řešitele! Poznáš techniku, kterou opravovatelé nevidí rádi, ale nakonec za ni stejně musí dát plný počet bodů, protože… funguje! Minule jsme tu vydatně prozkoumali goniometrické funkce. Nyní navážeme na základy z minulého dílu, ale vydáme se jinou cestou. Tentokrát se totiž podíváme zblízka na komplexní čísla a jejich využití v počítání olympiádní geometrie.

Možná sis všiml(a), že počítání v kartézských souřadnicích může být neuvěřitelně otravné. Nejenže musíš všechno psát pro každou souřadnici zvlášť, ale jakmile dojde na délky nebo nedejbože úhly, vyjdou výrazy příšerně dlouhé, pokud vůbec vyjádřit jdou. Komplexní čísla jsou jako kartézské souřadnice, jenom vylepšené.

Naučíme se, jak vnímat mnohá geometrická zobrazení pomocí komplexních čísel. Speciálně, že otáčení, překlápění a vůbec obecná spirální podobnost jsou v řeči komplexních čísel asi tak přirozené jako přirozená čísla. Představu Ti vytvoří následující motivační úložka:

Příklad 1. (motivační) V rovině uvažme úsečku AB. Pro libovolný bod C na dané polorovině určené přímkou AB zkonstruujme vně trojúhelníka ABC čtverce $ACDE$ a $BCFG$. Ukažte, že všechny přímky EG prochází pevným bodem.



Ač může zadání vypadat neuchopitelně, pomocí komplexních čísel si s takovým příkladem hravě poradíme. Propojení komplexních čísel a zobrazení nás pak povede na cestu poznání. Na konci tohoto dílu snadno poznáš, kdy libovolné čtyři body tvoří rovnoběžník, kdy leží na kružnici, kdy nějaké tři body leží na přímce… Tím to ale ani zdaleka nekončí!

Samozřejmě, mluvíme zde o komplexních číslech z toho důvodu, že jsou vhodná na řešení olympiádních úloh. Předvedeme si proto mocný nástroj, jednotkovou kružnici, před kterou kdejaká úloha dostane třes do kolen. Ke konci dílu tuto kružnici prozkoumáme ještě více a povíme si, jak pracovat v komplexní rovině s pravidelnými mnohoúhelníky.

Varování

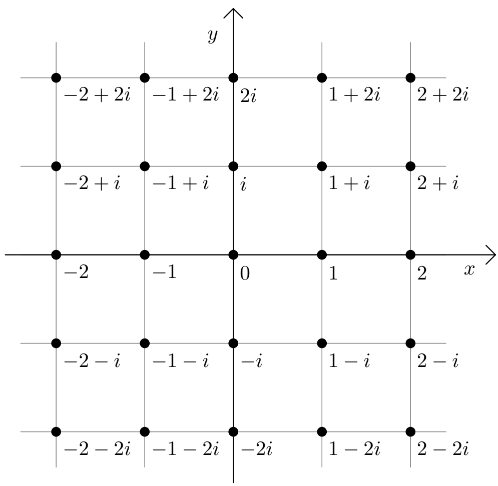
Na začátku minulého seriálu jsme Tě varovali před nástrahami počítání. Všechna varování zde platí na desetkrát! I ze zkušenosti autorů, správně na soutěži předvést řešení pomocí komplexních čísel stojí na několika důležitých pilířích.

(1) Úloha jde spočítat pomocí komplexních čísel. Jak něco takového poznat? Počítat mnoho a mnoho úloh – poté už získáš odhad. Jak uvidíš, úlohy s jednou centrální kružnicí jsou na ráně.
(2) Znám dobře všechna tvrzení a dokážu je obhájit. Tady není moc co vysvětlovat. Než se odvážíš řešit úlohu pomocí komplexních čísel, buď připraven(a) obhájit všechna tvrzení, která využíváš. Speciálně doporučujeme se odkázat na zdroj, nebo v řešení potřebná tvrzení dokázat.
(3) Mám na řešení čas. Soutěž je intenzivní záležitost – často míváš 4,5 hodiny na tři úlohy. Před tím, než se vydáš hodinu počítat příklad, radši si rozmysli, že to bude zvládnutelné. Přepisovat výrazy dlouhé celý řádek přece jenom zabere trochu času.

Přečetl(a) sis tento seznam? Výborně, konec řečí, jdeme na to! Znáš-li komplexní čísla, nebude pro Tebe, věříme, těžké úvod jen přeletět.

Komplexní rovina

Připomeňme si kartézskou soustavu souřadnic, kde každému bodu roviny přiřadíme souřadnice (a, b). Komplexní rovinu definujeme ze začátku úplně stejně, pouze ji zapisujeme jinak. Řekneme, že bodu (a, b) přísluší komplexní číslo $z = a + b \cdot i$, kde i je *imaginární jednotka*. Imaginární jednotka pro nás prozatím nemusí nic znamenat, jenom to, že koeficient u ní je souřadnice y. Číslo a nazýváme *reálnou složkou* a číslo b *imaginární složkou* čísla z. Zatím jen přejmenováváme, dříve bychom a nazvali x-ovou souřadnicí a b y-ovou.



Osu x můžeme nyní nazývat *reálnou osou*, protože na ní leží reálná čísla, a osu y *imaginární osou*, protože na ní leží takzvaná *ryze imaginární čísla*, tedy čísla, která mají nulovou reálnou složku. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$.

Úmluva 2. Domluvme se, že pokud není řečeno jinak, tak bodu označenému velkým písmenem (např. A) v komplexní rovině přísluší komplexní číslo, které budeme značit stejným malým písmenem (např. a). Pozor ale, když komplexní číslo rozepíšeme jako $a + bi$, tak reálná čísla a, b body nejsou.

Sčítání a odčítání komplexních čísel definujeme přirozeně, jako by i byla proměnná: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. Stejně tak násobení nebo dělení reálným číslem: $k(a + bi) = ka + kbi$. Když se díváme na tyto operace komplexních čísel, reálná a imaginární složka spolu nijak nemluví – operace provádíme po složkách. Děláme tak totéž, co bychom mohli snadno dělat v kartézských souřadnicích, jenom si ušetříme psaní operace pro každou složku.

Příklad 3. Rozmysleme si, že sčítání komplexních čísel a násobení reálným číslem mají následující hezké vlastnosti:

(1) Střed úsečky AB je $\frac{a+b}{2}$.
(2) Překlopení bodu B podle bodu A je $2a - b$.
(3) Body $ABCD$ tvoří rovnoběžník, právě pokud platí $a + c = b + d$.
(4) Těžišti trojúhelníka ABC přísluší komplexní číslo $\frac{a+b+c}{3}$.
(5) Zobrazení $z \mapsto z + c$ dané přičtením pevného čísla $c \in \mathbb{C}$ je posunutí v rovině.
(6) Zobrazení $z \mapsto kz$ dané vynásobením pevným číslem $k \in \mathbb{R}$ je stejnolehlost v rovině se středem v počátku a koeficientem k.

První vlastnost je jasná z naší definice sčítání – komplexním číslům $a + bi$ a $c + di$ přísluší v kartézské rovině body (a, b) a (c, d). Střed těchto dvou bodů je určen jako $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$, přísluší mu tedy komplexní číslo $\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}i$. Druhá vlastnost plyne z té první, nyní je A střed úsečky BC, tj. $a = \frac{b+c}{2}$, z čehož získáme $c = 2a - b$. Rozmysleme si, že třetí vlastnost je též důsledkem té první – kdy tvoří čtyřúhelník $ABCD$ rovnoběžník? Právě tehdy, když středy úhlopříček AC a BD splývají, tj. $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$. Číslo příslušící těžišti bude intuitivně příslušné průměru komplexních čísel a, b, c, proč přesně to platí si ukážeme za pár stran.

Zbylé dva body jsou neméně důležité, ale věříme, že si je zvládneš rozmyslet sám/sama. Pomoct Ti může obrázek výše.

Oproti kartézským souřadnicím mají komplexní čísla jednu zásadní výhodu, můžeme je násobit! Tady konečně dodáme „význam“ imaginární jednotce, když si zavedeme, že $i^2 = -1$ a že násobit můžeme roznásobením:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Pokud jsi komplexní čísla ještě neviděl(a) a trápí Tě, jak můžeme jen tak říct něco jako $i^2 = -1$, zkus si rozmyslet, že za této definice platí všechny rozumné vlastnosti násobení známé z reálných čísel jako $a(bc) = (ab)c$, $a(b+c) = ab+ac$, a že tedy s komplexními čísly můžeme normálně počítat. Brzo uvidíš, proč to dává smysl dělat takhle.

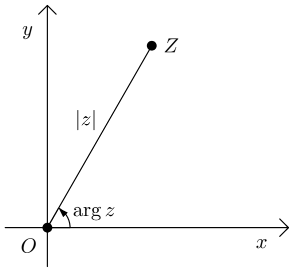
V tomto díle totiž budeme studovat hlavně geometrické vlastnosti, které násobení přináší. Máme třeba komplexní číslo z a uvážíme zobrazení $x \mapsto zx$, tedy zobrazení, které libovolnému bodu X v rovině přiřadí bod X' takový, že $x' = z \cdot x$. Jaké je to zobrazení? Víme už, že je-li z reálné číslo, je to stejnolehlost. Co ale obecně?

Absolutní hodnota a argument

Každý bod na kružnici $x^2 + y^2 = r^2$ (se středem v počátku a poloměrem r) můžeme zapsat ve tvaru $(r \cos\alpha, r \sin\alpha)$. Pro komplexní číslo $z = a + bi$ tedy uvážíme vzdálenost bodu (a, b) v kartézské rovině od počátku soustavy souřadnic a nazveme ji *absolutní hodnotou* čísla z, značíme $|z|$. Můžeme jej tak zapsat v *goniometrickém tvaru* $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, kde úhel α nazýváme *argumentem* čísla z a značíme $\arg z$. Úhel α je určen jednoznačně až na přičtení násobku $360°$, což nám vadit nebude. Můžeme tedy psát

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)).$$

Pokud víš o polárních souřadnicích, není tohle nic jiného než zápis komplexního čísla v polárních souřadnicích.



Pozorování 4. *Je-li $z = a + bi$, pak $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Cvičení 5. Je-li O počátek soustavy souřadnic a Z libovolný jiný bod, je argument čísla z roven orientovanému úhlu $\sphericalangle(\text{osa } x, \overrightarrow{OZ})$.

Tvrzení 6. *Pro komplexní čísla w, z platí $|wz| = |w| \cdot |z|$ a $\arg(wz) = \arg w + \arg z$.*

Důkaz. Zapíšeme si čísla v goniometrickém tvaru,

$$w = |w|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \qquad \text{a} \qquad z = |z|(\cos(\beta) + i\sin(\beta)),$$

kde $\alpha = \arg w$ a $\beta = \arg z$. Součin wz podle těchto vzorců roznásobíme

$$wz = |w| \cdot |z|(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)).$$

Podle součtových vzorců, které jsme viděli v prvním díle, dostáváme

$$wz = |w| \cdot |z|(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)).$$

Ovšem zapíšeme-li wz taky v goniometrickém tvaru jako

$$wz = |wz| \cdot (\cos(\arg(wz)) + i\sin(\arg(wz)),$$

vidíme, že můžeme hodnoty ztotožnit. Čili $|wz| = |w| \cdot |z|$ a $\arg wz = \alpha + \beta = \arg w + \arg z$. □

Co se stane, když odečteš dva body $a + bi$ a $c + di$ a podíváš se na absolutní hodnotu jejich rozdílu? Díváme se na absolutní hodnotu komplexního čísla $(a - c) + (b - d)i$, což je rovno $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$, tedy podle Pythagorovy věty přesně vzdálenosti bodů (a, c) a (b, d) v kartézské soustavě souřadnic. Získáme tak užitečné pozorování ohledně vzdáleností.

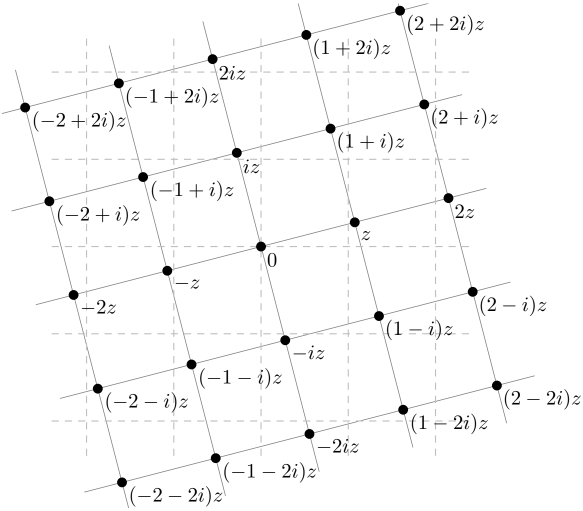
Pozorování 7. *Vzdálenost bodů A a B v komplexní rovině je rovna $|a - b|$.*

Cvičení 8. Rozmysli si, jak bys v komplexní rovině zakreslil(a) všechna čísla s absolutní hodnotou 1. Z toho si zkus odvodit obecný tvar kružnice v komplexní rovině.

Pozorování 9. *Zobrazení $x \mapsto zx$ dané vynásobením čísla s pevným $z \in \mathbb{C}$ je spirální podobnost*[1] *se středem v počátku, která otáčí o úhel $\arg z$ a stejnolehlí s koeficientem $|z|$.*

[1] složení stejnolehlosti a otočení

Důkaz. Víme, že zx má $|z|$-krát větší absolutní hodnotu než x, čili je doopravdy z-krát dál od počátku. Argument má větší o $\arg z$, takže svírá s osou x o $\arg z$ větší úhel, čili je oproti x opravdu otočený o $\arg z$. □



To je pěkná vlastnost, že? Právě kvůli tomu jsme si zavedli násobení komplexních čísel.

Cvičení 10. Najdi komplexní číslo z takové, že násobení číslem z provádí v rovině

(1) středovou souměrnost,
(2) otočení o 90° proti směru, respektive po směru, hodinových ručiček,
(3) otočení o 120° proti směru hodinových ručiček.

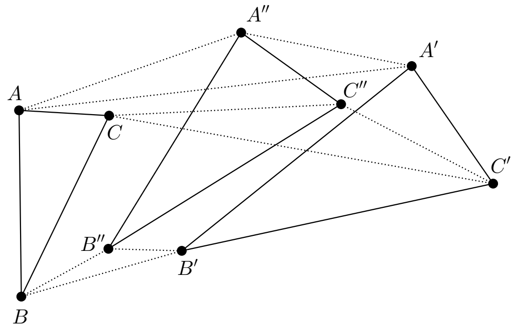
Jsou-li trojúhelníky ABC a DEF přímo podobné, pojďme si rozmyslet, jak najít podobnost, která je na sebe převádí. Nejprve $\triangle ABC$ zvětšíme, aby byl shodný s DEF. Pak ho otočíme, aby byly trojúhelníky stejně orientované. Nyní už získáme dva stejně velké a stejně orientované trojúhelníky, čili existuje posunutí, které transformovaný trojúhelník ABC převádí na DEF. Takto je možné libovolnou přímou podobnost složit ze spirální podobnosti a posunutí. V řeči komplexních čísel to znamená, že každá podobnost se dá vyjádřit zobrazením $x \mapsto zx + k$ pro nějaká $z, k \in \mathbb{C}$. V našem případě by platilo $d = za + k, e = zb + k, f = zc + k$.

Cvičení 11. (Střed spirální podobnosti) Nechť jsou AB, CD dvě úsečky, které na sebe nejde dostat pouze posunutím. Dokaž, že existuje bod M takový, že $\triangle ABM \sim \triangle CDM$.

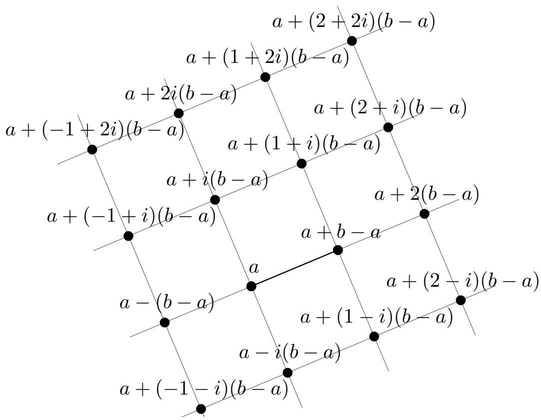
Když máme dva podobné útvary, vždy můžeme najít bod, který bude středem spirální podobnosti převádějící tyto útvary na sebe. Pokud s nějakou takovou podobností pracujeme, může se hodit položit si střed spirální podobnosti do bodu 0. V takovém případě daná spirální podobnost bude jen násobení číslem z.

Cvičení 12. (Spirálka chodí po dvou) Nechť se body X, Y zobrazí spirální podobností se středem S na body X', Y' (tj. trojúhelníky XYS a $X'Y'S$ jsou si podobné). Pak existuje spirální podobnost se středem S, která zobrazí X na Y a X' na Y'.

Úloha 13. (Klouzání) V této úloze uvažujme jen přímé podobnosti. Nechť platí $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Sestrojme body A'', B'', C'' tak, aby platilo $\triangle AA'A'' \sim \triangle BB'B'' \sim \triangle CC'C''$. Tyto trojúhelníky můžou být i degenerované, například může být bod A'' střed úsečky AA' a podobně B'', C''. Potom platí dokonce $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$.



Cvičení 14. Jaký vzorec má střed čtverce nad úsečkou AB? Co střed rovnostranného trojúhelníka nad úsečkou AB?

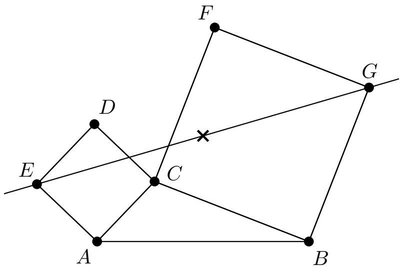


Úvodní příklad v sobě skrývá hned dva čtverce, což Ti určitě napovídá, že jsme jej neuvedli pro nic za nic. Pojďme se mu spolu podívat na zub.

Příklad 15. (znovu) V rovině uvažme úsečku AB. Pro libovolný bod C na dané polorovině určené přímkou AB zkonstruujme vně trojúhelníka ABC čtverce $ACDE$ a $BCFG$. Ukažte, že všechny přímky EG prochází pevným bodem.

Nejprve se zamysleme, o jaký bod by se mohlo jednat. Tvrzení nám něco říká o všech možných přímkách, z nichž si můžeme pár vybrat a podívat se, kterým bodem všechny prochází. Pokud překlopíme C podle osy úsečky AB, překlopí se celý obrázek i výsledná přímka EG. Průsečík dvou překlopených přímek musí být na ose úsečky AB, tam by tedy měl být průsečík všech.

Pokud dále zvolíme bod C na ose úsečky AB tak, že je ABC pravoúhlý trojúhelník, pak přímka EG prochází touto volbou bodu C, musí to proto být hledaný bod.



Řešení. Nyní už máme intuici, který bod hledáme. Přesuňme se do komplexní roviny a položme $a = -1$, $b = 1$ a volme body c z poloroviny, kde všechny body mají kladnou imaginární složku. Polorovina ve skutečnosti není omezující, jen nám udává, kterým směrem jsou čtverce vně. Chceme pak ukázat, že všechny přímky eg procházejí bodem i.

Tak jako ve cvičení 14 si zjistíme souřadnice relevantních vrcholů čtverce (jsou ostatně vidět z obrázku u cvičení). Máme tak

$$e = a + i(c - a) = -1 + i(c + 1) = ic - 1 + i,$$
$$g = c + (1 + i)(b - c) = c + (1 + i)(1 - c) = -ic + 1 + i.$$

Když se ale podíváš na čísla e a g, tak se dokonce zdá, že střed úsečky EG bude roven i. A opravdu

$$\frac{e + g}{2} = \frac{ic - 1 + i - ic + 1 + i}{2} = i.$$

Máme hotovo.

Úloha 16. V rovině uvažme úsečku AB. Pro libovolný bod C v dané polorovině určené přímkou AB zkonstruujme vně trojúhelníka ABC čtverce $ACDE$ a $BCFG$. Dále sestrojme takový bod K, že je $GCDK$ rovnoběžník. Ukažte, že poloha bodu K nezávisí na poloze bodu C.

Úloha 17. Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Nad stranami AB, CD sestrojíme čtverce, jejich středy označíme K, M. Pod stranami BC, DA sestrojíme čtverce, jejich středy označíme L, N. Dokaž, že je $KLMN$ rovnoběžník.

Vraťme se k algebraickým vlastnostem komplexních čísel. Reálná čísla dělíme snadno, jak ale podělíme komplexní číslo číslem komplexním? Pomocí goniometrického tvaru bychom mohli komplexní čísla dělit tak, že bychom podělili absolutní hodnoty a odečetli argumenty. Při praktickém počítání si komplexní čísla (většinou) explicitně nerozepisujeme, ať už do tvaru kartézského $z = a + bi$ nebo goniometrického $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$ – ty využíváme jen k důkazům tvrzení. Podíváme se na jednu užitečnou konstrukci, která nám pomůže se těmto tvarům vyhnout.

Sdružení

Definice 18. Komplexnímu číslu $z = a + bi$ definujeme *sdružené číslo* $\overline{z} = a - bi$.

Snadno nahlédneme[2], že operace „sdružení komplexního čísla“ vyjadřuje geometricky překlopení přes reálnou osu. Podobně samozřejmé je i to, že platí $\overline{\overline{z}} = z$.

Ovšem z a $\overline{z}$ mají i jiný vztah. Jejich součin není nic jiného, než $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$. Shrňme tato pozorování.

Tvrzení 19. *Pro každé komplexní číslo z platí $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.*

[2]například na úvodním obrázku komplexní roviny

Cvičení 20. Pro která komplexní čísla platí $\overline{z} = z$? A co $\overline{z} = -z$?

Cvičení 21. Rozmysli si, že všechny nepřímé podobnosti v rovině jsou tvaru $x \mapsto z\overline{x} + k$ pro nějaká $z, k \in \mathbb{C}$. Speciálně toho tvaru jsou všechny osové souměrnosti.

Uveďme si ještě pár základních vlastností této operace. Neboj, nečeká nás nic složitého. Jak jsme už nastínili, můžeme pomocí ní snáze dělit komplexní čísla.

Cvičení 22. Rozmysli si, že $a/b = a\overline{b}/|b|^2$. Jelikož je $|b|^2$ reálné číslo, je na rozdíl od b snadné jím dělit. Čemu je rovno $(8+i)/(2-3i)$?

Cvičení 23. Absolutní hodnota a argument se kamarádí s násobením – tím pádem i s dělením. Dokaž, že platí $|w/z| = |w|/|z|$ a $\arg(w/z) = \arg w - \arg z$ pro libovolná w, $z \in \mathbb{C}$, z nenulové.

Úloha 24. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Nad úsečkami BT a CT jsou sestrojeny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky BTK a CTL. Označme D a E středy úseček BC a KL. Urči hodnotu poměru $|AT| : |DE|$. (Domácí kolo MO 2023)

V praxi je dobré si uvědomit, že sdružení „zachovává“ operace jako sčítání a násobení:

Cvičení 25. Ukaž, že pro komplexní čísla a, b platí

(1) $\overline{(a+b)} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{(a-b)} = \overline{a} - \overline{b}$,
(2) $\overline{(ab)} = \overline{a} \cdot \overline{b}$,
(3) $\overline{(a/b)} = \overline{a}/\overline{b}$.

Jediná vlastnost čísla i, kterou jsme zatím použili[3], je, že $i^2 = -1$. Ovšem číslo $(-i)$ má tuhle vlastnost taky. Takže kdybychom všude místo i psali $(-i)$, mělo by počítání pořád fungovat, ne? Z tohoto pozorování plyne hned celé předchozí cvičení.

Příklad 26. Pojďme si rozmyslet, jak počítat sdružená čísla „komplexnějších“ výrazů. Spočítejme sdružené číslo výrazu $\frac{abc}{(a+b)(b-c)(c-a)}$ za předpokladu, že platí $|a| = |b| = |c| = 1$.

Řešení. Pokud platí $|a| = |b| = |c| = 1$, tak $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$, tedy $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$. Upravujme postupně podle předchozího cvičení 25. Nejprve platí

$$\overline{\left(\frac{abc}{(a+b)(b-c)(c-a)}\right)} = \frac{\overline{(abc)}}{\overline{(a+b)(b-c)(c-a)}}$$

podle bodu (3). To můžeme dále upravit na

$$\frac{\overline{(abc)}}{\overline{(a+b)(b-c)(c-a)}} = \frac{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}{\overline{(a+b)} \cdot \overline{(b-c)} \cdot \overline{(c-a)}}$$

podle bodu (2). Konečně

$$\frac{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}{\overline{(a+b)} \cdot \overline{(b-c)} \cdot \overline{(c-a)}} = \frac{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}{(\overline{a}+\overline{b})(\overline{b}-\overline{c})(\overline{c}-\overline{a})}$$

podle bodu (1). Teď by Ti mělo být jasné, že běžné aritmetické výrazy sdružíme tak, že sdružíme všechna písmenka, a nemusíme to už v budoucnu takhle pitvat. Proto můžeme přejít ke druhé části, dosadit a rozšířit celý zlomek číslem $a^2b^2c^2$:

$$\frac{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)} = \frac{abc}{ab\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \cdot bc\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right) \cdot ca\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)} = \frac{abc}{(b+a)(c-b)(a-c)}.$$

Získali jsme zlomek rovný původnímu výrazu. Co znamená, když se číslo rovná sdruženému číslu? Že je reálné. Takže pokud platí $|a| = |b| = |c| = 1$, pak je $\frac{abc}{(a+b)(b-c)(c-a)}$ reálné číslo.

Úloha 27. Komplexní čísla a, b, c splňují $|a| = |b| = |c| = 1$. Dokaž, že číslo $z = \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$ též splňuje $|z| = 1$.

[3]Kromě polohy v rovině, teď mluvíme o matematických vlastnostech.

Tři body na přímce, čtyři body na kružnici.

Už ses naučil(a), jak pomocí spirální podobnosti spočítat komplexní číslo bodu v nějaké hezké konfiguraci, například ve středu čtverce nad úsečkou. Co když ale nějakou konfiguraci bodů chceme v úloze dokázat? Pak můžeme provést stejnou spirální podobnost, ale pozpátku.

Věta 28. *Tři body A, B, C leží na přímce, právě pokud platí*

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Pro výpočetní účely bychom chtěli pracovat s „hezčí formou" bodů A, B a C. Posunutí ani spirální podobnost tří bodů samozřejmě nezmění, jestli body leží na jedné přímce. Víme, že posunutí v rovině je přičtení pevného čísla, přičteme tedy $-a$, čímž přesuneme a do 0. Tudíž tři čísla a, b a c leží na přímce, právě když na přímce leží čísla $a-a=0$, $b-a$ a $c-a$.

Víme taky, že násobení pevným číslem je spirální podobnost, vynásobíme tedy všechna čísla $\frac{1}{b-a}$, čímž druhé číslo zjednodušíme. Poté čísla 0, $b-a$, $c-a$ leží na přímce, právě když leží na přímce $\frac{0}{b-a}=0$, $\frac{b-a}{b-a}=1$, $\frac{c-a}{b-a}$. Body 0 a 1 ovšem leží na reálné ose, čili toto je splněno, právě když leží zlomek $\frac{c-a}{b-a}$ na reálné ose a důkaz je hotový.

Ukažme ještě druhý důkaz, elementárnější úvahou. Dvě čísla $b-a$ a $c-a$ leží na přímce s počátkem, právě když se na sebe dají přesunout stejnolehlostí se středem v počátku, tedy $b-a=k(c-a)$ pro $k \in \mathbb{R}$, neboli $\frac{b-a}{c-a}=k \in \mathbb{R}$. □

Všimni si, že v této větě nezáleží, v jakém pořadí body vezmeš, stačí vydělit dva rozdíly. Právě jsme dokázali jeden ze základních kamenů při práci s komplexními čísly. Dokonce můžeme o zkoumaném podílu vydolovat obecnější informaci, totiž úhel, který svírají tři komplexní čísla. K tomu zapřáhneme vlastnosti argumentu, které jsme mohli využít i v důkazu věty, jak si můžeš rozmyslet.

Lemma 29. *Pro libovolná komplexní čísla a, b, c platí* $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \sphericalangle BAC$.

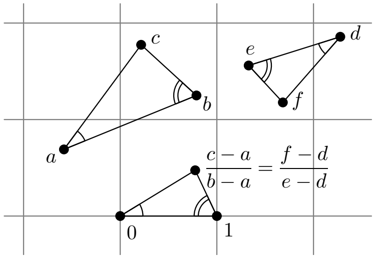
Důkaz. Stačí využít cvičení 23 a zacvičit s definicí argumentu:

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a)-\arg(b-a) = \sphericalangle(\text{reálná osa}, \overrightarrow{AC}) - \sphericalangle(\text{reálná osa}, \overrightarrow{AB}) = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}). \quad \square$$

Úloha 30. Jak v komplexních číslech poznat, že jsou přímky AB a CD rovnoběžné?

Úloha 31. Využij důkaz věty 28 a dokaž, že dva trojúhelníky ABC a DEF jsou si přímo podobné právě tehdy, když platí

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{f-d}{e-d}.$$



Cvičení 32. Rozmysli si, jak ověřit, že je trojúhelník ABC rovnostranný nebo že je čtyřúhelník $ABCD$ čtverec.

Cvičení 33. Jak v komplexních číslech poznat, že jsou trojúhelníky ABC a DEF podobné nepřímo?

Cvičení 34. Jaký je vzorec překlopení bodu Z v osové souměrnosti podle přímky AB? A co paty výšky ze Z na AB?

Obdobně se podívejme na kolmice v rovině. I v tomto případě nám komplexní čísla dají jednoduchou podmínku, kdy jsou na sebe dvě přímky kolmé.

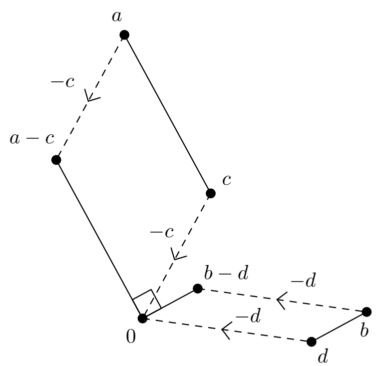
Věta 35. *Pro body A, B, C, D platí $AC \perp BD$, právě když*

$$\frac{a-c}{b-d} \in i\mathbb{R},$$

kde $i\mathbb{R}$ značí množinu čísel tvaru ki pro $k \in \mathbb{R}$, tedy ryze imaginárních čísel.

Důkaz. Důkaz povedeme v podobném duchu jako důkaz věty o bodech na jedné přímce – posuneme celou situaci k 0.

Posuňme body a a c na $a-c$ a 0 a body b a d na body $b-d$ a 0. Posunutí zachová rovnoběžnost příslušných úseček, proto můžeme podmínku $AC \perp BD$ ekvivalentně vnímat jako existenci pravoúhlého trojúhelníka s vrcholy 0, $a-c$, $b-d$ s pravým úhlem při 0.



Ale pozor! To, že máme pravý úhel u počátku, znamená, že jedno číslo můžeme získat pomocí nějaké spirální podobnosti z druhého – otočení o $\pm 90°$ a nějaká stejnolehlost. Otočení získáme násobením $\pm i$ a stejnolehlost poté násobením reálnou konstantou. Pro nějaké $k \in \mathbb{R}$ platí

$$a-c = (b-d)i \cdot k \iff \frac{a-c}{b-d} = i \cdot k \in i\mathbb{R}.$$

Pokud naopak platí, že $a-c$ a $b-d$ svírají s počátkem pravý úhel, pak jsou přímky AC a BD kolmé. $\square$

Cvičení 36. Rozhodni, které trojice bodů A, B, C leží na jedné přímce pro všechna x, y, $z \in \mathbb{C}$ a pro které platí $AB \perp BC$, pokud:

(1) $a = 1-i, b = -4+7i, c = 4-6i$
(2) $a = 3i-3, b = 1, c = 4+4i$
(3) $a = 2x+y, b = 2y+z, c = 4x-z$
(4) $a = x, b = \frac{y+z}{2}, c = \frac{x+y+z}{3}$.

Posledním bodem tohoto cvičení jsi dokázal(a), že těžiště trojúhelníka s vrcholy v bodech X, Y, Z je skutečně $\frac{x+y+z}{3}$, totiž že tento bod leží na jedné z těžnic. Ze zřejmé symetrie pak už leží na všech. Blahopřejeme! Můžeš to oslavit tím, že se s námi podíváš na kružnice. Obvodové úhly napovídají, že najdeme kritérium pro kružnice podobné dvěma právě získaným.

Věta 37. *Čtyři body A, B, C, D leží na kružnici, právě pokud platí*

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Podle lemmatu 29 vyjadřují čísla $\arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right)$, $\arg\left(\frac{a-d}{b-d}\right)$ orientované úhly $\sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle BDA$, pomocí nichž už umíme určit, kdy leží body na kružnici. Body A, B, C, D leží na kružnici, právě když

(1) buď leží C a D na stejném oblouku AB a tehdy platí $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$,
(2) nebo leží na opačných obloucích a tehdy platí $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ADB = 180°$, tedy v orientovaných úhlech $\sphericalangle BCA - \sphericalangle BDA = 180°$.

Dohromady leží body A, B, C, D na kružnici, právě když platí $\sphericalangle BCA - \sphericalangle BDA = 0$ nebo $180°$, takže můžeme podle cvičení 23 napsat

$$\arg\left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}\right) = \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) - \arg\left(\frac{a-d}{b-d}\right) = \sphericalangle BCA - \sphericalangle BDA = 0 \text{ nebo } 180°.$$

Číslo má ovšem argument 0 nebo 180° právě tehdy, když je reálné. □

Pokud znáš orientovaný úhel modulo 180°, jistě Ti neušlo, že ačkoli $\arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = \sphericalangle BCA$ platí modulo 360°, v tomto důkaze jsme pracovali pouze 180°.

Cvičení 38. Dokaž, že následující čtveřice bodů A, B, C, D leží na jedné kružnici pro všechna x, y, $z \in \mathbb{C}$, pokud:

(1) $a = -1, b = i, c = -2 + i, d = -1 + 2i$.
(2) $a = 4 + i, b = 2 + 2i, c = 8 + 4i, d = 7 + 7i$.
(3) $a = x$, $b = y$, $c = x + y + z$, $d = x + y - z$, pokud $|x| = |y| = |z| = 1$.

Všechny „ověřovací" věty, které jsi v sekci viděl(a), zpravidla využiješ na konci důkazu – tj. na ověření tvrzení úlohy. Například po Tobě úloha chce ukázat, že se tři přímky protínají v jednom bodě. Stačí Ti najít průsečík dvou z nich a pomocí věty 28 ukázat, že leží na třetí přímce.

Nyní nastává čas, abys vyzkoušela(a) všechny své doposud získané znalosti. Čeká Tě nyní pár úloh, kde se Ti můžou hodit tvrzení z této sekce. Hurá do toho!

Úloha 39. Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme čtverce $ACDE$ a $BCFG$. Dokaž, že leží střed úsečky DF na výšce z vrcholu C.

Úloha 40. (Van Aubelova věta) Nad stranami daného čtyřúhelníka sestrojíme vně čtverce. Dokaž, že spojnice středů protějších čtverců mají stejné délky a jsou na sebe kolmé.

Úloha 41. Nad stranami rovnoběžníka sestrojíme vně čtverce. Dokažte, že středy těchto čtverců tvoří vrcholy čtverce.

Úloha 42. (Napoleonova věta) Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme vně rovnostranné trojúhelníky ABZ, BCX, CAY. Dokažte, že středy těchto trojúhelníku tvoří též rovnostranný trojúhelník. Dokaž též, že přímky AX, BY a CZ prochází jedním bodem.

Úloha 43. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Otočením o 120° okolo T se B zobrazí na B_1. Otočením o 120° druhým směrem okolo T se C zobrazí na C_1. Dokaž, že je $\triangle AB_1C_1$ rovnostranný.

Jedno význačné a velmi mocné zobrazení, kterým se v tomto seriálu nebudeme příliš zabývat, je *kruhová inverze*. Zmiňme ji zde proto zběžně, pokud Tě zaujala, více informací najdeš v PraSečí knihovničce.[4]

[4] Třeba na adrese *https://prase.cz/library/KruhovaInverzePT/KruhovaInverzePT.pdf.*

Definice 44. Buď ω daná kružnice se středem O a poloměrem r. Poté kruhovou inverzi bodu $P \neq O$ podle ω definujeme jako bod P^* ležící na polopřímce $\overrightarrow{OP}$ splňující $|OP| \cdot |OP^*| = r^2$.

Úloha 45. Buď ω jednotková kružnice.

(1) Pro daný bod Z v rovině a komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ jemu příslušné urči komplexní číslo příslušné bodu Z^*.
(2) Jsou dané dva body A, B a body A^*, B^* k nim inverzní podle ω. Dokaž, že body A, B, A^* a B^* leží na jedné kružnici.

Jednotková kružnice

Doposud jsme komplexní čísla zkoumali z pohledu zobrazení. Jistě dosvědčíš, že zobrazení, jako jsou otočení či překlápění, jsou v řeči komplexních čísel přirozená. Bohužel, v *reálných* olympiádních úlohách je často objekt zvaný kružnice, se kterým prozatím umíme pracovat pouze s pomocí věty 37. Jak jsme upozornili, tato věta se typicky používá k důkazu, že čtyři body leží na kružnici, nikoliv k práci s kružnicemi, co v úloze jsou.

Definice 46. Definujme (znovu) jednotkovou kružnici jako množinu komplexních čísel s absolutní hodnotou $|z| = 1$. V komplexní rovině je dána kružnicí se středem v počátku a poloměrem jedna.

K čemu je nám jednotková kružnice dobrá? Jelikož je absolutní hodnota každého prvku jedna, tak pro číslo z na jednotkové kružnici platí

$$1 = |z|^2 = z\overline{z},$$

tj. $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Snadno tedy můžeme počítat sdružená čísla výrazů obsahující čísla na jednotkové kružnici. To nám značně zjednoduší život. Například chceme-li ověřit, že je $\frac{c-a}{b-a}$ reálné číslo, kde a, b, c jsou vyjádřená pomocí čísel na jednotkové kružnici, můžeme tímto způsobem spočítat číslo sdružené a ověřit, zda je totožné, jako jsme to udělali v příkladě 26. Ve velké řadě tvrzení a kritérií nám ale jednotková kružnice nejen dá nástroj k výpočtu, ale zjednoduší samotný vzorec. Pohodlně se usaď a kochej se.

Příklad 47. Dokažme, že pro body A, B, C, D na jednotkové kružnici platí $AB \perp CD$, právě pokud $ab + cd = 0$.

Řešení. Využijeme větu 35, podle které $AC \perp BD$ platí, právě když

$$\frac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R} \iff \frac{a-b}{c-d} = -\overline{\left(\frac{a-b}{c-d}\right)}.$$

Vzpomeňme si na pravidla výpočtu sdružených výrazů! Počítejme

$$\overline{\left(\frac{a-b}{c-d}\right)} = \frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}} = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{d}} = \frac{a-b}{c-d} \cdot \frac{cd}{ab}.$$

Příslušné přímky jsou tak kolmé, právě pokud $ab = -cd$.

Cvičení 48. Dokaž, že pro body A, B, C, D na jednotkové kružnici platí $AB \parallel CD$, právě pokud $ab = cd$.

Zůstaňme u kolmic trochu déle. Cvičení 34 nám umožňuje spočíst překlopení bodu podle libovolné úsečky. V tomto výrazu se ale vyskytuje mnoho sdružených čísel, která jednotková kružnice magicky zjednoduší na vzorec, který už stojí za zapamatování.

Věta 49. *Buďte A, B body na jednotkové kružnici. Pak je překlopení bodu Z podle přímky AB dáno číslem*

$$a + b - ab\overline{z}$$

a pata bodu Z na AB je dána $\frac{1}{2}(a + b + z - ab\overline{z})$.

Důkaz. Pokud jsi důkladně řešil(a) cvičení 34, víš, že překlopení bodu Z podle přímky AB obecně přísluší komplexní číslo

$$\frac{(b-a)\overline{z} + \overline{b}a - b\overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}.$$

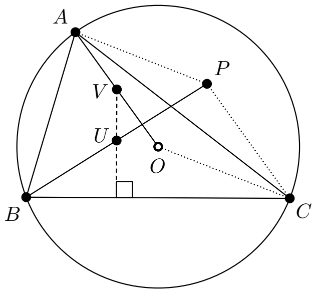
Jelikož platí $\overline{a} = \frac{1}{a}$ a $\overline{b} = \frac{1}{b}$, tento výraz se rovná:

$$\frac{(b-a)\overline{z} + \frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{(b-a)\left(\overline{z} - \frac{a+b}{ab}\right)}{\frac{a-b}{ab}} = a + b - ab\overline{z}.$$

Krátit číslem $a - b$ můžeme, protože jinak neexistuje přímka AB. Pata bodu je střed úsečky dané Z a jeho překlopením, tudíž je dána číslem $\frac{1}{2}(a + b + z - ab\overline{z})$. $\square$

Nyní si ukažme příklad přímo z té naší Matematické olympiády. Toto řešení obdrželo na krajském kole MO 6 bodů ze 6.

Příklad 50. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme O střed kružnice opsané. Obraz bodu O v osové souměrnosti podle přímky AC označme P. Dokaž, že středy úseček AO a BP leží na téže kolmici k přímce BC. (Krajské kolo MO A 2020)



Řešení. Položme trojúhelník do komplexní roviny tak, že (ABC) je jednotková kružnice, a tedy $o = 0$. Rozmysleme si, jak získat vyjádření bodu P.

Bod P je takový, že $OAPC$ tvoří rovnoběžník, jelikož střed S strany AC splňuje $OS \perp AC$. Podle příkladu 3 je tak $p = a + c - o = a + c$. Ke stejnému výsledku bychom došli i pomocí věty 49.

Nyní už je zbytek řešení nasnadě. Středy U, V úseček BP a AO mají vyjádření po řadě $\frac{b+p}{2} = \frac{a+b+c}{2}$ a $\frac{a}{2}$. Chceme ověřit, že platí $UV \perp BC$, tj. díky větě 35 chceme ověřit, že je číslo

$$\frac{u-v}{b-c} = \frac{\frac{a+b+c}{2} - \frac{a}{2}}{b-c} = \frac{b+c}{2(b-c)}$$

ryze imaginární. Spočítejme číslo k němu sdružené, díky cvičení 25 a faktu, že $\overline{b} = \frac{1}{b}$ a $\overline{c} = \frac{1}{c}$ můžeme psát

$$\overline{\left(\frac{u-v}{b-c}\right)} = \overline{\left(\frac{b+c}{2(b-c)}\right)} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = \frac{b+c}{2(c-b)} = -\frac{u-v}{b-c}.$$

Tento podíl je tedy ryze imaginární, tj. $UV \perp BC$, což jsme přesně chtěli.

Zatím byla volba jednotkové kružnice spíše zjevná, občas tomu tak ale nemusí být. Následuje velká kupa úloh, které lze řešit pomocí komplexních čísel. Pozor, občas bude například nutné tipnout si hledaný bod.

Úloha 51. Body A, B leží na jednotkové kružnici. Dokaž, že bod P leží na přímce AB, právě pokud platí $a + b = p + ab\overline{p}$.

Cvičení 52. Body A, B leží na jednotkové kružnici. Dokaž, že komplexní číslo $\frac{2ab}{a+b}$ přísluší průsečíku tečen k jednotkové kružnici jimi vedenými.

Úloha 53. Je dán tečnový[5] čtyřúhelník $ABCD$. Dokaž, že střed úsečky AC, střed úsečky BD a vepsiště leží na jedné přímce.

Úloha 54. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P, v němž M a N jsou středy úhlopříček AC a BD. Dokaž, že kolmice vedené ze středu každé strany na protější stranu se protínají v jednom bodě. Dokaž navíc, že tento bod je ortocentrem trojúhelníka PMN.

Úloha 55. Čtyřúhelník $ABCD$ má kolmé úhlopříčky a je vepsaný do kružnice se středem O. Dokaž, že vzdálenost bodu O od přímky CD je $\frac{1}{2}|AB|$. (PraSe 40–4p–4)

Úloha 56. (Simsonova přímka) Bod P leží v rovině trojúhelníka ABC. Označme D, E a F po řadě jeho paty na strany BC, AC a AB. Dokaž, že pokud P leží na kružnici opsané (ABC), pak body D, E a F leží na přímce.

Úloha 57. V trojúhelníku ABC označme A_1, B_1, C_1 po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, AC a AB. Dále označme A_2, B_2, C_2 po řadě středy úseček B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1. Dokažte, že kolmice z bodu A_2 na BC, z bodu B_2 na AC a z bodu C_2 na AB prochází jedním bodem.

Úloha 58. Buďte AA', BB', CC' tři průměry kružnice opsané trojúhelníka ABC. Zvolme libovolný bod P uvnitř trojúhelníka $\triangle ABC$ a označme D, E, F po řadě paty kolmic z bodu P na strany BC, CA, AB. Označme X bod takový, že D je střed úsečky $A'X$ a analogicky definujme body Y a Z. Dokaž, že trojúhelníky ABC a XYZ jsou si podobné. (Čína TST 2011)

Další důležitou vlastností, díky které je radno si zahrávat s jednotkovou kružnicí, je počítání průsečíků přímek. Obecně sice jde spočítat průsečík dvou libovolných přímek – jednoduše použít dvakrát větu 28, ale na soutěži by ses z toho všeho počítání nejspíš zbláznil(a). Naštěstí, jednotková kružnice znovu přichází na pomoc, vzorec pro počítání průsečíků tětiv na jednotkové kružnici se dá strávit.

Věta 59. *Jsou dány body A, B, C, D na jednotkové kružnici takové, že $AB \nparallel CD$. Průsečík $P \equiv AB \cap CD$ je daný vzorcem*

$$p = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}.$$

Důkaz. Nejprve si rozmysleme, že výraz je dobře definovaný – pokud P existuje, tak AB není rovnoběžné s CD, tudíž $ab \neq cd$. Vzhledem k symetrii dokazovaného tvaru p nám stačí ukázat, že bod P definovaný pomocí komplexního čísla výše leží na přímce AB. K tomu využijeme úlohu 51, podle které stačí ověřit, zda platí

$$a + b \stackrel{?}{=} p + ab\overline{p}.$$

Došli jsme spolu již tak daleko, že se takového výpočtu určitě nebojíme. Nejprve si druhý člen předpočítáme, znovu pomocí pravidel sdružování

$$ab\overline{p} = ab\overline{\left(\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}\right)} = ab \cdot \frac{\frac{1}{ab} \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) - \frac{1}{cd}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}} = -\frac{ab(c+d-a-b)}{ab - cd}.$$

[5] To znamená, že mu lze vepsat kružnice.

Teď už i na míli daleko vidíme, že výraz $p + ab\overline{p}$ vyjde hezky:

$$p + ab\overline{p} = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd} - \frac{ab(c+d-a-b)}{ab-cd} =$$
$$= \frac{ab(c+d) - cd(a+b) - ab(c+d-a-b)}{ab-cd} = \frac{ab(a+b) - cd(a+b)}{ab-cd},$$

což je rovno $a + b$, přesně jak jsme potřebovali. □

Pozorování 60. *Průsečík tečny v bodě A s přímkou CD je daný „limitním přibližováním bodu B k bodu A" ve vzorci výše, tedy položením $b = a$:*

$$p = \frac{a^2(c+d) - cd \cdot 2a}{a^2 - cd}.$$

Opravdu, snadno si jistě spočítáš, že platí $OA \perp AP$, pomocí kritéria kolmosti.

Úloha 61. Je daná kružnice ω s průměrem AK. Bod M leží uvnitř kružnice, ale ne na AK a přímka AM protíná ω podruhé v Q. Tečna k ω v Q protne kolmici v M na přímku AK v bodě P. Konečně, druhá tečna z P k ω ji protíná v bodě L. Dokaž, že body K, L a M leží na přímce. (Nizozemsko TST 2017)

Úloha 62. Je daná kružnice ω a bod P mimo ni. Uvažme všechny lichoběžníky $ABCD$, $AB \parallel CD$ vepsané ω takové, že P je průsečík přímek AD a BC. Dokaž, že všechny takové lichoběžníky mají společný průsečík úhlopříček. (Ústřední kolo MO 1998)

Úloha 63. Je daný rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem při A. Označme M střed úsečky AB a E druhý průsečík přímky DM s kružnicí (DAB). Konečně, označme H bod na DA takový, že $\sphericalangle AHB = 90°$. Dokaž, že body C, D, H a E leží na kružnici. (PraSe 39–1j–7)

Úloha 64. Je daný rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC a středem kružnice vepsané I. Přímka BI protne stranu AC v bodě D a kolmice skrz D k AC protne přímku AI v bodě E. Dokaž, že obraz bodu I podle přímky AC leží na kružnici opsané trojúhelníka BDE. (IMO shortlist 2016/G4)

Při počítání úloh pomocí komplexních čísel se občas nevyvarujeme delším výpočtům. Pokud se nebojíš, čekají Tě dva testy odolnosti.

Úloha 65. (Brocardova věta) Je daný tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s nerovnoběžnými stranami. Označme P průsečík jeho úhlopříček, $Q = AB \cap CD$ a $R = AD \cap BC$. Dokaž, ortocentrum trojúhelníka PQR splývá se středem kružnice opsané $(ABCD)$.

Úloha 66. (Pascalova věta) Šest bodů A, B, C, D, E a F leží na kružnici. Dokaž, že tři průsečíky $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ a $CD \cap FA$ leží na jedné přímce.

Ortocentrum a Eulerova přímka

Náš arzenál se rozrůstá a již jsme cvičení v počítání kolmic. Příklad 47 nám napovídá, že kolmice na jednotkové kružnici budou obzvláště jednoduchá kořist. Můžeš si zkusit ortocentrum určit ještě dříve než my, je to dobré cvičení.

Věta 67. *Buď ABC trojúhelník s jednotkovou opsanou kružnicí a ortocentrem H. Pak $h = a + b + c$.*

Důkaz. Stačí nám díky symetrii ukázat, že $AH \perp BC$. To je ale jednoduché, spočítejme:

$$\frac{a-h}{b-c} = \frac{b+c}{c-b}.$$

Sdružené číslo k němu je zjevně

$$\overline{\left(\frac{b+c}{c-b}\right)} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}} = \frac{b+c}{b-c} = -\frac{a-h}{b-c},$$

tedy vskutku $AH \perp BC$. $\square$

Mnoho známých tvrzení a faktů, obzvlášť točících se okolo ortocentra, je pomocí komplexních čísel jasné. Nevěříš? Přesvědč se sám(sama), tradičně totiž následuje velká spousta cvičení a úloh.

Úloha 68. V trojúhelníku ABC označme P bod takový, že $ABPC$ je rovnoběžník. Ukaž, že body B, H, C a P leží na kružnici.

Cvičení 69. (Eulerova přímka) Dokaž, že střed kružnice opsané O, těžiště G a ortocentrum H trojúhelníka ABC leží na přímce v tomto pořadí, přičemž platí $\frac{|OG|}{|GH|} = \frac{1}{2}$.

Cvičení 70. Dokaž, že v trojúhelníku ABC leží obrazy bodu H v osové souměrnosti podle strany BC a ve středové souměrnosti podle středu BC na kružnici opsané.

Cvičení 71. Je daný trojúhelník ABC s ortocentrem H. Body D, E, F leží na kružnici opsané trojúhelníka tak, že $AD \parallel BE \parallel CF$. Označme S, T, U po řadě obrazy bodů D, E a F v osové souměrnosti podle přímek BC, CA a AB. Dokaž, že body S, T, U, H leží na kružnici.

(MOP 2006)

Úloha 72. Dokaž, že v trojúhelníku ABC leží středy stran, paty výšek a středy úseček AH, BH, CH na jedné kružnici (tzv. *Feuerbachově kružnici*). Dokaž navíc, že její střed je $\frac{a+b+c}{2}$ a urči její poloměr.

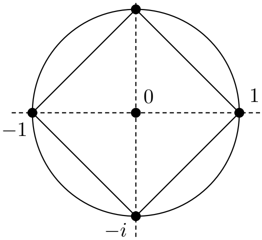
Úloha 73. V daném trojúhelníku ABC uvažme D patu výšky z vrcholu A a K bod na kružnici opsané takový, že $AK \parallel BC$. Dokaž, že přímka HK prochází těžištěm trojúhelníka ABC.

Úloha 74. Bod P leží na kružnici opsané trojúhelníka ABC. Dokaž, že Simsonova přímka bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC půlí úsečku PH.

Úloha 75. V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokaž, že přímka EP prochází středem úsečky OV.

(Ústřední kolo MO 2011)

Zpátky ke goniometrii aneb pravidelné mnohoúhelníky



Body 1, i, -1 a $-i$ tvoří v rovině čtverec vepsaný jednotkové kružnici. Tyto čtyři body jsou pro nás zajímavé proto, že všechny splňují $x^4 = 1$. Navíc jsou to všechna řešení této rovnice, neboť $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$. Jsou ještě v něčem speciální? Jejich argumenty jsou 0, $\pi/2$, π a $3\pi/2$ a absolutní hodnotu mají rovnou jedné. Tedy pokud si ještě vzpomeneš na goniometrický tvar komplexního čísla, tak tato čtyři čísla jej mají až podezřele hezký:

$$\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right),$$

kde $k = 0, 1, 2, 3$. Je to jen náhoda, že do sebe všechno takhle krásně zapadá? Ne! Zobecněním těchto myšlenek se teď podíváme do světa pravidelných mnohoúhelníků v komplexní rovině.

Definice 76. Buď n (pro tuto sekci pevné) přirozené číslo. Pak definujeme v $\mathbb{C}$ tzv. „n-té odmocniny z jedné" následovně

$$\zeta_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

pro celé číslo k.

Výše jsme tedy měli tu čest se čtvrtými odmocninami z jedné. Název „n-té odmocniny z jedné" Ti asi napovídá, že n-tá mocnina čísla ζ_k bude 1. Opravdu, měl(a) bys pravdu! To si dokážeme za chviličku.

Rozmysleme si nejprve pár základních vlastností těchto čísel. Nejprve si všimněme, že tvar v definici je goniometrický, z čehož vidíme, že mají všechny absolutní hodnotu rovnu jedné. Všechna čísla ζ_k tedy leží na jednotkové kružnici. Také to znamená, že mají i všechny jejich mocniny absolutní hodnotu 1, ale ještě není zaručeno, že nějaká jejich mocnina je přímo rovna jedné.

Cvičení 77. Pro libovolné k platí $\zeta_{k+n} = \zeta_k$, čili je jen n různých n-tých odmocnin z jedné. Stačí tak uvažovat ζ_k pouze pro $k = 1, 2, \ldots, n$.

Věta 78. (Moivrova) *Pro ζ_k jako výše platí $\zeta_k = \zeta_1^k$.*

Důkaz. Věta přímo vybízí k postupu matematickou indukcí podle k. Nejprve pro $k = 1$ věta zjevně platí. Nyní předpokládejme, že platí $\zeta_k = \zeta_1^k$ pro nějaké k. Poté využijeme vlastnosti násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru, kde můžeme sčítat argumenty podle tvrzení 6. Absolutní hodnoty nepíšeme, protože všechna ζ_i mají absolutní hodnotu rovnou jedné. Pišme

$$\begin{aligned}\zeta_1 \cdot \zeta_k &= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right] = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right).\end{aligned}$$ □

Důsledek 79. *Minimální přirozené k takové, že platí $\zeta_1^k = 1$, je n.*

Důkaz. Jednoduše pomocí Moivrovy věty pišme

$$1 = \zeta_1^k = \zeta_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Porovnáním reálných a imaginárních složek této rovnice získáme $\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = 1$ a $\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = 0$, z čehož plyne, že existuje celé ℓ splňující $\frac{2\pi k}{n} \cdot = 2\pi \cdot \ell$. Minimální takové přirozené k je zjevně $k = n$. □

Cvičení 80. Rozmysli si, že $\zeta_k \cdot \zeta_l = \zeta_{k+l}$ a že $\overline{\zeta_k} = \zeta_{n-k}$.

Moivrova věta nám říká, že pro každé k platí $\zeta_k^n = 1$. Rozmysleme si, že čísla ζ_k jsou dokonce *všechna* komplexní řešení rovnice $x^n - 1$. Tento polynom má stupeň n a právě jsme našli n jeho kořenů, navzájem různá čísla ζ_k. Můžeš si rozmyslet, že podobně jako v reálných číslech má každý nenulový polynom nejvýše tolik kořenů, kolik je jeho stupeň. Odmocniny z jedné jsou tedy právě všechny jeho kořeny.

Poznámka 81. Komplexní čísla mají dokonce ještě lepší vlastnost, konkrétně, že každý polynom stupně n má přesně n komplexních kořenů, včetně násobnosti. V reálných číslech toto neplatí, například polynom x^2+1 žádné reálné kořeny nemá. Více o algebraických vlastnostech komplexních čísel najdeš v PraSečím seriálu o komplexních číslech[6].

Pozorování 82. *Součet* $1+\zeta+\zeta_2+\cdots+\zeta_{n-1} = 1+\zeta_1+\zeta_1^2+\cdots+\zeta_1^{n-1}$ *získáme jako součet geometrické řady*

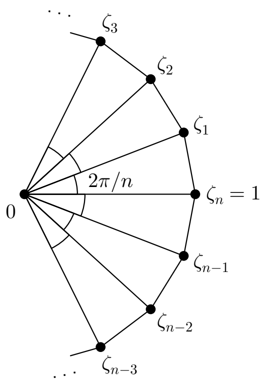
$$1+\zeta_1+\zeta_1^2+\cdots+\zeta_1^{n-1} = \frac{\zeta_1^n-1}{\zeta_1-1} = 0.$$

Získáš ho i pomocí Viètových vztahů pro polynom x^n-1.

Cvičení 83. Pro pátou odmocninu z jedné převeď součet $1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4=0$ na kvadratickou rovnici a díky tomu spočítej $2\cos 36^\circ$ a z toho dále najdi $\cos 18^\circ$.

Konečně máme tedy opodstatněný název těchto zvláštních čísel. Zamysleme se nad nimi ale geometricky. Čtvrté odmocniny z jedné jsou právě $1, -1, i$ a $-i$, které tvoří v rovině čtverec. Vzhledem k jisté symetrii, která panuje mezi goniometrickým předpisem ζ_k, bychom intuitivně čekali, že řešení x^n-1 budou pravidelně rozestavená v rovině. A opravdu, pojďme si to (překvapivě) spočítat:

Věta 84. *Body* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ *tvoří v komplexní rovině pravidelný* n*-úhelník.*



Důkaz. Argumenty čísel $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ jsou přímo z definice po řadě $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, 2\pi$. Snadno tak vidíme, že střed kružnice opsané se na úsečku danou body ζ_k, ζ_{k+1} dívá pod úhlem $\frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$, což je pro všechna k stejné. Rovnoramenné trojúhelníky dané ζ_k, ζ_{k+1} a počátkem tak mají všechny stejné úhly a jsou tedy navzájem shodné, z čehož plyne, že strany mnohoúhelníka jsou stejně dlouhé. □

Můžeme dokonce říct více. Všimni si, že absolutní hodnota obsahující nějaké odmocniny z jedné v sobě bude obsahovat jen nějaké siny a kosiny, se kterými již umíme obratně pracovat. Určeme tedy poměr délky strany a poloměru kružnice opsané.

Věta 85. *Pravidelný* n*-úhelník vepsaný do kružnice o poloměru* 1 *má délku strany rovnou* $\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{n}}$.

[6] *https://prase.cz/archive/30/9.pdf*

Důkaz. Chceme spočítat délku nějaké strany, jinak řečeno vzdálenost dvou po sobě jdoucích odmocnin. Spočítejme tedy vzdálenost komplexních čísel ζ_k a ζ_{k+1}, tedy $|\zeta_{k+1} - \zeta_k|$.

Tu umíme spočítat jako $\sqrt{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)\overline{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}}$. Rozepíšeme to pomocí mocnin ζ_1.

$$\begin{aligned}\sqrt{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)\overline{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}} &= \sqrt{\left(\zeta_1^{k+1} - \zeta_1^k\right)\overline{\left(\zeta_1^{k+1} - \zeta_1^k\right)}} = \sqrt{\left(\zeta_1^{k+1} - \zeta_1^k\right)\left(\left(\overline{\zeta_1}\right)^{k+1} - \left(\overline{\zeta_1}\right)^k\right)} = \\ &= \sqrt{\left(\zeta_1^{k+1} - \zeta_1^k\right)\left(\frac{1}{\zeta_1^{k+1}} - \frac{1}{\zeta_1^k}\right)} = \sqrt{\frac{\zeta_1^{k+1}}{\zeta_1^{k+1}} + \frac{\zeta_1^k}{\zeta_1^k} - \frac{\zeta_1^{k+1}}{\zeta_1^k} - \frac{\zeta_1^k}{\zeta_1^{k+1}}} = \\ &= \sqrt{2 - \zeta_1 - \frac{1}{\zeta_1}} = \sqrt{2 - (\zeta_1 + \overline{\zeta_1})}.\end{aligned}$$

A ζ_1 už známe. Pokud napíšeme $\zeta_1 = a + bi = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, tak $\zeta_1 + \overline{\zeta_1} = a + bi + a - bi = 2a = 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Dohromady dostáváme

$$|\zeta_{k+1} - \zeta_k| = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)},$$

což je stejné pro všechna k. □

Cvičení 86. Adaptuj předchozí důkaz a urči délky všech úhlopříček v pravidelném n-úhelníku s poloměrem kružnice opsané rovným jedné.

Ukážeme si jeden pořádný příklad na závěr. Šikovné úpravy a dobrá volba počáteční situace nám umožní si zjednodušit složité výpočty. Vždy přemýšlej, kam položit obrázek do komplexní roviny – jestli se vhodná kružnice stane jednotkovou, vhodná přímka reálnou osou, … Občas si můžeš volbu nechat v záloze a udělat ji, až když vidíš, že se Ti nějaký výraz zjednoduší.

Příklad 87. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou na úhlopříčkách AC a CE dány body M, N tak, že

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = r \in \mathbb{R}.$$

Určete hodnotu r, pokud body B, M, N leží na přímce. (IMO 1982)

Řešení. Šestiúhelník jistě vepíšeme do jednotkové kružnice, zbývá nám volba, který bod bude reprezentován jedničkou. Jelikož dokazujeme fakta o B, položme $B = 1$, $C = \zeta$, …, $A = \zeta^5$. Platí $\zeta = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Bod M je takový, že $(m-a) = r(c-a)$, tj. $m = rc+(1-r)a$. Rozepišme pomocí goniometrických funkcí:

$$m = r\zeta + (1-r)\zeta^5 = r\zeta + (1-r)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = r\frac{1+i\sqrt{3}}{2} + (r-1)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),$$

což je rovno $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}(2r-1)}{2}i$. To vůbec není špatné!

Podobně napíšeme $n = re + (1-r)c = r\zeta^3 + (1-r)\zeta = -r + (1-r)\zeta$, znovu rozepíšeme

$$n = -r + (1-r)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -r + (1-r)\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3r}{2} + \frac{\sqrt{3}(1-r)}{2}i.$$

Kolinearita těchto dvou s B je ekvivalentní s

$$\frac{b-m}{b-n} = \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}(2r-1)}{2}i}{1 - \frac{1-3r}{2} - \frac{\sqrt{3}(1-r)}{2}i} = \frac{1 - \sqrt{3}(2r-1)i}{3r+1+\sqrt{3}(r-1)i} \in \mathbb{R}.$$

Chceme tedy určit, kdy je hledaný zlomek reálné číslo. Podobně jako při dělení komplexních čísel rozšíříme zlomek o číslo sdružené ke jmenovateli. Jmenovatel poté bude reálné číslo, takže už nás jen zajímá, aby byl reálný čitatel. Zbývá nám pak určit r takové, že

$$\left(1-\sqrt{3}(2r-1)i\right)\left(3r+1-\sqrt{3}(r-1)i\right) \in \mathbb{R}.$$

Imaginární složka tohoto čísla je rovna

$$-\sqrt{3}(2r-1)\cdot(3r+1)-\sqrt{3}(r-1)=-\sqrt{3}((2r-1)(3r+1)+r-1)=-\sqrt{3}(6r^2-2).$$

Ta bude nulová právě tehdy, když $r^2=\frac{1}{3}$. Jelikož r je kladné číslo, nastane to právě tehdy, když $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Úloha 88. Na kružnici opsané pravidelnému $2n$-úhelníku $A_1A_2\dots A_{2n}$ leží bod P. Dokažte, že ortocentra trojúhelníků PA_1A_2, PA_3A_4, …, $PA_{2n-1}A_{2n}$ tvoří pravidelný n-úhelník.

(BdMO 2023)

Úloha 89. Je daný pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$ vepsaný do jednotkové kružnice. Dokaž, že platí $|AB|^2+|AC|^2+|AD|^2=7$.

Úloha 90. Je daný pravidelný n-úhelník $A_1A_2\dots A_n$ vepsaný do kružnice se středem O a poloměrem R. Na polopřímce opačné k A_1O najdeme bod P. Dokaž, že platí

$$\prod_{i=1}^{n}|PA_i|=|PO|^n-R^n.$$

(Putnam 1955)

V minulém díle jsme se bavili o vlnách – ztělesnění goniometrických funkcí. Jelikož komplexní čísla a obzvláště odmocniny z jedné mají ke goniometrii velmi blízko, můžeš si zkusit vyřešit některé úlohy z předchozího dílu pomocí nově nabytých znalostí.

Úloha 91. Na kružnici opsané pravidelného mnohoúhelníka se pohybuje bod. Dokaž, že součet druhých mocnin jeho vzdáleností ke stranám je stále stejný.

Úloha 92. (znovu) Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Na kratším oblouku BC kružnice opsané leží bod X. Dokaž, že $|XB|+|XC|=|XA|$.

Závěrem…

Imaginární sušenku posíláme všem, kteří dočetli druhý díl až sem. Spolu s tímto textem přichází i zadání druhé seriálové série, přejeme Ti co nejméně početních chyb při jejím řešení!

Komplexní čísla jsou silným nástrojem k řešení geometrických úloh, kde figuruje jedna centrální kružnice – na takové kousky jsou komplexní čísla jako stvořena. Naopak pro úlohy s více kružnicemi nebo všudypřítomnými průsečíky přímek doporučujeme zadržet v počítání.

Pointa je následující: geometrické úlohy řeš pomocí nástrojů, které máš k dispozici, tedy Tvé standardní podobnosti, mocnosti bodu ke kružnici a tak dále. Jakmile ale úlohu převedeš do tvaru, který by byl v rozumném čase spočitatelný, zapřemýšlej i nad výpočetní metodou. Než takové řešení spácháš na soutěži jako ústřední kolo, MEMO nebo IMO, vzpomeň na svatou trojici ze začátku seriálu:

(1) Úloha jde spočítat pomocí komplexních čísel.
(2) Znám dobře všechna tvrzení a dokážu je obhájit.
(3) Mám na řešení čas.

Mnoho z těchto bodů přichází jednoduše se zkušeností v počítání, nenech se tedy už déle zdržovat a pusť se do počítání! Spolu s touto sérii Ti do obálky přistála i zadaní druhé seriálové série. Pokud budeš apelovat na nějaké tvrzení ze seriálu, prosíme, odkaž se na něj. Přejeme hodně zdaru.

V posledním letošním díle se podíváme na početní metodu vhodnější na práci s délkami a přímkami – barycentrické souřadnice. Naučíme se vážit body, počítat obsahy a zase si spočítáme nepřeberné množství příkladů. Těšíme se na opětovné setkání!

Návody k úlohám a cvičením

5. Podívej se na obrázek. Je to totéž jako v kartézských souřadnicích.

8. Absolutní hodnota je vzdálenost bodu od počátku.

10. Kam se zobrazí 1?

11. Úsečky jsou si podobné, takže $c = za + k, d = zb + k$.

12. Střed podobnosti si dej do bodu 0, pak je spirální podobnost jenom násobení. Čím musíš vynásobit, aby se bod X posunul na bod Y?

13. Zapiš $a' = ra$, $a'' = sa$ pro nějaká $r, s \in \mathbb{C}$.

14. Podívej se na obrázek.

16. Vzpomeň na pravidlo pro rovnoběžník z příkladu 3.

21. Překlopením útvaru podle reálné osy získáš útvar s ním nepřímo shodný.

22. Ověř, že takovéto dělení funguje, jak má, tedy že $(a/b) \cdot b = a$.

23. Uvaž zpětné násobení: $(w/z) \cdot z = w$.

24. Vzpomeň si na vzorec $t = \frac{a+b+c}{3}$. Nezapomeň, že poměr $\frac{|a-t|}{|d-e|}$ se rovná $\left|\frac{a-t}{d-e}\right|$. Může se Ti hodit umístit si bod 0 do těžiště a používat $a + b + c = 0$.

25. Rozepiš si komplexní čísla po složkách: $a = x + yi$, $b = u + vi$.

27. $z \cdot \overline{z} = 1$.

30. $\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}$. Obě přímky posuň, aby procházely počátkem, pak už můžeš ověřovat, že jsou všechny body na jedné přímce.

31. Použij na oba transformaci jako v důkazu věty. Získáš vždy trojúhelník podobný původnímu.

32. Když opět uvážíme spirálku $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$, která zobrazí a na 0 a b na 1, kam se musí zobrazit c? U čtverce zkombinuj víc trojúhelníků.

33. Jeden překlop, pak už jsou přímo podobné.

34. Použij předchozí cvičení nebo opět podobnost, která přesune a na 0 a b na 1. Potom vyjádři z rovnosti.

38. Na (3) využij, že $\overline{x} = \frac{1}{x}$.

39. Dokaž kolmost AB a SC.

40. To, že je KL kolmé na MN a má stejnou délku, se pozná tak, že $\frac{k-l}{m-n} = \pm i$. To proto, že pak otočení okolo počátku o pravý úhel zobrazí čísla $k-l$ a $m-n$ na sebe.

41. Střed jednoho čtverce otoč okolo sousedního středu a ukaž, že padne na protější střed.

42. Průsečík tří přímek bude těžiště původního trojúhelníka.

43. Zaveď rovinu tak, že těžiště trojúhelníka bude bod 0 a používej $a+b+c=0$.

45. Pro první část najdi takové reálné k, že $y = kz$. Nezapomeň, co je $|z|^2$. Druhá část pro Tebe už bude jistě hračka :)

48. Vzpomeň si na kritérium rovnoběžnosti a postupuj jako v předchozím příkladě. Alternativně se zamysli nad středy tětiv AB a CD.

51. Dosaď do vzorce pro přímku nebo překlopení.

52. Použij střed tětivy a najdi vhodnou spirální podobnost.

53. Zvol kružnici vepsanou jako jednotkovou a použij předchozí cvičení.

54. Hledaný bod bude $\frac{a+b+c+d}{2}$. Pro obě části jednoduše ověř kolmost.

55. Poněkud více vzorců, ale všechny už jsi viděl(a). Hodí se 19, 47, 49. Pak jen ukaž rovnost.

56. Použij vzorec pro patu výšky a počítej.

57. Zvol kružnici vepsanou jako jednotkovou se středem O. Dejme tomu, že N je hledaný průsečík, poté by mělo platit $A_2N \parallel OA_1$. Urči pomocí toho N.

58. Trojúhelníky budou nepřímo podobné. Použij buď cvičení 33 a nebo spočítej poměry délek.

61. Zvol $a = 1$, $k = -1$ a předefinuj body L a Q. Pak chceš ukázat, že MP je kolmá na reálnou osu, což je snadný výpočet.

62. Vhodně zvol osy tak, aby platilo $b = \overline{a}$. Jaký bude vztah bodu P a průsečíku úhlopříček?

63. Polož (DAB) jako jednotkovou kružnici. Bod M spočítáš snadno pomocí úlohy 51. Zbytek je jen cvičení se vzorci.

64. Vezmi kružnici vepsanou jako jednotkovou a bod dotyku s BC bude 1. Pak prostě počítej, vyjde to hezky.

65. Rozdíl $r-q$ zkus rozložit na činitele. K tomu využij dobrý trik: pokud se výrazy budou rovnat například pro $a = c$, tak můžeš vytknout z rozdílu činitel $(a-c)$. Pokus se rozdíly co nejvíce rozložit. Konečný podíl vyjde hezky.

66. Z rozdílů bude opět možno něco málo vytknout.

69. Stejnolehlost zobrazí G na H.

70. Ověř, že mají absolutní hodnotu 1.

71. Jak elegantně zahrnout podmínku pro rovnoběžnost? Celý obrázek si otoč tak, aby byly úsečky kolmé na reálnou osu, potom dokonce $d = \overline{a} = \frac{1}{a}$.

72. Ukaž, že středy úseček AH a BC tvoří průměr této kružnice. Alternativně spočítej, že vzdálenost středu od všech bodů je stejná.

74. Střed PH leží na přímce se dvěma patami.

75. Místo počítání průsečíku CO s AB uvaž bod přímo naproti C.

77. Sinus a kosinus jsou periodické funkce.

80. $\zeta_k = \zeta_1^k$.

83. Pro pátou odmocninu z jedné ζ si rozmysli, že platí $2\cos 36^\circ = \zeta + \frac{1}{\zeta}$. Z rovnosti $1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4 = 0$ odvoď kvadratickou rovnici, kterou toto číslo splňuje. Druhou část spočti pomocí formule pro dvojnásobný úhel.

88. Využij vzorec pro ortocentrum a ověř jedním výpočtem, že jsou u každého vrcholu stejně dlouhé strany a stejný úhel.

89. Absolutní hodnoty roznásob a použij $1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^6 = 0$.

90. Levá strana je velikost čísla $(p-1)(p-\zeta)(p-\zeta^2)\cdots(p-\zeta^{n-1}) = p^n - \zeta^n$, což je reálné číslo.

91. Spočítej paty výšek z bodu na jednotlivé strany a poté počítej vzdálenosti.

92. Čísla $x-1$, $x-\zeta$ a $x-\zeta^2$ vhodně přenásob odmocninami z jedné a sečti na nulu. Co to znamená pro příslušné délky?

Řešení cvičení

5. Z prvního dílu víme (v podstatě z definice goniometrických funkcí), že když uvážíme kružnici s poloměrem r, středem v počátku a na ní bod Z, který splňuje $\sphericalangle(\text{osa } x, \overrightarrow{OZ}) = \alpha$, má Z souřadnice $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, což je v komplexních číslech $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Když $r = |z|$ a $\alpha = \arg z$, dostaneme přesně goniometrický tvar bodu Z, takže vidíme, že $\sphericalangle(\text{osa } x, \overrightarrow{OZ}) = \arg z$.

8. Je to jednotková kružnice. Absolutní hodnota je vzdálenost bodu od počátku, čili všechny takové body mají vzdálenost od počátku 1, tedy leží na kružnici. Obecná kružnice se středem S a poloměrem r je tedy množina všech bodů Z takových, že $|z-s| = r$.

10. Číslo 1 se při násobení zobrazí přesně na číslo z, čili si stačí uvědomit, kam se v jednotlivých případech zobrazí bod 1, tedy kartézsky $(1,0)$. Vzdálenost od středu zachovají všechna tři zobrazení, proto z musí být bod splňující $|z| = |1| = 1$. To máme absolutní hodnotu, co argument? z musí být takový bod, že $\sphericalangle(O1, \overrightarrow{OZ})$ je hledaný úhel otočení (středová souměrnost je otočení o 180°). To je ovšem úhel $\sphericalangle(\text{reálná osa}, \overrightarrow{OZ})$, což je $\arg z$. Díky goniometrickému tvaru budou příslušné body po řadě $\cos(\pi) + i\sin\pi = -1$, pak $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$ a konečně $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

11. Úsečky jsou si podobné (dají se zvětšit, otočit a posunout na sebe), takže platí $c = za+k, d = zb+k$ pro nějaká z, $k \in \mathbb{C}$. Najdeme takový bod m podobného zobrazení $x \mapsto zx+k$, který se nezmění, tedy který splňuje $m = zm+k$. To je bod $m = \frac{k}{1-z}$. Všimněme si, že tohle můžeme udělat, když $z \neq 1$, což je případ, kdy se na sebe dají přesunout posunutím. Teď vidíme, že se čísla a, b, m podobným zobrazením $x \mapsto zx+k$ zobrazí na body c, d, m, čili jsou si trojúhelníky ABM a CDM opravdu podobné.

12. Položme $s = 0$. Pak existuje komplexní číslo r takové, že $x' = rx \neq 0$ a $y' = ry$. Pak chceme najít spirální podobnost, která přenese body x, $x' = rx$ na y, $y' = ry$. Je pak zjevné, že stačí zvolit střed podobnosti s a koeficient násobení bude komplexní číslo $\frac{y}{x}$.

14. Podobné zobrazení $x \mapsto a+(b-a)x$ zobrazí 0 na a a 1 na b. Stačí tedy najít střed čtverce nad úsečkou 01 a pak ho zobrazit touto podobností. Na obrázku u cvičení je část souřadnicové mřížky zobrazená touto podobností. Jeden ze dvou čtverců nad úsečkou 01 má vrcholy 0, 1, $1+i$, i a střed $\frac{1+i}{2}$. Střed se tedy zobrazí na

$$a+(b-a)\frac{1+i}{2} = a + \frac{1+i}{2}b - \frac{1+i}{2}a = \frac{1-i}{2}a + \frac{1+i}{2}b.$$

Stejně určíme střed rovnostranného trojúhelníka, který je nad úsečkou 01 v bodě $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ a obecně pak v bodě $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)b$.

20. Rovnost $a + bi = \overline{(a + bi)} = a - bi$ nastane právě tehdy, když $b = 0$, tedy z je reálné číslo. Podobně druhá rovnost nastane právě pro ryze imaginární čísla.

21. Mějme dva nepřímo podobné útvary. Komplexním sdružením $x \mapsto \overline{x}$ jeden útvar překlopíme (podle reálné osy), takže je přímo podobný s tím druhým. Potom už ho můžeme standardně otočit, naškálovat a posunout na druhý útvar zobrazením $\overline{x} \mapsto z\overline{x} + k$.

22. Podle tvrzení 19 platí $|b|^2 = b\overline{b}$, takže $a\overline{b}/|b|^2 = a\overline{b}/(b\overline{b}) = a/b$. To se hezky napíše, ale tváříme se přitom, že se vůbec nějak dělit dá. Tím si ovšem nemůžeme být tak jisti vzhledem k tomu, jak zvláštně se násobí. Můžeme to ověřit pořádně. Dělení má být opačná operace k násobení, chceme tedy ověřit, že $(a/b) \cdot b = a$:

$$(a/b) \cdot b = a\overline{b}/|b|^2 \cdot b = a\overline{b}b/|b|^2 = a|b|^2/|b|^2 = a.$$

Dá se snadno ověřit, že platí i další běžné vlastnosti dělení, třeba $(a/b)/c = a/(bc)$. Spočítáme pak $(8 + i)/(2 - 3i) = (8 + i)(2 + 3i)/(2^2 + 3^2) = (13 + 26i)/13 = 2 + i$.

23. Pokud $z \neq 0$, tak $|z| \cdot |w/z| = |w|$. Obdobně $\arg(w/z) + \arg z = \arg w$.

25. Zapišme $a = x + yi$, $b = u + vi$, potom všechno snadno spočítáme. První vlastnost je jasná $\overline{a + b} = x + u - (y + v)i = \overline{a} + \overline{b}$. U druhé vlastnosti

$$\overline{(x + yi)(u + vi)} = \overline{[xu - yu + (xv + uy)i]} = u - yu - (xv + uy)i = (x - yi)(u - vi).$$

32. Podle úlohy 31 je $\triangle ABC$ rovnostranný, když $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$. Podmínka pro to, aby byl $ABCD$ čtverec, může být třeba $\frac{a-b}{c-b} = \frac{d-c}{b-c} = \pm i$. Odpovídá to ověření, že jsou ABC a BCD přímo podobné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky.

33. Překlopíme ABC podle reálné osy na $A'B'C'$. To je sdružení, takže $a' = \overline{a}, b' = \overline{b}, c' = \overline{c}$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou si nepřímo podobné, takže už stačí ověřit podle úlohy 31 přímou podobnost trojúhelníků $A'B'C'$ a DEF, takže vhodná podmínka bude například $\frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = \frac{f-d}{e-d}$.

34. Je to

$$\frac{(b - a)\overline{z} + \overline{b}a - b\overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}.$$

Je-li Z' zrcadlový obraz podle přímky AB, jsou trojúhelníky ABZ a ABZ' nepřímo podobné, takže můžeme vyjádřit z' ze vzorce z předchozího cvičení $\frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = \frac{z'-a}{b-a}$. Také můžeme použít podobnost $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$, která zobrazí a na 0 a b na 1. Tedy zobrazí AB na reálnou osu. Překlopení podle reálné osy je ovšem sdružení, takže obrazy z a z' musí být sdružené, z čehož vypadne stejná rovnost jako předtím.

Zajímavé je ověřit to pomocí obecné nepřímé podobnosti. Vidíme, že řešení je tvaru $k\overline{z} + c$, takže to je nepřímá podobnost. Dosadíme-li a a b, zjistíme, že se touto podobností zachovají. Jediná nepřímá podobnost, která zachovává body A, B, je osová souměrnost podle přímky AB.

Pata výšky je střed úsečky ZZ', takže ji spočítáme jako $\frac{z+z'}{2}$.

36. (3), (4) leží na přímce, (2) jsou kolmé. (1) ani jedno.

48. Podle úlohy 30 platí, že $AB \parallel CD$ platí právě tehdy, když $\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}$. Pro A, B, C, D na jednotkové kružnici toto znamená

$$\frac{b - a}{d - c} = \overline{\left(\frac{b - a}{d - c}\right)} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{c}} = \frac{cd(a - b)}{ab(c - d)},$$

což nastane právě pokud $ab = cd$.

52. Ukážeme si, jak na to přijít. Označme P průsečík tečen a M střed AB. Pak $\triangle OMA \sim \triangle OBP$, tedy pro nějaké $r \in \mathbb{C}$ platí $r\frac{a+b}{2} = b$ a zároveň $p = ra$. Z toho snadno získáme $p = \frac{2ab}{a+b}$.

69. Uvažme komplexní rovinu tak, že kružnice opsaná ABC je jednotková. Potom $o = 0$, $g = \frac{a+b+c}{3}$ a $h = a + b + c$. Stejnolehlost se středem v O a koeficientem 3 zobrazí G na H, proto jsme hotovi.

70. Oproti přímému výpočtu si můžeme malinko ušetřit práci. Průsečík výšky s opsanou kružnicí má podle příkladu 47 vzorec $-\frac{bc}{a}$. Pata výšky z A na BC má tvar $d = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right)$, tedy je to střed bodů $a+b+c = h$ a $-\frac{bc}{a}$, čímž jsme ověřili, že je zrcadlový obraz bodu H na kružnici opsané $-\frac{bc}{a}$ a leží tak na kružnici opsané. Obdobně, bod A' přímo naproti A má příslušné komplexní číslo $-a$. Pak $b + c = -a + a + b + c$, tedy B, A', C, H tvoří rovnoběžník a středy úhlopříček splývají, čili je A' obraz H ve středové souměrnosti podle středu BC.

71. Natočíme si rovinu tak, aby tři rovnoběžky byly kolmé na reálnou osu. Pak bude platit $d = \overline{a} = \frac{1}{a}$ a podobně $be = cf = 1$. Poté $s = b + c - \frac{bc}{d} = b + c - abc$ a $t = a + c - abc$, $u = a + b - abc$. Toto dosadíme do zlomku z věty o kružnici:

$$\frac{s-t}{s-u} : \frac{h-t}{h-u} = \frac{b-a}{c-a} : \frac{b+abc}{c+abc} = \frac{(b-a)(1+ab)}{(c-a)(1+ac)}.$$

Číslo sdružené k danému zlomku je

$$\frac{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{ab}\right)}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{ac}\right)} = \frac{(a-b)\,(ab+1)}{(a-c)\,(ac+1)},$$

což je to samé – tedy zlomek je reálné číslo a jsme hotovi.

77. Upravíme tvar z definice.

$$\zeta_{k+n} = \cos\left(\frac{2\pi(k+n)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(k+n)}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n} + 2\pi\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \zeta_k.$$

80. Podle Moivrovy věty platí $\zeta_k \cdot \zeta_l = \zeta_1^k \cdot \zeta_1^l = \zeta_1^{k+l} = \zeta_{k+l}$. Dále jelikož má ζ_k absolutní hodnotu rovnou jedné, je $\overline{\zeta_k} = \frac{1}{\zeta_k}$. Podle první části cvičení ovšem platí $\zeta_k \cdot \zeta_{n-k} = \zeta_n = 1$, z čehož vidíme, že $\frac{1}{\zeta_k} = \zeta_{n-k}$.

83. Nejprve si všimni, že obě čísla budou kladná. Máme trochu nápovědně napsáno $2\cos 36^\circ$ Označme $\zeta = \cos 36^\circ + i\sin 36^\circ$ pátou odmocninu z jedné. Pak $2\cos 36^\circ = \zeta + \frac{1}{\zeta}$. Jak toto číslo určit? Platí

$$0 = 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 \implies 0 = \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} + 1 + \zeta + \zeta^2 = \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2 + \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - 1,$$

z čehož získáme $\zeta + \frac{1}{\zeta} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Pomocí formule pro dvojnásobný úhel získáme $\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

86. Můžeme postupovat analogicky jako u předchozí věty, dojdeme k

$$|\zeta_k - \zeta_\ell| = \sqrt{2 - (\zeta_{k-\ell} + \overline{\zeta_{k-\ell}})} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2(k-\ell)\pi}{n}}.$$

Analytická geometrie III – Vážení bodů

„Keď dojde zásoba trikov, mlátím to barycentrikou." – Hymna *i*KS

Vážený a milý příteli,
vítáme Tě u posledního dílu PraSečího seriálu na analytickou geometrii. I v tomto díle se budeme zabývat souřadnicemi, tentokrát ale souřadné osy x a y nahradí strany trojúhelníka ABC. Oprávněně se ptáš – proč, proboha, proč?

Takové souřadnice nabízejí spoustu výhod při řešení konfigurací svázaných s trojúhelníkem – mnoho je toho spojeno s přímkami. Body na stranách trojúhelníka můžeme uchopit velmi dobře, jelikož si ukážeme, že jsou to pouze vhodně navážené vrcholy. To ale není vše! V minulém díle jsme obecně rovnici přímky neměli a protínání přímek bylo takové kostrbaté, zatímco objekty jako kružnice či kolmice byly velmi přirozené. Barycentrické souřadnice nabízí v podstatě opačné výhody – kružnice nemají ani zdaleka tak jednoduchý tvar, kolmice jakbysmet. Je-li ale jedna věc, ve které tyto souřadnice dostanou za jedna, jsou to jednoznačně přímky a obsahy.

Vážení bodů a těžiště

Typicky se pro zavedení barycentrických souřadnic využívá vektorová definice. My ale vektory zcela vypustíme.

Definujeme na bodech operace sčítání a odčítání, a následně násobení a dělení reálným číslem. Operace provádíme po složkách (souřadnicích), tedy na chlup stejně jako u komplexních čísel – jen jsme vrátili velikost písmenek, místo $a + b$ budeme psát $A + B$.

Rozdíl mezi vektory a komplexními čísly je násobení. U vektorů se zavádí skalární součin, jehož výsledkem je reálné číslo (ne tedy vektor nebo bod). Zavedení skalárního součinu přeskočíme. Pokud ho nezavedeme, neodchýlíme se nijak od definice komplexních čísel a budeme moct (poněkud netradičně) ve vhodné chvíli počítat s body jako s komplexními čísly a pomocí toho dokázat tvrzení. Mimo důkazy však v tomto díle komplexní čísla nebudeme potřebovat.

Teď se už bez dalšího zdržování vydáme na cestu vážení.

Definice 1. *Těžiště* bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ s hmotnostmi[1] $m_1, m_2, \ldots, m_n$, jejichž součet není nula, je bod

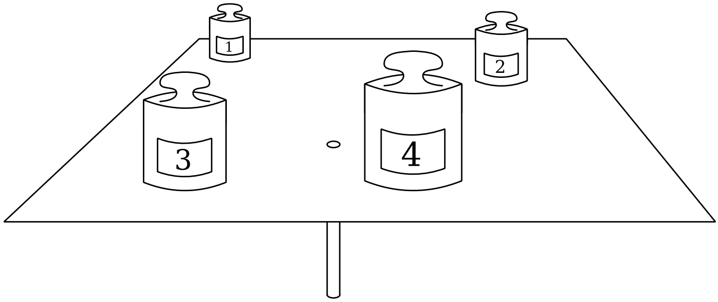
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 A_1 + m_2 A_2 + \cdots + m_n A_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Příklad 2. Mějme body A, B, C s hmotnostmi 1. Jejich těžiště je pak $\frac{1 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C}{1+1+1} = \frac{A+B+C}{3}$, což je podle předchozího dílu skutečně těžiště trojúhelníka ABC.

Cvičení 3. Urči souřadnice těžiště bodů $A = (2, 5)$ s vahou 1, $B = (1, 2)$ s vahou 2 a $C = (6, 3)$ s vahou 4.

[1] Nebo také vahami.

Poznámka 4. Pokud bychom na pevnou nehmotnou desku umístili bodová závaží s příslušnými hmotnostmi, tak by těžiště opravdu bylo v tomto bodě, čili bychom desku mohli vyvážit na prstě v těžišti. To nám poskytuje dobrou intuici. Například je-li jeden bod výrazně těžší než ostatní, bude těžiště blízko něj.



Pozorování 5. *Poloha těžiště nezávisí na tom, jak si zavedeme souřadnice.*

Jelikož je těžiště definováno souřadnicově, nemusí to být hned jasné. Nebudeme to tu však dokazovat. Vtip je v tom, že výraz dělíme součtem vah. Rozmysli si, že když třeba posuneme osu y o 1 doleva a x-ová souřadnice každého bodu se tak o 1 zvětší, zvětší se přesně o 1 i x-ová souřadnice těžiště. To znamená, že když jsme takto změnili souřadnice, zůstalo těžiště v rovině na stejném místě. Můžeš z toho snadno vyvodit, že nezáleží na tom, kam posuneme počátek soustavy souřadnic. Ovšem rozmyslet si, že nezáleží na tom, jak otočíme a naškálujeme osy, už je těžší.

Dále se podíváme na základní vlastnosti.

Například nezáleží na bodech s nulovou hmotností. Pokud má bod hmotnost nula, jako by nebyl. Pokud máme dva hmotné body na jednom místě, je to stejné, jako by tam byl jeden bod s jejich celkovou hmotností.

Všimněme si, že záleží jen na poměru hmotností. Pokud všechny hmotnosti vynásobíme jedním číslem, těžiště se nezmění. Konkrétně pokud je součet hmotností $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 1$, pak jmenovatel zmizí a těžiště je dáno vztahem $m_1A_1 + m_2A_2 + \cdots + m_nA_n$. Pokud mají váhy součet 1, říkáme, že jsou *normované*. Později v seriálu tuto podmínku budeme často vyžadovat.

Podobného efektu mimochodem také dosáhneme, pokud si dáme do těžiště počátek soustavy souřadnic, kteréhožto triku sis mohl(a) všimnout v minulém díle. Pak platí rovnou

$$m_1A_1 + m_2A_2 + \cdots + m_nA_n = (0, 0).$$

Zmínili jsme, že těžiště nezáleží na souřadnicích. Jak ho tedy najít bez jejich použití? Těžiště jednoho bodu je zjevně bod sám, no a dál ...

Těžiště dvou bodů

Tvrzení 6. *Pokud jsou A, B dva body s hmotnostmi m_A, m_B, pak je jejich těžiště právě ten bod na přímce AB, který splňuje*

$$\frac{AT}{TB} = \frac{m_B}{m_A},$$

kde AT, TB jsou orientované vzdálenosti.

Poměry jsou převrácené – pokud je A výrazně těžší než B, je těžiště blízko A.

Důkaz. Umístíme osu x tak, aby procházela body A, B. Můžeme ověřit, že jejich těžiště nehledě na váhy také leží na ose x (má nulovou souřadnici y). Umístíme tedy ještě počátek soustavy souřadnic do těžiště. Pak platí

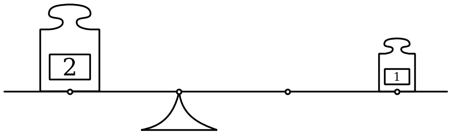
$$m_AA + m_BB = (0, 0) = T.$$

Poté je x-ová souřadnice bodu na ose x jeho orientovaná vzdálenost od počátku, tedy od T. Když se podíváme jen na x-ovou složku vzorce, dostaneme $m_A \cdot TA + m_B \cdot TB = 0$, což upravíme na

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{-TA}{TB} = \frac{AT}{TB}.$$

Hodnota poměru $\frac{AT}{TB}$ už zároveň jednoznačně určuje polohu bodu T na přímce AB. □

Poznámka 7. Toto tvrzení je přesně zákon páky z fyziky.



Pokud budeme požadovat součet hmotností 1, abychom mohli vynechat jmenovatele, dá se vzorec těžiště dvou bodů zapsat jako $tB + (1-t)A$ pro nějaké reálné t. V téhle podobě vzorec uvidíš nejčastěji. Dá se taky zapsat „vektorově“ jako $A + t(B - A)$ nebo $A + t \cdot \overrightarrow{AB}$. Parametr t značí, v jakém podílu cesty (úsečky) z A do B se těžiště nachází. Například nachází-li se těžiště v polovině cesty, dosadíme $t = \frac{1}{2}$ a dostaneme vskutku vzorec pro střed $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Nachází-li se za celou cestou, dosadíme $t = 1$ a dostaneme B, konec cesty. Shrnuje to následující tvrzení.

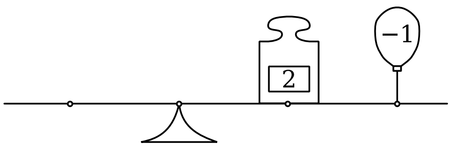
Tvrzení 8. *Mějme těžiště $T = tB + (1-t)A$. Pak je T právě ten bod na přímce AB, který splňuje*

$$\frac{AT}{AB} = t.$$

Důkaz. Podle předchozího tvrzení 6 platí $\frac{AT}{TB} = \frac{t}{1-t}$ neboli $(1-t)AT = t \cdot TB$. Rozepíšeme $t \cdot TB = t \cdot (TA + AB) = t \cdot (-AT + AB)$ a přičteme k oběma stranám $t \cdot AT$, čímž získáme $AT = t \cdot AB$. □

Jestli čteš pozorně, máš už možná podezření... nikdo neřekl, že hmotnost nesmí být záporná! Délky AT a TB ve tvrzení 6 bereme orientovaně. Pokud jsou obě hmotnosti kladné, má AT a TB stejné znaménko, takže leží T na úsečce AB. Pokud jsou obě hmotnosti záporné, vyjde to stejně, jako by byly obě kladné, protože záleží jen na poměru. Pokud je ale jedna kladná a jedna záporná, mají AT a TB opačná znaménka, takže leží T mimo úsečku AB, za tím bodem, který má vyšší absolutní hmotnost (těžiště tedy leží blíž těžšímu bodu). Z minulého dílu víme, že překlopení bodu B přes bod A je $2A - B$, je to tedy těžiště pro A o hmotnosti 2 a B o hmotnosti -1 (součet hmotností je 1, jak má být).

Jak si to představit fyzikálně? Místo závaží si na páce můžeš představit balónek, který ji táhne nahoru.



Přikládáme ještě dvě úlohy na poměrně zajímavou vlastnost těžiště. Ale dále ji nevyužijeme, takže se případně můžeš směle pustit do další sekce.

Úloha 9. Uvažme libovolnou přímku procházející těžištěm. Dokaž, že vážený součet orientovaných vzdáleností hmotných bodů od takové přímky je nulový.[2]

[2] Tedy $m_1 d_1 + m_2 d_2 + \cdots + m_n d_n = 0$, kde d_i je orientovaná vzdálenost bodu A_i od dané přímky.

Úloha 10. (znovu) Vrcholem A čtverce $ABCD$ prochází přímka p, která odděluje B od C a D. Dokaž, že $|Bp| + |Cp| = |Dp|$.

Barycentrické souřadnice

Omezíme se nyní pouze na trojúhelník ABC – ukážeme, že je těžiště jeho vrcholů určeno jejich vahami a dokonce i že váhy jsou také určeny polohou těžiště. A jelikož si v případě trojúhelníka body a čísla (váhy) takto odpovídají, budeme je moct používat jako souřadnice.

Věta 11. *Libovolný bod v rovině lze jednoznačně vyjádřit jako těžiště vrcholů trojúhelníka ABC s nějakými vahami, které mají součet 1.*

Důkaz. Nejdřív ukážeme, že každý bod nějak vyjádřit lze. K tomu si uvědomíme, že umíme-li vyjádřit dva body jako těžiště se součtem vah 1, umíme takto vyjádřit i každý bod na přímce procházející skrz ně. Mějme tedy

$$P = x_1 A + y_1 B + z_1 C \quad \text{a} \quad Q = x_2 A + y_2 B + z_2 C,$$

kde $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 1$. Každý bod na přímce PQ je podle tvrzení 8 možné vyjádřit jako $tQ + (1-t)P$ pro nějaké t. To můžeme rozepsat jako

$$(tx_2 + (1-t)x_1)A + (ty_2 + (1-t)y_1)B + (tz_2 + (1-t)z_1)C$$

a váhy mají skutečné součet 1, čili opravdu umíme správně vyjádřit každý bod na přímce PQ.

Potom už to jde lehce. Vrcholy trojúhelníka vyjádřit umíme, $A = 1 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ a podobně. Díky tomu umíme vyjádřit všechny body na přímkách obsahujících strany. A libovolný další bod jistě leží na nějaké přímce, která protne strany ve dvou různých bodech (stačí, aby taková přímka procházela vnitřkem trojúhelníka). Taková přímka už obsahuje dva vyjádřitelné body, proto se dá vyjádřit i každý další bod na ní. Tudíž můžeme libovolný bod v rovině vyjádřit jako těžiště vrcholů trojúhelníka ABC se součtem vah 1.

Nyní ukažme jednoznačnost vyjádření. Předpokládejme pro spor, že bod P můžeme vyjádřit jako

$$x_1 A + y_1 B + z_1 C = P = x_2 A + y_2 B + z_2 C,$$

kde se váhy liší, bez újmy na obecnosti $z_1 \neq z_2$. Pak

$$(x_1 - x_2)A + (y_1 - y_2)B + (z_1 - z_2)C = (0, 0),$$

tedy získáme

$$C = \frac{x_1 - x_2}{z_2 - z_1} A + \frac{y_1 - y_2}{z_2 - z_1} B.$$

Ukážeme, že součet koeficientů u A a B je roven jedné, tedy že C je vhodné těžiště bodů A a B. Platí $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 1$, tedy

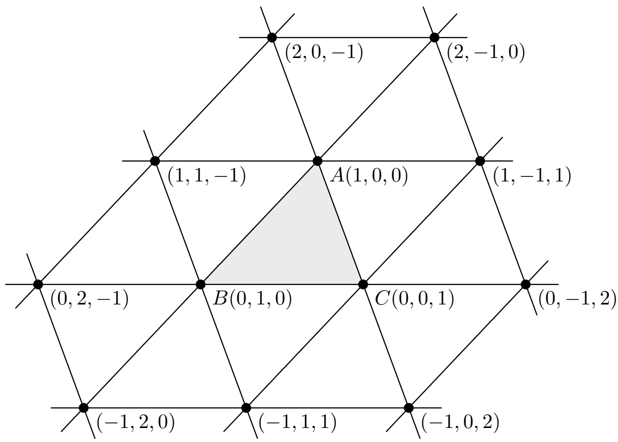
$$\frac{x_1 - x_2}{z_2 - z_1} + \frac{y_1 - y_2}{z_2 - z_1} = \frac{x_1 + y_1 - (x_2 + y_1)}{z_2 - z_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} = 1.$$

Pokud by tedy nějaký bod šel vyjádřit více různými způsoby, ležel by bod C na přímce AB, což je hledaný spor. □

Každý bod v rovině má tedy vůči trojúhelníku ABC jednoznačnou trojici vah, pro kterou je příslušným těžištěm. Trojúhelník tak definuje soustavu souřadnic, ve které můžeme každý bod zapsat. Této soustavě říkáme *barycentrická*[3].

[3] Barycentrum = těžiště.

Definice 12. Buď ABC daný trojúhelník a bod $P = xA + yB + zC$, tedy těžiště s vahami x, y a z kde $x + y + z = 1$. Poté budeme psát souřadnice bodu $P = (x, y, z)$ v barycentrické soustavě vzhledem k trojúhelníku ABC. Trojúhelníku ABC říkáme *referenční trojúhelník.*



Úmluva 13. Není-li řečeno jinak, předpokládejme, že pracujeme v barycentrické soustavě vzhledem ke trojúhelníku ABC.

Pojďme si rozmyslet pár základních věcí – body A, B a C mají souřadnice $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, respektive $(0, 0, 1)$. Střed strany BC je $\frac{B+C}{2} = 0A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, tedy bod $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Zdá se však, že jsme vzorec středu úsečky mohli rovnou použít na barycentrické souřadnice a vyhodnotit standardně po jednotlivých souřadnicích:

$$\frac{B+C}{2} = \frac{(0,1,0)+(0,0,1)}{2} = \frac{(0,1,1)}{2} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Zní rozumně, že by v souřadnicích definovaných vážením mělo jít vážit stejně hezky jako v kartézských, ne? Vskutku. Pokud si v barycentrických souřadnicích rovněž povolíme sčítání a násobení reálným číslem po složkách, můžeme hledat těžiště úplně normálně.

Pozorování 14. *Těžiště bodů $P_1, P_2, \ldots, P_n$ s hmotnostmi $m_1, m_2, \ldots m_n$, které mají pro jednoduchost součet jedna*[4]*, je (barycentricky vypočteno)*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i P_i = m_1 P_1 + m_2 P_2 + \cdots + m_n P_n.$$

Důkaz. Rozepíšeme si $P_i = x_i A + y_i B + z_i C$. Použijeme vzorec pro těžiště v kartézských souřadnicích a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i A + y_i B + z_i C),$$

což roznásobíme a z částí vytkneme A, B, C:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right) A + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\right) B + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right) C.$$

[4] Ale funguje to i obecně.

Těžiště tak má souřadnice

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i, y_i, z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i. \qquad \square$$

Vážíme-li kartézské body, stačí příslušně vážit obě jejich složky. Vidíme, že při zápisu v barycentrických souřadnicích postačí vážit příslušné tři složky. V důsledku toho se zachová mnoho „rozumných vlastností“ kartézských souřadnic (a komplexních čísel).

Věta 15. *Platí následující vlastnosti*

(1) *Střed úsečky XY je vážený bod $\frac{X+Y}{2}$.*
(2) *Střed úsečky BC má souřadnice $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*
(3) *Překlopení bodu Y podle bodu X je vážený bod $2X - Z$.*
(4) *Body $XYZT$ tvoří rovnoběžník, právě pokud platí $X + Z = Y + T$.*
(5) *Těžišti trojúhelníka XYZ přísluší číslo $\frac{X+Y+Z}{3}$.*
(6) *Těžiště trojúhelníka ABC má souřadnice $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.*

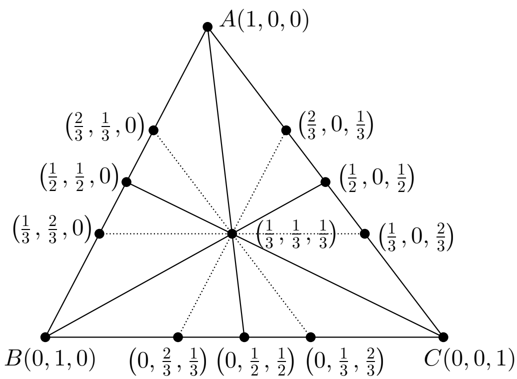
Důkaz. První tři vlastnosti plynou hned z tvrzení 6 a předchozího pozorování, že v barycentrických souřadnicích funguje vážení stejně. Dále body X, Y, Z a T tvoří rovnoběžník právě tehdy, když bod T je překlopením bodu Y podle středu úsečky XZ, tedy dle prvního a třetího bodu máme

$$T = 2 \cdot \frac{X+Z}{2} - Y = X + Z - Y.$$

Těžiště trojúhelníka XYZ umíme spočítat od předchozího dílu seriálu, ovšem dá se spočítat i postupným vážením. Jelikož leží těžiště ve třetině těžnice, můžeme pro těžiště T a M střed YZ psát

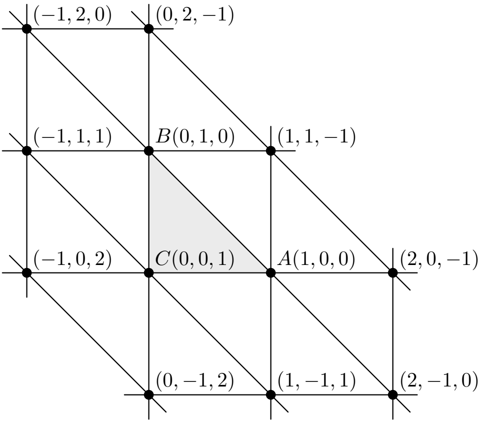
$$T = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}X = \frac{2}{3} \cdot \frac{Y+Z}{2} + \frac{1}{3}X = \frac{X+Y+Z}{3}.$$

Poslední bod je pak zřejmý. $\square$



Cvičení 16. Urči souřadnice středu těžnice z vrcholu A.

Poznámka 17. Kartézské souřadnice jsou v podstatě zvláštní případ barycentrických. Na následujícím obrázku jsme si zvolili pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Když si odmyslíš třetí souřadnici, zbydou Ti dvě důvěrně známé kartézské.



Domluvme se nyní na malé nekalosti. U souřadnic středů stran a těžiště se vyskytují zlomky, kterými se jako správní matematici nechceme zatěžovat. Kvůli tomu si zavedeme *homogenní souřadnice*, v nichž budeme moct všechny souřadnice (váhy) vynásobit jedním číslem. Z definice těžiště na tom nezávisí.

Definice 18. Pro libovolné nenulové reálné k ztotožněme homogenní bod $(kx : ky : kz)$ s bodem (x, y, z) v barycentrické soustavě souřadnic.

Dvojtečky značí, že určujeme jen poměr vah, které však nejsou nutně normované. Nezáleží tedy, zda píšeme $(x : y : z)$, $(-2x : -2y : -2z)$ nebo $(999x : 999y : 999z)$, myslíme tím vždy ten samý bod. Střed strany BC a těžiště trojúhelníka ABC pak můžeme trochu stravitelněji zapsat ve tvaru $(0 : 1 : 1)$ a $(1 : 1 : 1)$. Hned vypadají trochu líp, co?

Cvičení 19. Jak vyjádříš daný bod $(r : s : t)$ v normovaných souřadnicích?

Lemma 20. *Bod P leží na přímce BC. Pak má barycentrické souřadnice*

$$(0 : CP : PB) \text{ neboli } \left(0, \frac{CP}{CB}, \frac{PB}{CB}\right),$$

kde CP a PB jsou orientované vzdálenosti.

Důkaz. Jde znovu o tvrzení 6 a 8. Druhou variantu můžeme alternativně odvodit tak, že znormujeme souřadnice v první variantě a využijeme $CP + PB = CB$. □

Analogicky platí pro body na přímkách obsahujících ostatní strany – nula je u protějšího vrcholu a vzdálenosti k vrcholům u strany jsou prohozené. Souřadnice daného bodu jsou tedy pouze převrácený poměr vzdáleností bodu k příslušných vrcholům. Souřadnice tohoto bodu můžeme zapsát i opačně orientovaně jako $(0 : PC : BP)$ nebo $\left(0, \frac{PC}{BC}, \frac{BP}{BC}\right)$. Nemůžeš ale dopustit, aby se změnila orientace (znaménko) jen jednoho výrazu – například když je P uvnitř strany, musí mít souřadnice stejné znaménko (viz obrázek). Poněvadž chodí poměry v rozličných formách, nejprve s nimi zacvičíme, aby nás pak v úlohách nezaskočily.

Cvičení 21. Urči v závislosti na k barycentrické souřadnice bodu P, jestliže:

(1) Leží na straně AC a $\frac{|PA|}{|PC|} = k$.

(2) Leží na straně BC a $\frac{|PC|}{|BC|} = k$.

(3) Leží na přímce BC mimo stranu BC a $\frac{|PB|}{|PC|} = k$.

Přímky

Pojďme se nyní zabývat přímkami – v nich totiž leží největší síla barycentrických souřadnic. V těchto souřadnicích protneme libovolné dvě přímky jedna báseň. Začněme zlehka.

Libovolný bod na přímce BC můžeme vyjádřit jako vážený bod $tB + (1-t)C = (0, t, 1-t)$. Tímto výrazem lze vyjádřit jakýkoliv bod, který má první souřadnici nulovou. Přímka BC má tedy rovnicové vyjádření $x = 0$, přímky CA a AB jsou analogicky $y = 0$ a $z = 0$. Můžeš si to zkontrolovat na obrázcích. Obecně mají rovnice všech přímek podobně jako v kartézských souřadnicích velmi jednoduchý tvar.

Věta 22. *Obecná rovnice přímky je*

$$ux + vy + wz = 0,$$

kde u, v, w jsou nějaké reálné konstanty.

Důkaz. V kartézských souřadnicích je obecná rovnice přímky $rx+sy+t = 0$. Buď P barycentrický bod $(x,\ y,\ z)$, tedy $xA + yB + zC$ (pozor, je to jiné x a y než v kartézských souřadnicích!). Má-li A kartézské souřadnice $(A_1,\ A_2)$ a obdobně B, C, dostaneme kartézsky

$$P = (xA_1 + yB_1 + zC_1, xA_2 + yB_2 + zC_2).$$

Dosadíme do kartézské rovnice přímky a roznásobíme:

$$xA_1r + yB_1r + zC_1r + xA_2s + yB_2s + zC_2s + t = 0.$$

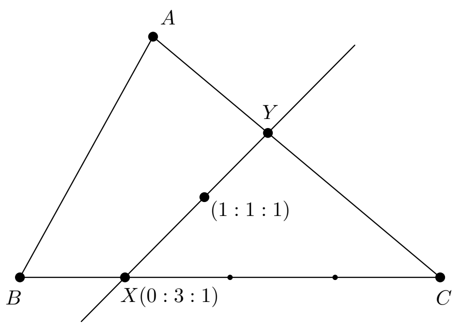
„Zesložitíme“ tento výraz rozepsáním $t = t(x + y + z)$ a přeuspořádáme členy na

$$(A_1r + A_2s + t)x + (B_1r + B_2s + t)y + (C_1r + C_2s + t)z = 0,$$

což je hledaná rovnice, v níž vystupují reálné konstanty $u = A_1r + A_2s + t$, $v = B_1r + B_2s + t$, $w = C_1r + C_2s + t$. □

Dosazením $t = t(x + y + z)$ jsme se zbavili konstanty. Můžeš si však odvodit, že rozepsáním $z = 1 - x - y$ bychom rovnici libovolné přímky mohli napsat jako $ux + vy + w$ s konstantami u, v, w a analogicky bychom mohli vynechat libovolnou souřadnici. Tvar $ux + vy + wz = 0$ má ale jednu výhodu, že můžeme dosazovat homogenní (nenormované) souřadnice. Pro $k \neq 0$ je totiž $u(kx) + v(ky) + w(kz) = 0$ ekvivalentní s $ux + vy + wz = 0$. Stejně tak vidíme, že i konstanty u, v, w můžeme vynásobit jedním číslem a nic se nezmění. Předvedeme si to na příkladě.

Příklad 23. Přímka prochází těžištěm trojúhelníka ABC, stranu BC protíná v bodě X a stranu AC v bodě Y. Jestliže platí $\frac{|BX|}{|BC|} = \frac{1}{4}$, urči $\frac{|AY|}{|AC|}$.



Řešení. Bod X má souřadnice $(0 : 3 : 1)$ neboli $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Těžiště má souřadnice $(1 : 1 : 1)$. Najdeme rovnici přímky procházející těmito dvěma body. Hledáme tedy u, v, w takové, že je pro souřadnice obou bodů splněno $ux + vy + wz = 0$. Co znamená, že můžeme dosadit homogenní souřadnice? Dosadíme-li normované souřadnice prvního bodu, vyjde

$$u \cdot 0 + v \cdot \frac{3}{4} + w \cdot \frac{1}{4} = 0,$$

což však můžeme rovnou vynásobit čtyřmi – nemuseli jsme tedy ani počítat normované souřadnice a mohli jsme dosadit z homogenních souřadnic $(0 : 3 : 1)$ a pohodlně dostat $3v + w = 0$. Stejně tak dosadíme $(1 : 1 : 1)$ a dostaneme $u + v + w = 0$. Máme dvě rovnice pro tři neznámé u, v, w, ale to stačí, protože záleží jen na jejich poměrech. Vynásobení všech jedním číslem, jak jsme řekli, nic nezmění. Stačí proto najít jakékoliv řešení. Zde můžeme zkusit celočíselné, z první rovnice vymyslíme $v = 1$, $w = -3$, z druhé pak dostáváme $u = 2$. Daná přímka má předpis $2x + y - 3z = 0$.

Dále najdeme bod Y, průsečík přímky se stranou AC. Rovnici strany AC už jsme zmínili, ale každopádně bychom ji mohli najít coby přímku skrz body A, C, velmi snadno vyjde rovnice $y = 0$. Průsečík těchto dvou přímek spočítáme soustavou příslušných dvou rovnic pro tři neznámé x, y, z, kde je zase víc řešení, protože můžou vyjít nenormované body. Jestliže hledáme normované souřadnice, přidáme si za třetí rovnici podmínku $x + y + z = 1$.

Řešením je bod $(3 : 0 : 2)$ neboli $\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$. Podle lemmatu 20 platí $(3 : 0 : 2) = (CY : 0 : YA)$ a

$$\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{CY}{CA}, 0, \frac{YA}{CA}\right).$$

Vychází $\frac{|AY|}{|AC|} = \frac{2}{5}$.

Cvičení 24. Rozmysli si, že

(1) Rovnice každé přímky skrz A splňuje $u = 0$, tedy je tvaru $vy + wz = 0$.
(2) Rovnice těžnice z vrcholu A je $y = z$.
(3) Rovnice střední příčky vzhledem ke straně BC je $x = y + z$.

Všimněme si, že střed strany má homogenní souřadnice $(0 : 1 : 1)$, což je stejné jako těžiště, pouze s nulovou první souřadnicí. To vůbec není náhoda, v následujícím cvičení si máš rozmyslet, jak vypadá protínání přímek procházejících vrcholem trojúhelníka (tzv. *ceviány*) s opačnou stranou. S tím už máš nástroje na to dobušit si svých prvních pár pořádnějších úloh.

Cvičení 25. Přímka procházející vrcholem A a bodem $P = (r : s : t)$ protne přímku BC v bodě $(0 : s : t)$. Analogicky se z jiného vrcholu na protější stranu vynuluje příslušná souřadnice.

Cvičení 26. V trojúhelníku ABC leží na straně AC bod E tak, že $|CE| = 3|AE|$, a na straně AB bod F tak, že $|BF| = 3|AF|$. Jestliže se přímky BE a CF protnou v bodě O a přímka AO protne stranu BC v bodě D, spočítej poměry $\frac{|OB|}{|OE|}$ a $\frac{|OD|}{|OA|}$.

Úloha 27. Na stranách BC, CA, AB trojúhelníka ABC leží po řadě body D, E, F, přičemž platí $|AE| = |AF| = |CD| = 2$, $|BD| = |CE| = 2$ a $|BF| = 5$. Přímky DE a CF se protínají v bodě K. Urči poměry $\frac{|KD|}{|KE|}$ a $\frac{|KC|}{|KF|}$.

Úloha 28. Je daný trojúhelník ABC s těžištěm T. Označme D bod takový, že B je střed úsečky AD a podobně E bod takový, že C je střed úsečky AE. Ukaž, že přímky TD, AT a TE dělí stranu BC na čtvrtiny. (CPSJ 2019)

Úloha 29. V trojúhelníku ABC označíme M a N po řadě středy stran AB a AC. Body D, E leží na úsečce BC tak, že $|BD| = |DE| = |EC| = \frac{1}{3}|BC|$. Konečně, přímky DM a EN se protnou v bodě P. Dokaž, že $ABPC$ je rovnoběžník.

Cvičení 30. Rozmysli si, jak spočítat rovnici přímky p procházející bodem $D \in AB$ rovnoběžnou se stranou BC.

Zatím jsme přímky počítali pomocí soustavy rovnic, kterou splní koeficienty rovnice $ux + vy + wz = 0$. V příští sekci si ukážeme, jak si práci ulehčit. Poznamenejme, že všechny zatím uvedené úlohy jsou *afinní*, tedy se zabývají pouze body, které jsou na úsečkách v pevných poměrech. Abychom se z afinního prostoru vymanili, musíme do barycentrických souřadnic začít psát výrazy s délkami nebo úhly.

Obsahy

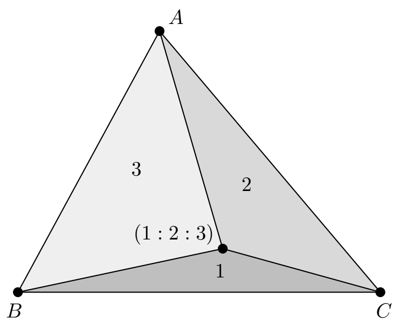
Možná se ptáš – v čem je výhoda barycentrických souřadnic oproti vážení bodů ve víceúhelnících? Barycentrické souřadnice totiž mají ještě jednu obří výhodu – jsou přirozeně spjaté s délkami, podobnostmi a obsahy. Pojďme se k jejich propojení postupně propracovat, začneme zlehka s body na straně.

Úloha 31. Jaké jsou souřadnice paty výšky a osy úhlu vedoucí z vrcholu A? Můžeš je vyjádřit v závislosti na délkách stran nebo na úhlech v trojúhelníku ABC.

Věta 32. (stěžejní) *Bod P má barycentrické souřadnice*

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[APC]}{[ABC]}, \frac{[ABP]}{[ABC]}\right) = ([PBC] : [APC] : [ABP]),$$

kde $[XYZ]$ značí orientovaný obsah trojúhelníka XYZ.[5]



Důkaz. Označme K průsečík přímek AP a BC a $P = (u, v, w)$. Podle cvičení 25 platí $K = (0 : v : w)$. Z lemmatu 20 plyne

$$\frac{KC}{BK} = \frac{v}{w}.$$

Protože mají trojúhelníky AKC a ABK stejnou výšku na stranu (přímku) BC, jsou jejich obsahy úměrné délce jejich strany na té přímce, takže platí také

$$\frac{[AKC]}{[ABK]} = \frac{KC}{BK}.$$

Tyto dva trojúhelníky zároveň sdílí stranu AK. Pokud ji zkrátíme či prodloužíme, změní se obsahy stejným poměrem. Změníme ji tedy na AP a dostaneme

$$\frac{[APC]}{[ABP]} = \frac{[AKC]}{[ABK]}.$$

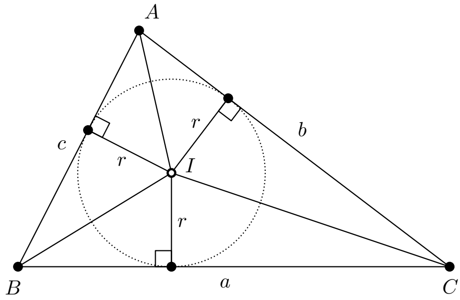
Ze všech tří rovností dohromady získáváme poměr dvou souřadnic, což můžeme cyklicky zopakovat pro ostatní souřadnice, takže získáme $P = ([PBC] : [APC] : [ABP])$. □

Pozorování 33. *Bod leží uvnitř trojúhelníka právě tehdy, když všechny jeho souřadnice mají stejné znaménko.*

[5] Když jdou vrcholy po směru hodinových ručiček, je obsah záporný.

Jistě se, vážený čtenáři, ptáš – k čemu je nám tato obsahová definice? Tvé otázky budou vyslyšeny, pomocí této klíčové vlastnosti barycentrických souřadnic můžeme s přehledem určit mnoho známých středů trojúhelníka.

Příklad 34. Střed kružnice vepsané má barycentrické souřadnice $I = (a : b : c)$.



Důkaz. Nechť je r poloměr kružnice vepsané. Obsah trojúhelníka ABI je $\frac{1}{2}cr$, protože r je jeho výška na stranu c. Analogicky je $[IBC] = \frac{1}{2}ar$ a $[AIC] = \frac{1}{2}br$. Takže platí

$$I = \left(\frac{1}{2}ar : \frac{1}{2}br : \frac{1}{2}cr\right) = (a : b : c).$$ □

Cvičení 35. Nalezni pomocí obsahové definice barycentrické (stačí homogenní) souřadnice středu kružnice opsané a ortocentra. Můžeš je zapsat v závislosti na vnitřních úhlech trojúhelníka.

Úloha 36. Pomocí délek stran trojúhelníka ABC a $s = \frac{a+b+c}{2}$ nalezni souřadnice dotyků kružnice vepsané a kružnic připsaných ke stranám trojúhelníka.

S jednotlivými body jsme si užili zábavu, co se podívat na obsahy? Možná teď už vidíš, že barycentrické souřadnice budou na počítání obsahů jako dělané, ale jak přesně na to?

Definice 37. Uvažme body s barycentrickými souřadnicemi $(x_1 : y_1 : z_1)$, $(x_2 : y_2 : z_2)$ a $(x_3 : y_3 : z_3)$. Pak definujeme *determinant*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2z_3 - x_3z_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2).$$

Poznámka 38. Vzorec se dá roznásobit na šest součinů a v každém z nich je z každého řádku i z každého sloupce právě jeden činitel. Součiny však mají různá znaménka – kladné, pokud jsou souřadnice, které bereme z prvního, druhého a třetího řádku ve správném cyklickém pořadí, tedy $\ldots xyzxyz \ldots$; naopak záporné, pokud jsou v obráceném cyklickém pořadí, tedy $\ldots zyxzyx \ldots$ Jinak řečeno, buď jdeme do dalšího řádku a vždy vezmeme další souřadnici (a jdeme dokola), pak je znaménko kladné, nebo jdeme do dalšího řádku a vždy vezmeme předchozí souřadnici, pak je znaménko záporné.[6] Schématicky to vypadá takhle:

$$\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & y_2 & \\ & & z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & y_1 & \\ & & z_2 \\ x_3 & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & z_1 \\ x_2 & & \\ & y_3 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & z_1 \\ & y_2 & \\ x_3 & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & y_1 & \\ x_2 & & \\ & & z_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & & z_2 \\ & y_3 & \end{pmatrix}$$

[6] Pozor ale, aby Tě to pak nezmátlo v lineární algebře: tento princip neplatí pro matice větší než 3×3.

Cvičení 39. (vlastnosti determinantu)

(1) Jak se změní determinant, když vynásobím jeden řádek reálným číslem (po složkách)?
(2) Jaký je determinant, když je jeden řádek celý nulový?
(3) Jaký je determinant, když platí $(x_1 : y_1 : z_1) = (x_2 : y_2 : z_2)$?
(4) Jak se změní determinant, když k jednomu řádku přičtu nějaký násobek druhého?

První bod cvičení se zejména hodí, když musíme dosazovat normované body (uvidíš kde). Pak dosadíme

$$\left(\frac{r}{r+s+t}, \frac{s}{r+s+t}, \frac{t}{r+s+t}\right),$$

kde máme celý řádek vynásobený $\frac{1}{r+s+t}$, takže můžeme dosadit prostě $(r : s : t)$ a výsledek jen vydělit $r + s + t$.

Poznámka 40. (Teoretická) Determinanty pochází ze světa lineární algebry, konkrétně vyjadřují jistý (orientovaný) obsah spřízněný s danou maticí, to si ukážeme i v následující větě. Mnoho z teorie barycentrických souřadnic, kterou zde zmiňujeme, lze elegantně vysvětlit slovy lineární algebry. Pro hlubší pochopení barycentrických souřadnic tedy doporučujeme si načíst i základy lineární algebry...

Znalosti z lineární algebry pak mohou poskytnout překvapivě elegantní pravidlo vhodné na počítání obsahů. Úplný důkaz si zde neuvedeme, najdeš ho například v článku od Zacha Abela.[7]

Věta 41. *Mějme body P, Q, R s normovanými souřadnicemi (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) a (x_3, y_3, z_3). Pak orientovaný obsah trojúhelníka PQR je*

$$[PQR] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} [ABC].$$

Pokud však nehodláš uvěřit, dokud nebudeš mít důkaz, nabízíme Ti náčrt: ukaž si pomocí vlastností determinantu, že pokud věta platí pro trojúhelník PQR, platí to i pro trojúhelník $P'QR$, kde bod $P' = kP + (1-k)Q$ leží na přímce PQ – tedy že věta zůstane platná, pokud budeš posouvat vrcholy po stranách. Dále si všimni, že pro trojúhelník ABC věta platí a rozmysli si, že z něj posouváním vrcholů po stranách můžeš dostat libovolný trojúhelník PQR.

Máš hotovo nebo to nepotřebuješ zkoušet? Výborně, pojď s námi na příklad.

Příklad 42. V trojúhelníku leží po řadě body X, Y, Z uvnitř stran BC, AC a AB tak, že

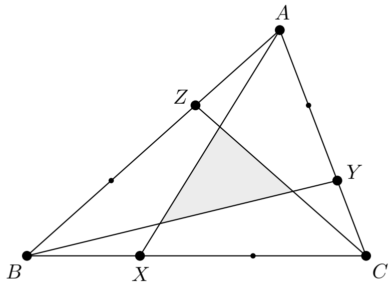
$$\frac{|BX|}{|BC|} = \frac{|CY|}{|CA|} = \frac{|AZ|}{|AB|} = k.$$

Dokažme, že pro $k = \frac{1}{3}$ vytínají přímky AX, BY a CZ trojúhelník, jehož obsah je sedmkrát menší než obsah ABC.

Řešení. Jednoduše spočítáme všechny průsečíky a využijeme předchozí větu. Dle lemmatu 20 platí $X = (0 : 2 : 1)$ a podobně $Y = (1 : 0 : 2)$ a $Z = (2 : 1 : 0)$. Přímka AX má proto rovnici $y = 2z$, přímka BY zase $z = 2x$. Jejich průsečík určíme jako $(1 : 4 : 2) = \left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$ a podobně spočítáme i zbylé dva průsečíky (pouze protáčíme souřadnice). Konečně, podle naší věty je hledaný podíl obsahů roven

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{7^3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}.$$

[7] *http://zacharyabel.com/papers/Barycentric_A07.pdf*



Cvičení 43. V trojúhelníku ABC leží bod P a označme D, E, F po řadě průsečíky přímek AP, BP a CP se stranami BC, AC a AB. Potom dokaž nerovnost neorientovaných obsahů

$$[ABC] \geq 4[DEF].$$

Kdy nastane rovnost?

Úloha 44. Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něj bod U. Označme A', B' a C' po řadě obrazy bodů A, B, C v souměrnosti se středem U. Dokaž, že pokud je šestiúhelník $AC'BA'CB'$ konvexní, potom má obsah $2[ABC]$. (Krajské kolo MO 2011)

Úloha 45. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř jeho stran AB a AC jsou po řadě zvoleny body X a Y. Označme Z průsečík úseček BY a CX. Dokaž nerovnost neorientovaných obsahů

$$[BZX] + [CYZ] \geq 2[XZY].$$

(Celostátko 2020)

Úloha 46. (delší) Buďte O, H, I po řadě střed kružnice opsané, ortocentrum a střed kružnice vepsané. Pak trojúhelník OHI má obsah

$$[OHI] = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{8r}[ABC].$$

Počítání obsahů v barycentrických souřadnicích je tedy asi tak těžké, jako sečíst devět čísel – proto přesně se této technice někdy přezdívá „areal coordinates“.

Co můžeme ještě dělat s tímto vzorcem? Co například znamená, když má trojúhelník nulový obsah?

Důsledek 47. (Rovnice přímky znovu) *Tři body P, Q a R s (nyní už ne nutně normovanými) souřadnicemi $(x_1 : y_1 : z_1)$, $(x_2 : y_2 : z_2)$ a $(x_3 : y_3 : z_3)$ leží na přímce právě tehdy, když platí*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Speciálně rovnice přímky procházející body $(x_1 : y_1 : z_1)$ a $(x_2 : y_2 : z_2)$ je

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \iff x(y_1z_2 - y_2z_1) - y(x_1z_2 - x_2z_1) + z(x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Všimni si, že zde už nepožadujeme normované body. Podle cvičení 39 totiž to, jestli je determinant nulový, nezáleží na tom, jestli řádek vynásobíme nenulovým číslem.

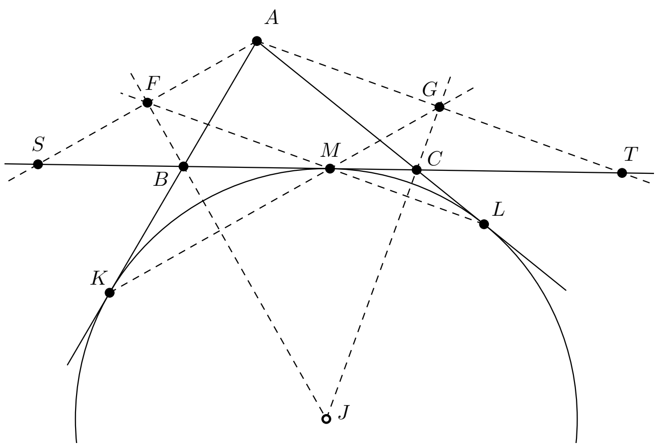
Cvičení 48. Dokaž jednu implikaci předchozího důsledku pomocí vážení bodů na přímce a cvičení 39.

Díky tomu si můžeme při hledání rovnic přímek ušetřit řešení soustavy rovnic. Jakmile dostaneš do ruky počítání determinantu, rovnice přímky už pro Tebe bude zcela rutinní záležitost – my výrazně doporučujeme počítat přímky tímto způsobem.

Úloha 49. Najdi rovnici osy vnitřního a vnějšího úhlu BAC a dokaž, že střed kružnice připsané ke straně BC je roven $(-a : b : c)$. Adaptuj větu o ose úhlu pro vnější úhel.

Jak zákon káže, naši nově získanou teorii si musíme vyzkoušet na nějaké oběti. A není lepší oběť, než úloha z mezinárodní matematické olympiády.

Příklad 50. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice připsaná ke straně BC má střed J a dotýká se přímek AB, AC a BC po řadě v bodech K, L a M. Průsečík přímek LM a BJ označme F, průsečík přímek KM a CJ pak G. Konečně body S, T jsou po řadě průsečíky přímek AF a AG s přímkou BC. Dokažme, že M je středem úsečky ST. (IMO 2012)



Řešení. Zaveďme souřadnice vzhledem k ABC. Dle předchozí úlohy platí $J = (-a : b : c)$ a podle úlohy 36 píšeme $M = (0 : s-b : s-c)$, $K = (c-s : s : 0)$. Přímka KM má rovnici

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & s-b & s-c \\ c-s & s & 0 \end{vmatrix} = -xs(s-c) - y(s-c)^2 + z(s-c)(s-b) \Longrightarrow 0 = -xs - y(s-c) + z(s-b),$$

jelikož díky trojúhelníkové nerovnosti můžeme krátit $s-c > 0$. Přímka CJ má zase rovnici $bx + ay = 0$ a průsečík těchto dvou přímek spočítáme jako řešení příslušné homogenní soustavy, což vyjde s krácením

$$G = (-a(s-b) : b(s-b) : b(s-c) - as) = (-a(s-b) : b(s-b) : -(a+b)(s-b)) = (-a : b : -(a+b)),$$

tedy $T = (0 : -b : a+b) = \left(0, -\frac{b}{a}, \frac{a+b}{b}\right)$. Obdobně získáme $S = \left(0, \frac{a+b}{a}, -\frac{a}{b}\right)$, z čehož už hned vidíme, že $\frac{S+T}{2} = M$.

Úloha 51. V trojúhelníku ABC najdi souřadnice těžiště trojúhelníku, jehož vrcholy jsou body dotyku kružnice vepsané. Dokaž navíc, že leží na přímce procházející těžištěm a středem kružnice vepsané trojúhelníka ABC.

Úloha 52. V trojúhelníku ABC je M střed strany BC a I střed kružnice vepsané. Přímka MI protíná výšku z bodu A v bodě F. Dokaž, že délka úsečky AF je rovná poloměru kružnice vepsané.

Úloha 53. Je dán trojúhelník ABC a bod P uvnitř. Označme D, E a F po řadě průsečíky přímek AP, BP a CP s příslušnou protější stranou. Dokaž, že platí

$$[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{1}{2}[ABC]$$

právě tehdy, když P leží na jedné z těžnic trojúhelníka. (USA TST 2003)

Úloha 54. Je dán trojúhelník ABC, jehož každé dvě strany se liší alespoň o délku $d > 0$. Označme T jeho těžiště, I střed kružnice vepsané a r její poloměr. Dokaž, že

$$[AIT] + [BIT] + [CIT] \geq \frac{2}{3}dr.$$

(Celostátko 2015)

Na jedné přímce, v jednom bodě ...

Přesně tato slova zakončují zadání velkého množství olympiádních úloh, se kterými se setkáš. Na důkaz tvrzení takového typu máme nemálo technik – použití stejnolehlosti, převedení na nějakou známou přímku... Co kdybychom si ale mohli pomoct výpočtem? Pokud naše tři přímky připoutáme k jednomu trojúhelníku, potom kritérium, kdy se tři přímky protínají v jednom bodě, zní jednoduše.

Věta 55. (Cevova) *Je dán trojúhelník ABC a na stranách a, b, c po řadě body D, E, F. Potom se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě, právě když platí*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Důkaz. Vhodně použijeme cvičení 25 a lemma 20. Uvažme $P = (d, e, f)$ průsečík přímek AD a BE. Pak $D = (0 : e : f)$ a $E = (d : 0 : f)$. Průsečík $CP \cap AB$ je $F' = (d : e : 0)$, což je jediný bod splňující

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{e}{d} = \frac{e}{f} \cdot \frac{f}{d} = \frac{CD}{DB} \cdot \frac{AE}{EC}.$$

Přímka CF tedy prochází bodem P, právě když je $F = F'$, což platí, právě když

$$\frac{AF}{FB} = \frac{CD}{DB} \cdot \frac{AE}{EC}.$$

□

Pojďme si vychutnat sílu této věty, jelikož na mnohé standardní konfigurace v trojúhelníku je jako dělaná. Přemýšlel(a) jsi někdy nad tím, proč se vlastně osy úhlu, výšky či podobné přímky v trojúhelníku opravdu protínají v jednom bodě? Když jsme vybaveni Cevovou větou, bude to pro nás hračka dokázat.

Cvičení 56. Dokaž, že se následující přímky v daném trojúhelníku ABC protínají v jednom bodě a najdi souřadnice jejich průsečíků (ano, některé body už znáš):

(1) těžnice,
(2) osy úhlů,
(3) výšky,
(4) spojnice vrcholů a bodů dotyku kružnice vepsané s protější straonu,
(5) spojnice vrcholů a bodů dotyku kružnic připsaných na protější stranu.

Vyvstává otázka – můžeme Cevovu větu zobecnit? Následující věta podává obecné kritérium, kdy tři přímky prochází jedním bodem. Snadno si můžeš ověřit, že pro tři ceviány věta dává právě Cevovu větu.

Věta 57. *Uvažme tři přímky $u_i x + v_i y + w_i z = 0$ pro $i = 1, 2, 3$. Pak tyto tři přímky prochází jedním bodem právě tehdy, když platí*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Důkaz. (náznak) Všiml(a) sis, že když jsme řešili přímky bez determinantů, jen soustavami rovnic, tak vypadalo hledání přímky procházející dvěma body stejně jako hledání průsečíku dvou přímek? V rovnicích $ux + vy + wz = 0$ byly akorát jednou x, y, z známé a u, v, w neznámé a podruhé naopak. Když jsme pak dosadili x, y, z do determinantu, odhalili jsme kritérium, kdy jsou tři body na jedné přímce.

Rovnicemi bychom to ověřili tak, že by přímka skrz každé dva z nich vyšla vždy stejně. To, že se tři přímky protnou v jednom bodě, bychom rovnicově ověřili tak, že by průsečík každých dvou vyšel stejně. Ale výpočty při tom ověřování by byly totožné až na záměnu x, y, z a u, v, w. A v případě bodů se toto ověření dalo snáze provést s determinanatem. Dává tedy smysl, že když do determinantu dosadíme u, v, w, získáme kritérium, kdy se tři přímky protínají v jednom bodě. □

Úloha 58. V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná dotýká stran AC a BC v bodech D a E. Dokaž, že osa úhlu $\sphericalangle BAC$, střední příčka vzhledem k vrcholu B a přímka DE prochází jedním bodem.

Cvičení 59. (Izotomičtí kamarádi) Je dán trojúhelník ABC a na stranách a, b, c po řadě body D, E, F takové, že se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě $P = (u, v, w)$. Překlopíme body D, E, F podle středů příslušných stran na body D', E', F'. Pak se i přímky AD', BE' a CF' protínají v jednom bodě. Jaký bude mít tento bod souřadnice?

Věta 60. (Menelaova) *Je dán trojúhelník ABC a na přímkách BC, AC, AB po řadě body D, E, F. Potom body D, E a F leží na přímce, právě když platí*

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = -1.$$

Důkaz. Uvažme nějakou přímku $ux + vy + wz = 0$. Jelikož orientovaný poměr $\frac{AF}{BF}$ jednoznačně určuje pozici bodu F, stačí nám ukázat, že libovolné tři body ležící na přímce splňují daný vztah. Průsečíky dané přímky se stranami budou body po řadě $D = (0 : -w : v)$, $E = (w : 0 : -u)$ a $F = (-v : u : 0)$. Pak

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{v}{-w} \cdot \frac{w}{-u} \cdot \frac{u}{-v} = -1,$$

je tedy hotovo. □

Úloha 61. V trojúhelníku ABC leží bod P a označme D, E, F po řadě průsečíky přímek AP, BP a CP se stranami BC, AC a AB. Dokaž, že platí

$$\frac{|PD|}{|AD|} + \frac{|PE|}{|BE|} + \frac{|PF|}{|CF|} = 1.$$

Úloha 62. Ve čtyřstěnu $ABCD$ označme středy kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD, CDA, DAB, ABC po řadě I_A, I_B, I_C, I_D. Nechť platí, že úsečky AI_A, BI_B, CI_C a DI_D prochází jedním bodem. Dokaž, že

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$

(Prase 39–1j–7)

Kružnice

Jak jsme viděli, oproti komplexním číslům si barycentrické souřadnice mnohem více rozumí s přímkami. V úvodu jsme Ti slíbili, že i rovnici kružnice můžeme explicitně vyjádřit. Možná překvapivé bude, že právě komplexní čísla nám pomůžou odemknout plnou krásu kružnic v barycentrických souřadnicích. I když je rovnice kružnice zdaleka nejméně hezkou věcí, se kterou se v tomto dílu potkáme, ukážeme si, jak je dobře využívat.

Věta 63. *Obecná rovnice kružnice je*

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0,$$

kde u, v, w jsou nějaké reálné konstanty.

Důkaz. Zde trikově využijeme komplexních čísel. Aby se nám body A, B, C nepletly s délkami stran a, b, c, budeme komplexní čísla taky psát velkými písmeny. Uvažme takovou soustavu souřadnic, že je daná kružnice jednotková (A, B, C na ní nemusí ležet). To, že na ní bod P leží, se pozná ze vztahu $P\overline{P} = 1$. Pochopitelně použijeme rozepsání $P = xA + yB + zC$.

$$\begin{aligned}(xA + yB + zC)\overline{(xA + yB + zC)} &= (xA + yB + zC)(x\overline{A} + y\overline{B} + z\overline{C}) = \\ &= x^2A\overline{A} + y^2B\overline{B} + z^2C\overline{C} + xy(A\overline{B} + \overline{A}B) + yz(B\overline{C} + \overline{B}C) + zx(C\overline{A} + \overline{C}A) = 1.\end{aligned}$$

V rovnici jsou délky stran na druhou, tak se podíváme, jak vypadají v komplexních číslech. Například

$$a^2 = |A - B|^2 = (A - B)\overline{(A - B)} = A\overline{A} + B\overline{B} - (A\overline{B} + \overline{A}B).$$

Vyjádříme výraz, který jsme viděli už v předchozí rovnici:

$$A\overline{B} + \overline{A}B = -a^2 + A\overline{A} + B\overline{B},$$

cyklicky pro ostatní délky stran. Dosadíme, přeuspořádáme členy a dostaneme

$$(x^2 + xy + xz)A\overline{A} + (y^2 + yz + yx)B\overline{B} + (z^2 + zx + zy)C\overline{C} - a^2xy - b^2yz - c^2zx = 1.$$

Z prvních tří členů lze vytknout $x + y + z$. Odečtením přesuneme jedničku na levou stranu a rozepíšeme ji také jako $1 = x + y + z$, čímž dostaneme výslednou rovnici, kde $u = A\overline{A} - 1$, $v = B\overline{B} - 1$, $w = C\overline{C} - 1$ jsou doopravdy reálná čísla. □

Jak najít kružnici procházející danými body? Jednoduše dosadíme souřadnice bodů do rovnice kružnice a vyřešíme soustavu pro u, v a w. Všimněme si, že v rovnici kružnice bychom nemuseli psát člen $x + y + z$, protože je roven jedné. Píšeme ho tam, aby byla rovnice kružnice stejně jako rovnice přímky homogenní v (x, y, z), díky čemuž můžeme bezpečně dosazovat nenormované body. Ukážeme si na příkladě.

Příklad 64. Označme M střed strany BC a hledejme kružnici opsanou trojúhelníku ABM. Dosadíme body $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ a bod M budeme psát jako $(0 : 1 : 1)$, abychom si lehce usnadnili výpočty. Dosazením získáme:

$$\begin{aligned}0 + 0 + 0 + (u + 0 + 0) \cdot 1 &= 0,\\ 0 + 0 + 0 + (0 + v + 0) \cdot 1 &= 0,\\ -a^2 + 0 + 0 + (v + w) \cdot (1 + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Ihned je zřejmé, že $u = v = 0$ a pak spočteme $w = \frac{a^2}{2}$. Naše kružnice je tedy reprezentována rovnicí

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + \frac{a^2}{2}z(x + y + z) = 0.$$

Hned vidíme, že pokud kružnice prochází vrcholem trojúhelníka, je příslušná neznámá v rovnici kružnice nulovaná[8]. Toto je velmi důležité pozorování – pokud totiž v úloze pracujeme s kružnicí, chceme, aby procházela co nejvíce vrcholy referenčního trojúhelníka.

Také si uvědomme, že můžeme první tři členy rovnice psát s kladnými znaménky a jen změnit znaménka koeficientů u, v, w (bylo by $u = 1 - A\overline{A}$ apod). Je to zcela legální, první možnost ale umožní počítat mocnost přímo dosazením (včetně znaménka) – to uvidíme za chvíli.

Úloha 65. Je daný trojúhelník ABC splňující $|AC| + |BC| = 3|AB|$. Kružnice jemu vepsaná má střed v I a dotýká se stran BC, CA v bodech D a E. Konečně, překlopme bod D přes I na bod K a podobně překlopme bod E přes I na bod L. Dokaž, že body A, B, K a L leží na jedné kružnici. (Shortlist 2005)

Úloha 66. Je daný rovnoběžník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P. Označme M střed strany AB. Nechť Q je takový bod, že přímka QA je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku MAD a QB je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku MBC. Dokaž, že body Q, M a P leží na přímce. (CPS 2020)

Mocnost bodu ke kružnici

Co nám může rovnice kružnice říct o vztahu libovolného bodu v rovině vzhledem k ní? Možná překvapivě odpověď je přímo mocnost bodu k této kružnici.

Věta 67. *Buď $P = (x_1, y_1, z_1)$ bod v rovině trojúhelníka ABC a k kružnice daná rovnicí*

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0.$$

Pak je mocnost bodu P ke kružnici k rovna

$$P(P, k) = -a^2y_1z_1 - b^2x_1z_1 - c^2x_1y_1 + (ux_1 + vy_1 + wz_1)(x_1 + y_1 + z_1),$$

jinak řečeno se jedná o pouhé dosazení bodu do rovnice kružnice.

Tuto vlastnost si snadno ověříš na důkazu 63. Totiž mocnost bodu P k jednotkové kružnici je přesně $P\overline{P} - 1$. Zde na znaménkách pochopitelně záleží (a je to i důvod, proč jsme psali rovnici kružnice v tomto tvaru).

Pomocí mocnosti přirozeně můžeme pracovat s chordálami.

Věta 68. *Uvažme dvě kružnice k a l. Pak jejich chordála je přímka daná rozdílem jejich rovnic.*

Důkaz. Analogický k důkazu v případě kartézských souřadnic z prvního dílu. □

Využití této věty při počítání úloh je jasné – chceme-li najít rovnici chordály dvou kružnic, nemusíme pracně počítat jejich průsečíky. Stačí je od sebe odečíst! Můžeš si to vyzkoušet na následující úloze.

Úloha 69. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC, uvnitř které je zvolen bod D. Nechť E, F jsou po řadě takové body na stranách AB, AC, že platí $\sphericalangle BED = \sphericalangle DFC > 90°$. Dokaž, že přímka AD je chordálou kružnice ABF a AEC. (Celostátko 2020)

Úloha 70. Uvnitř trojúhelníka ABC leží bod P. Nechť přímka AP protne stranu BC v bodě A_1 a bod A_2 je takový, že A_1 je střed úsečky PA_2. Obdobně definujeme body B_2 a C_2. Dokaž, že body A_2, B_2 a C_2 nemohou všechny najednou ležet uvnitř kružnice opsané trojúhelníku ABC. (Shortlist 2019)

[8] Mimochodem, vidíme to už z důkazu, kde máme $u = A\overline{A} - 1$ apod.

Úloha 71. V nerovnostranném trojúhelníku ABC označme T jeho těžiště a M_A, M_B, M_C, N_A, N_B a N_C po řadě středy úseček BC, AC a AB, TA, TB a TC. Dokaž, že kružnice opsané trojúhelníkům $N_AM_BM_C$, $M_AN_BM_C$ a $M_AM_BN_C$ všechny prochází jedním bodem.

(Prase 39–4p–8)

Jednak se tedy můžeme vyhnout nějaké početní práci, je to ale vše? Není, často totiž chordály najdeš schované v naprosto nečekaných situacích. Můžeme si jimi například vynahradit kolmost, kterou jinak v seriálu nezmiňujeme.

Cvičení 72. Dokaž, že tečna ke kružnici opsané trojúhelníka ABC v bodě A má rovnici $b^2z + c^2y = 0$ tak, že ji napíšeš jako vhodnou chordálu.

Úloha 73. Najdi pomocí chordál vhodných (degenerovaných) kružnic osu strany BC.

Úloha 74. Najdi souřadnice K průsečíku tečen ke kružnici opsané v bodech B a C. Přímku AK nazveme *symediánu* v trojúhelníku ABC. Dokaž dále, že se symediány v trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Vraťme se na moment zpátky až k prvnímu dílu, kde jsme si zmínili linearitu mocnosti bodu ke kružnici.

Úloha 75. Pomocí linearity mocnosti dokaž, že mocnost bodu H ke kružnici opsané ABC je rovna $8R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$, kde R je poloměr kružnice opsané.

Steinerova věta (o těžišti)

Pokud jsi dočetl(a) až sem, věnujeme Ti nakonec malý odpočinkový dárek: návod na sčítání čtverců vzdáleností. Vrátíme se zpět k vážení soustavy více bodů.

Věta 76. (Steinerova[9]) *Nechť jsou $A_1, \ldots, A_n$ body a T jejich těžiště (všechny mají stejnou hmotnost). Pak pro libovolný bod X platí*

$$\sum_{i=1}^{n} |XA_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |TA_i|^2 + n \cdot |XT|^2.$$

Věta nám tedy umožňuje vyjádřit součet čtverců vzdáleností několika bodů od X jen v závislosti na vzdálenosti X od těžiště.

Důkaz. Označme souřadnice bodu A_i (x_i, y_i). Zvolme si navíc soustavu tak, že těžiště leží v počátku a osa x prochází bodem X. Potom platí $\sum_{i=1}^{n}(x_i, y_i) = (0, 0)$, tedy $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, a $X = (d, 0)$, kde $d = |XT|$. Nyní již jednoduše spočítáme součet čtverců ze znění věty

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |XA_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n}((x_i - d)^2 + (y_i - 0)^2) = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 - 2dx_i + d^2) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) - 2d \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} d^2 = \sum_{i=1}^{n} |TA_i|^2 + 0 + n \cdot |XT|^2. \qquad \square\end{aligned}$$

Cvičení 77. Rozmysli si, že pro dané body A_i nabývá součet $\sum_{i=1}^{n} |XA_i|^2$ nejnižší hodnoty, pokud je X těžiště.

[9] Pod tímto jménem je známá ve fyzice, kde se pomocí ní počítají momenty setrvačnosti. Verze, kde vážíme jen tři body, se připisuje ke jménu Leibniz.

Steinerova věta v zásadě říká jen to, že minimum součtu čtverců vzdáleností nastává v těžišti[10]. Mimo to je důkaz poměrně jasný. Při umocnění vzdálenosti na druhou zmizí odmocnina, takže pak sčítáme jenom n kvadratických funkcí (v obou souřadnicích).

Příklad 78. Na kružnici opsané pravidelnému mnohoúhelníku $A_1A_2\dots A_n$ leží bod X. Dokaž, že hodnota $|XA_1|^2+|XA_2|^2+\dots+|XA_n|^2$ nezávisí na volbě bodu X.

Řešení. Když má každý vrchol stejnou váhu, je jejich těžiště ze symetrie ve středu (kružnice opsané) mnohoúhelníka, označme ho O. Vzdálenost X od těžiště je vždycky stejná, což je jako dělané na Steinerovu větu. Součet můžeme vyjádřit:

$$\sum_{i=1}^{n}|XA_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|OA_i|^2+n\cdot|XO|^2.$$

Bod X leží na kružnici opsané, takže vzdálenost $|XO|$ je vždy její poloměr a výraz proto nezávisí na poloze bodu X.

Cvičení 79. Rozmysli si, že příklad výše platí i pokud volíme X na jiné kružnici se stejným středem, například vepsané.

Úloha 80. (znovu) Urči délku těžnice v trojúhelníku jen pomocí délek stran.

Úloha 81. (znovu) Je daný pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$ vepsaný do jednotkové kružnice. Dokaž, že platí $|AB|^2+|AC|^2+|AD|^2=7$.

Úloha 82. Mezi středy dvou kružnic s poloměrem 1 je vzdálenost 1. Na první kružnici zvolíme body A a B souměrně podle spojnice středů. Dokaž, že pro libovolný bod P na druhé kružnici platí $|PA|^2+|PB|^2\geq 2$. (Kolmogorov Memory Cup 1999)

Úloha 83. Na dané kružnici zvolíme dvě kolmé tětivy AB a CD. Ty se protnou v bodě S. Dokaž, že hodnota $|SA|^2+|SB|^2+|SC|^2+|SD|^2$ nezávisí na volbě tětiv.

Aby ses nedivil(a), jak to, že jsme celý seriál vážili se všemi možnými vahami a teď se zbaběle vrátili k tomu, že jsou všechny stejné, uvedeme Steinerovu větu v úplnosti.

Úloha 84. (Vážená Steinerova věta) Nechť jsou $A_1,\dots,A_n$ body s vahami $v_1,\dots,v_n$ a celkovou vahou $V=v_1+\dots+v_n\neq 0$, a T jejich těžiště. Pak pro libovolný bod X platí

$$\sum_{i=1}^{n}v_i\cdot|XA_i|^2=\sum_{i=1}^{n}v_i\cdot|TA_i|^2+V\cdot|XT|^2.$$

Cvičení 85. Jak se změní výsledek cvičení 77?

Úloha 86. (znovu Stewartova věta) Uvažme bod D na straně BC trojúhelníka ABC. Označme d délku úsečky AD, m délku úsečky BD a n délku úsečky CD. Pro tyto délky platí vztah

$$mna+d^2a=mb^2+nc^2.$$

Úloha 87. Je dán trojúhelník ABC a v něm bod P takový, že je součet čtverců jeho vzdáleností od stran nejmenší možný. Buďte D, E, F kolmé průměty P na strany trojúhelníka ABC. Ukaž, že je P těžiště DEF. (Oliforum 2017)

[10] A v 1D je těžiště jen průměr, takže má průměr nejmenší součet čtverců vzdáleností od všech bodů. Zcela mimochodem, to je dobré odůvodnění, proč se k výpočtu rozptylu používají čtverce a ne absolutní hodnoty.

Závěrem

A se Steinerovou větou končí i letošní seriál. Pokud jsi dočetl(a) až sem, velmi si Tě vážíme (s kladnými vahami, samozřejmě :)). Zrekapitulujme, co jsme se naučili. Pomocí vážení bodů jsme zavedli souřadnice na rovině, se kterými dokážeme hravě pracovat s přímkami, obsahy a dokonce i kružnicemi! No není to krásné? Samozřejmě, barycentrické souřadnice jsou užitečné při řešení geometrických olympiádních úloh. Před tím, než jen zvážíš řešení touto metodou, pamatuj na již známou mantru

(1) Úloha jde spočítat pomocí barycentrických souřadnic.
(2) Znám dobře všechna tvrzení a dokážu je obhájit.
(3) Mám na řešení čas.

Proto vždy zauvažuj, než začneš do úlohy bezhlavě mlátit, oko na řešitelné úlohy opět přichází pouze a jenom po počítání mnoha a mnoha jiných příkladů. Začni své první krůčky s námi, při řešení třetí seriálové série. Těšíme se na Tvá řešení :)

Pokud máš chuť vědět víc, můžeme Ti doporučit výborný textík od Evana Chena[11], anebo nám klidně napiš, rádi se s Tebou pobavíme.

Děkujeme všem, kteří se podíleli na tvorbě seriálu, zejména Hedvice, Klárce, Matějovi a Radkovi. Seriál pro Tebe psali Zdeněk Pezlar a Matouš Šafránek.

Návody k úlohám a cvičením

3. Dosaď do vzorce a spočítej po souřadnicích.

9. Dej přímku na osu y a těžiště do počátku. Pak vezmi zjednodušený vzorec těžiště a využij jen jeho x-ovou souřadnici.

10. A je doopravdy těžiště bodů B, C, D se správnými vahami. Vzpomeň na (komplexní) vzorec rovnoběžníka $A + C = B + D$.

16. Použij vzorec pro střed, počítej po souřadnicích.

19. Vynásob všechny souřadnice takovým číslem, aby měly součet 1.

21. Rozmysli si orientaci vzdáleností a převeď poměry do správného tvaru, například $CP : PB$ na straně BC.

24. Jednoduše dosazuj do obecné rovnice body, kterými přímka prochází.

25. Jakou bude mít ta přímka obecně rovnici?

26. K určení poměru na úsečce jiné než je strana trojúhelníka Ti může pomoct tvrzení 8.

29. Jaká je podmínka pro rovnoběžník? Přímka DM vyjde $x - y + 2z = 0$.

31. Goniometrické funkce a věta o ose úhlu. Vyjde $(0 : \tan\beta : \tan\gamma)$ a $(0 : b : c)$. Pokud Ti ortocentrum vyšlo jinak, ověř sinovou větou, jestli to není totéž.

[11] *https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf*

35. Obsahy prostě spočítej. Závislosti na délkách stran se můžeš zbavit sinovou větou, homogenní souřadnice pak stačí vydělit poloměrem kružnice opsané.

36. Dotyk kružnice vepsané se stranou BC má souřadnice $(0 : s-c : s-b)$, kružnice připsaná se dotýká stran BC, AB a AC po řadě v bodech $(0 : s-b : s-c)$.

39. První dva body plynou ze vzorce. Ve třetím uvaž, že $x_2 = kx_1$, $y_2 = ky_1$ a $z_2 = kz_1$. Ve čtvrtém vzorec roznásob a použij předchozí body.

43. Uvaž $P = (r, s, t)$, spočítej souřadnice zbylých bodů a determinant.

44. Stačí spočítat obsahy trojúhelníku $A'BC$, $AB'C$ a ABC'.

45. Začni bodem Z, pak vyjádři X a Y.

46. Použij kosinovou větu a Heronův vzorec.

48. P, Q, R, leží na přímce, když se dá P vyjádřit jako $P = kR + (1-k)Q$. Pak ukaž, že je determinant nulový.

49. Střed kružnice vepsané už jsme měli. Pro osu vnějšího úhlu dokaž pomocí sinové věty podobné pravidlo, jako je věta o ose úhlu.

51. Dané těžiště bude mít souřadnice $(b+c : a+c : a+b)$. Na zbytek použij větu o přímce.

52. Najdi v úloze rovnoběžník s délkou strany daného poloměru.

53. Upravuj a pamatuj, že pokud je výraz nulový vždy, když $x = y$, tak můžeš $x - y$ vytknout.

54. Vyjde $[AIT] = \frac{|c-b|}{3(a+b+c)}$, tři zlomky odhadni (jeden z nich bude alespoň dvojnásobek) a použij vzorec $2[ABC] = r(a+b+c)$.

56. Když už dokážeš, že je součin poměrů 1, máš v ruce i souřadnice (viz důkaz Cevovy věty).

58. Podle úlohy 36 je $D = (s-c : 0 : s-a)$. Spočítej přímku DE a střední příčku a dosaď do předchozí věty.

59. Cevova věta. Poměry na stranách, tedy i poměry souřadnic jsou převrácené.

62. Začni souřadnicemi průsečíku. Přece Tě nezastraší, že máš o souřadnici víc.

65. Vše spočítej a dosazuj podmínku na délky stran.

66. Souřadnice vzhledem k PAB. Využij stejnolehlost k získání nových kružnic, které prochází více vrcholy. Poté tečnu spočítej jako přímku, která po dosazení do rovnice kružnice bude mít dvojnásobný průsečík.

69. Body E a F najdi pomocí podobností.

70. Postupuj sporem a získej tři nerovnosti pro váhy, které nemohou současně platit.

71. Zaveď souřadnice vzhledem k trojúhelníku $M_AM_BM_C$, potom bude snadné počítat kružnice. Jak využít chordály v této úloze?

72. Jaká je chordála kružnic, které se dotýkají?

73. Najdi rovnici kružnice se středem v B a nulovým poloměrem – tedy kružnici, která obsahuje právě jeden bod. Pak hledej chordálu.

74. Protni dvě přímky, vyjde $K = (-a^2 : b^2 : c^2)$ a tedy se všechny přímky protínají v bodě $(a^2 : b^2 : c^2)$.

75. Dosaď do vzorce kružnice a počítej.

77. Kde má nejmenší hodnotu $|XT|^2$?

79. $|XO|$ bude pořád konstanta.

80. Střed je těžiště B a C, vrchol A má roli X.

81. $|AB| = |AG|$ a tak podobně.

82. Pomocí Steinera najdi P, kde to bude nejmenší.

83. Najdi těžiště a použij Steinera dokonce dvakrát.

84. Zopakuj původní důkaz, jen ho piš s vahami.

85. Skoro nijak, jen když je V záporné.

86. D je vážené těžiště B a C. Od A měříme.

87. Sporem (extremálním principem).

Řešení cvičení

3. Dosazením vyjde $\frac{A+2B+4C}{7}$. Sčítání a násobení reálným číslem se provádí po souřadnicích, takže x-ová souřadnice těžiště bude $\frac{2+2\cdot 1+4\cdot 6}{7} = 4$ a y-ová souřadnice bude $\frac{5+2\cdot 2+4\cdot 3}{7} = 3$. Těžiště má souřadnice $(4, 3)$.

16. Její krajní body jsou $A = (1, 0, 0)$ a střed strany BC, bod $M = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Použijeme vzorec $\frac{A+M}{2}$ a vyhodnotíme zvlášť v každé souřadnici: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

19. $\left(\frac{r}{r+s+t}, \frac{s}{r+s+t}, \frac{t}{r+s+t}\right)$. Víme, že $(r : s : t) = (kr : ks : kt)$, najdeme tedy takové k, aby platilo $kr + ks + kt = 1$, odkud už vyjde $k = \frac{1}{r+s+t}$.

21. (1) Jestliže leží P na straně (úsečce) AC, mají PA a PC opačná znaménka, takže máme $\frac{PA}{PC} = -k$, tedy $\frac{AP}{PC} = k$. Podle lemmatu musí být poměr souřadnic $\frac{z}{x}$ roven k,[12] takže můžeme homogenní souřadnice P zapsat jako $(1 : 0 : k)$ neboli normovaně $\left(\frac{1}{k+1}, 0, \frac{k}{k+1}\right)$

(2) Jestliže leží P na straně BC, má PC a BC stejné znaménko, takže máme $\frac{PC}{BC} = k$. Tím už z druhé varianty lemmatu vyjde, že souřadnice y je rovna k, takže celkově musí být souřadnice $(0, k, 1-k)$. Alternativně můžeme zacílit na první variantu lemmatu, pak potřebujeme dostat poměr PC a BP. Proto upravíme výraz na $PC = k \cdot BC$ a BC rozepíšeme: $PC = k(BP + PC)$. Dostaneme $PC(1-k) = k \cdot BP$, čili $\frac{PC}{BP} = \frac{k}{1-k}$. Podle lemmatu má P souřadnice $(0 : k : 1-k)$, což už je dokonce normované, takže $(0, k, 1-k)$.

(3) Jestliže leží P na přímce BC mimo stranu BC, má PB a PC stejnou orientaci, takže $\frac{PB}{PC} = k$. Potřebujeme ale $\frac{BP}{PC}$, zlomek s jednou orientací opačnou, který vyjde $\frac{BP}{PC} = \frac{-PB}{PC} = -k$. Dostáváme souřadnice $(0 : 1 : -k) = \left(0, \frac{1}{1-k}, \frac{-k}{1-k}\right)$.

24. (1) Dosadíme-li do $ux + vy + wz = 0$ bod $A = (1, 0, 0)$, dostaneme $u = 0$.

(2) Z prvního bodu máme tvar $vy + wz = 0$, dosadíme střed strany BC, tj. $(0 : 1 : 1)$, dostaneme $v + w = 0$, takže $y - z = 0$.

(3) Dosadíme středy stran AB a AC, tj. $(1 : 1 : 0)$ a $(1 : 0 : 1)$. Dostaneme $u + v = 0$ a $u + w = 0$. Zvolíme si třeba $u = 1$ a dopočítáme $v = w = -1$, čili rovnice je $x - y - z = 0$.

25. Z předchozího cvičení už víme, že rovnice přímky skrz A má tvar $vy + wz = 0$. Z toho už vidíme, že podíl souřadnic y a z nezávisí na souřadnici x, takže bude stejný pro bod P a průsečík se stranou. A bod na straně má navíc nulové x, čili ho s tím, co víme, můžeme zapsat jako $(0 : s : t)$.

26. Máme $E = (3 : 0 : 1)$, $F = (3 : 1 : 0)$. Najdeme rovnici přímky BE $ux + vy + wy = 0$: dosadíme $B = (0, 1, 0)$, dostaneme $v = 0$; dosadíme E, dostaneme $3u + w = 0$, to splňuje například $u = 1$ a $w = -3$, což dává rovnici $x - 3z = 0$. Analogicky má CF rovnici $x - 3y = 0$. Jejich průsečík splňuje tyto dvě rovnice, můžeme napsat třeba $O = (3 : 1 : 1)$. Bod D je už podle předchozího cvičení 25 $D = (0 : 1 : 1)$ (střed strany BC), dá se ovšem samozřejmě odvodit i přes rovnici přímky AO, $y - z = 0$. Tohle celé mimochodem snadno vyplyne z Cevovy věty, se kterou budeme mít čest za chvíli.

K určení poměru můžeme použít úvahu s vážením. O, B, E leží na přímce, takže můžeme vyjádřit B jako těžiště $B = tE + (1-t)O$. Pak podle tvrzení 8 platí $t = \frac{OB}{OE}$, což je kýžený poměr.

[12] Obráceně než poměr vzdáleností. Máme poměr vzdáleností od vrcholu A a k vrcholu C, ten je roven poměru souřadnic od vrcholu C a od vrcholu A.

Napíšeme si proto libovolnou složku (souřadnici) rovnice $B = tE + (1-t)O$ a z ní vyjádříme t.[13] K tomu potřebujeme body normované: $B = (0, 1, 0)$, $E = \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$, $O = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Vezmeme třeba druhou souřadnici a má platit $1 = t \cdot 0 + (1-t) \cdot \frac{1}{5}$ a vyjádříme $t = -4$. To znamená, že jsou body B a E na opačných stranách od O a v absolutní hodnotě je poměr $\frac{|OB|}{|OE|} = 4$.

Druhý poměr získáme stejným postupem. $D = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. $D = tA + (1-t)O$, například z první souřadnice vyjde $0 = t + (1-t)\frac{3}{5}$ a pak $t = -\frac{3}{2}$, čili $\frac{|OD|}{|OA|} = \frac{3}{2}$.

30. Buď rovnice dané přímky $ux + vy + wz = 0$. Přímky p a AB se neprotínají, tedy soustava $ux + vy + wz = 0$, $x = 0$ a $x + y + z = 1$ nemá řešení. Avšak první dvě rovnice vedou na řešení $(0 : w : -v)$. Aby toto nebyl vážený bod, musí být součet vah roven 0 (pak už se nedá normovat), tedy $w = v$ a přímka je $0 = ux + v(y + z) = u + v(1 - x)$. Ekvivalentně bude mít daná přímka tvar $x = c$, kde c je nějaká konstanta.

35. Vyjde střed kružnice opsané $O = (\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$ a ortocentrum $H = (\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$.

Jak na střed kružnice opsané? Označme poloměr kružnice opsané r. Podle věty o obvodovém úhlu je $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC = 2\alpha$. Obsah trojúhelníka BOC je pak podle věty 33 z prvního dílu seriálu roven $\frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha$ (rozmysli si, že dokonce orientovaně). Podle obsahové definice tudíž máme

$$O = \left(\frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha : \frac{1}{2}r^2 \sin 2\beta : \frac{1}{2}r^2 \sin 2\gamma\right) = (\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin\gamma).$$

Jak na průsečík výšek? Můžeme si vzpomenout na úlohu 31, podle které je pata výšky rovna $(0 : \tan\beta : \tan\gamma)$, a cvičení 25, podle nějž je poměr souřadnic y a z u průsečíku výšek stejný, cyklicky můžeme totéž uvážit pro každou stranu a dostaneme $H = (\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$.

Můžeme ovšem rovněž spočítat obsah $[HBC]$. Buď P pata výšky z A. Platí $PC = b \cdot \cos\gamma$. Výšky z C a z A svírají úhel β, takže platí

$$HP = PC \cdot \operatorname{cotg}\beta = PC \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = b\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta}.$$

Obsah pak spočítáme jako

$$[HBC] = \frac{1}{2}a \cdot HP = \frac{1}{2}ab\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta}.$$

Upravíme pomocí sinové věty vzorci $a = 2r\sin\alpha$ a $\frac{b}{\sin\beta} = 2r$, kde r je poloměr kružnice opsané:

$$[HBC] = 2r^2 \cos\beta\cos\gamma\sin\alpha = 2r^2 \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\alpha.$$

Obsahy $[AHC]$ a $[ABH]$ odvodíme stejně, vyjdou jen s cyklickou záměnou úhlů. Podle obsahové definice vyjde

$$H = (2r^2 \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\alpha : 2r^2 \cos\beta\cos\gamma\cos\alpha\tan\beta : 2r^2 \cos\gamma\cos\alpha\cos\beta\tan\gamma).$$

To po vydělení $2r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ vychází opravdu $(\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$. Stojí za povšimnutí, že když je trojúhelník pravoúhlý, tak trochu podvádíme a dělíme nulou. Jeden tangens vyjde jakoby nekonečný, což odpovídá tomu, že je ortocentrum ve vrcholu.

39. (1) V každém součinu, který sčítáme, se právě jeden člen vynásobí daným reálným číslem, takže se celý determinant vynásobí daným reálným číslem.

[13] Ne úplně libovolnou, pokud mají tři body některou souřadnici všechny stejnou, nepodaří se nám z ní t vyjádřit.

(2) Z předchozího bodu i přímo ze vzorce plyne, že je nulový.
(3) Podle podmínky existuje takové k, že $x_2 = kx_1$, $y_2 = ky_1$ a $z_2 = kz_1$. Pak když vzorec přeuspořádáme s tímto dosazením, vyjde

$$x_1(ky_1z_3 - y_3kz_1) - y_1(kx_1z_3 - x_3kz_1) + z_1(kx_1z_3 - x_3kz_1) =$$
$$= kx_1y_1(z_3 - z_3) + ky_1z_1(x_3 - x_3) + kz_1x_1(y_3 - y_3) = 0.$$

Stejně by to vyšlo, i pokud by byly jiné dva řádky (homogenně) stejné.
(4) Pokud na místo x_1 napíšeme $x_1 + kx_2$ a podobně ostatní souřadnice, rozepíšeme vzorec

$$(x_1 + kx_2)(y_2z_3 - y_3z_2) - (y_1 + ky_2)(x_2z_3 - x_3z_2) + (z_1 + kz_2)(x_2z_3 - x_3z_2) =$$
$$= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - \cdots + kx_2(y_2z_3 - y_3z_2) - \cdots$$

Úplné rozepsání si odpustíme, vidíme, že vyjde součet

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kx_2 & ky_2 & kz_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + 0,$$

v němž je druhý sčítanec nulový podle předchozího bodu cvičení. Když přičteme k prvnímu řádku násobek druhého, determinant se nijak nezmění. Podobným rozdělením na dva determinanty vyjde totéž, když k jakémukoliv řádku přičtu násobek jakéhokoliv jiného.

43. Nechť má P souřadnice (r, s, t). Přímka AP prochází vrcholem A, takže je tvaru $uy + wz = 0$, a bodem P, takže platí $us + wt = 0$, například může být $u = t$ a $w = -s$, tedy je to přímka $ty - sz = 0$. Pak najdeme její průsečík se stranou BC danou rovnicí $x = 0$, to bude

$$D = (0 : s : t) = \left(0, \frac{s}{s+t}, \frac{t}{s+t}\right).$$

Body E, F vyjádříme analogicky jako $E = \left(\frac{r}{t+r}, 0, \frac{t}{t+r}\right)$, $F = \left(\frac{r}{r+s}, \frac{s}{r+s}, 0\right)$. Do determinantu budeme totiž potřebovat normalizované body. Chceme vlastně dokázat $\frac{[DEF]}{[ABC]} \le \frac{1}{4}$, podíl $\frac{[DEF]}{[ABC]}$ je podle věty 41 roven determinantu

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{s}{s+t} & \frac{t}{s+t} \\ \frac{r}{t+r} & 0 & \frac{t}{t+r} \\ \frac{r}{r+s} & \frac{s}{r+s} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(s+t)(t+r)(r+s)} \begin{vmatrix} 0 & s & t \\ r & 0 & t \\ r & s & 0 \end{vmatrix} = \frac{2rst}{(s+t)(t+r)(r+s)}.$$

Musíme dokázat $\frac{2rst}{(s+t)(t+r)(r+s)} \le \frac{1}{4}$. Jelikož je bod P uvnitř trojúhelníka, jsou jeho souřadnice kladné, takže můžeme nerovnost ekvivalentně přenásobit na $8rst \le (s+t)(t+r)(r+s)$, což platí díky AG nerovnosti aplikované na všechny tři členy vpravo ($s + t \ge 2\sqrt{st}$ apod.). Vidíme tedy, že rovnost nastane, když $r = s = t$, tedy P je těžiště trojúhelníka.

48. Předpokládejme, že $Q \ne R$, protože jinak je determinant automaticky nulový. Body P, Q, R leží na přímce, právě když se P dá navážit, tedy vyjádřit jako $kR + (1-k)Q$. Pokud označíme souřadnice $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$, $R = (x_3, y_3, z_3)$, platí podle čtvrtého bodu cvičení 39, že

$$\begin{vmatrix} kx_3 + (1-k)x_2 & ky_3 + (1-k)y_2 & kz_3 + (1-k)z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kx_3 & ky_3 & kz_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

což je nula podle třetího bodu téhož cvičení. Druhá implikace, že je-li determinant nulový, můžeme nějaký bod vyjádřit jako těžiště druhých, platí taky (což je ostatně patrné ze znění důsledku), ale dokázat ji pomocí vážení je těžší.

56. Body vyjdou po řadě $(1 : 1 : 1)$, $(a : b : c)$, $(\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$, $\left(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}\right)$ a $(s-a : s-b : s-c)$, kde s je polovina obvodu.

Počítáme sice vždy výraz

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB},$$

ale také víme, že poměr vzdáleností bodu na straně k vrcholům odpovídá poměru souřadnic (akorát převráceně). Těžnice stranu protíná v jejím středu, tedy $(0 : 1 : 1)$, takže vyjde jednoduše $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$. Podíváme-li se do důkazu Cevovy věty nebo do cvičení 25, snadno určíme poměry souřadnic průsečíku. Vidíme je v poměrech, které se násobí v Cevově větě. V případě těžiště tedy $(1 : 1 : 1)$.

Poměry u paty osy úhlu a výšky jsme už měli v úloze 31, jsou to $(0 : b : c)$ a $(0 : \tan\beta : \tan\gamma)$. Cyklickou záměnou dostaneme paty na ostatních stranách a vyjde

$$\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1, \qquad \frac{\tan\gamma}{\tan\beta} \cdot \frac{\tan\alpha}{\tan\gamma} \cdot \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 1.$$

Jak na spojnice vrcholů s dotykem kružnice vepsané? Označme d, e, f délky tečen z vrcholů A, B, C ke kružnici vepsané. Tedy $AF = EA = d$, $BD = FB = e$ a $CE = DC = f$. Vyjde $\frac{e}{f} \cdot \frac{f}{d} \cdot \frac{d}{e} = 1$. Dále je-li D' bod doteku kružnice připsané, platí $D'C = e$ a $BD' = f$ a podobně, takže vyjde $\frac{f}{e} \cdot \frac{d}{f} \cdot \frac{e}{d} = 1$. Tím jsme pomocí Cevovy věty lehce dokázali, že se přímky v bodech (4) a (5) protnou, ale chceme-li znát souřadnice průsečíku, musíme poměry doopravdy vyjádřit. To jsme dělali už v úloze 36: platí $d + e = c$, $e + f = a$, $f + d = b$, z čehož umíme vyjádřit $d = s - a$, $e = s - b$, $f = s - c$, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Tak vyjdou souřadnice uvedené na začátku řešení.

59. Platí $BD' = DC$ a podobně, takže

$$\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B} = \frac{DC}{BD} \cdot \frac{EA}{CE} \cdot \frac{FB}{AF} = \frac{1}{\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}},$$

což je podle Cevovy věty rovno 1. Levý výraz je tedy také roven jedné, a proto se i přímky AD', BE' a CF' protínají v jednom bodě $P' = (u', v', w')$. Tomuto bodu se říká izotomický kamarád bodu P. Z lemmatu 20 dostaneme

$$\frac{w'}{v'} = \frac{BD'}{D'C} = \frac{DC}{BD} = \frac{v}{w}$$

a podobně pro ostatní souřadnice. Bod P' musí mít tedy převrácené poměry každých dvou souřadnic, což vyjde, když bude mít všechny souřadnice převrácené, tedy $P' = \left(\frac{1}{u} : \frac{1}{v} : \frac{1}{w}\right)$.

72. Označme M, N středy stran AB a AC. Pak je daná tečna pouze chordálou dvou dotýkajících se kružnic (ABC) a (AMN). Snadno ověříme, že kružnice opsané trojúhelníku AMN má rovnici $-a^2yz - b^2xz - c^2xy + \left(\frac{c^2}{2}y + \frac{b^2}{2}z\right)(x + y + z) = 0$. Chordála této kružnice a kružnice opsané (ABC) pak spočítáme jako rozdíl příslušných rovnic, získáme díky $x + y + z \neq 0$ přesně hledaný tvar.

77. Podle Steinerovy věty je to rovno $\sum_{i=1}^{n} |TA_i|^2 + n \cdot |XT|^2$, z toho na poloze bodu X závisí jen člen $|XT|^2$, který nabývá nejnižší hodnoty, když je $X = T$.

79. Leží-li X na kružnici se středem v O a poloměrem r, je

$$\sum_{i=1}^{n} |OA_i|^2 + n \cdot |XO|^2 = \sum_{i=1}^{n} |OA_i|^2 + nr^2,$$

což nezávisí na poloze bodu X.

85. Pokud je V kladné, pak má $V \cdot |XT|^2$, tedy i $\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot |TA_i|^2 + V \cdot |XT|^2$, minimum pro $X = T$. Pokud je V záporné, tak maximum.