Analytická geometrie III

3. seriálová série Termín odeslání: 8. dubna 2024

Úloha 1. (5 bodů)

Na straně AB trojúhelníka ABC jsou dány body D a E tak, že platí $|AD| = |DE| = |EB|$ a body A, D, E, B leží na přímce v tomto pořadí. Dále nechť je M střed strany BC. Rovnoběžka se stranou AC, která prochází bodem D, protíná stranu BC v bodě F. Přímka EM protíná přímku AC v bodě P. Dokažte, že přímka AF prochází středem úsečky BP.

Úloha 2. (5 bodů)

Budiž ABC různostranný trojúhelník s kružnicí opsanou k. Tečny ke k v bodech A a B se protínají v bodě L_c, obdobně se tečny ke k v bodech A a C protínají v bodě L_b. Dále buďte I_b, I_c středy kružnic připsaných po řadě stranám AC, AB. Dokažte, že přímky L_bI_b, L_cI_c, a BC prochází jedním bodem.

Úloha 3. (5 bodů)

Uvnitř stran AB a AC trojúhelníka ABC leží po řadě body X a Y. Zvolíme bod P na úsečce CX a bod Q na úsečce BY tak, aby platilo $PQ \parallel BC$. Dále přímky PY a QX protínají stranu BC po řadě v bodech U a V. Dokažte, že přímky XQ, YP a chordála kružnic opsaných trojúhelníkům ABV a ACU prochází jedním bodem.

Analytická geometrie III

3. seriálová série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Na straně AB trojúhelníka ABC jsou dány body D a E tak, že platí $|AD| = |DE| = |EB|$ a body A, D, E, B leží na přímce v tomto pořadí. Dále nechť je M střed strany BC. Rovnoběžka se stranou AC, která prochází bodem D, protíná stranu BC v bodě F. Přímka EM protíná přímku AC v bodě P. Dokažte, že přímka AF prochází středem úsečky BP.

Řešení:

Pracujme v barycentrických souřadnicích vzhledem k trojúhelníku ABC. Body D, E dělí AB na třetiny, takže musí mít po řadě souřadnice $(2:1:0)$, $(1:2:0)$. Dále, jelikož DF je rovnoběžná s AC, musí F dělit BC ve stejném poměru, jako D dělí BA, takže $F = (0:1:2)$. Konečně M jakožto střed strany zjevně musí být $(0:1:1)$.

Nyní nalezneme bod P jako průsečík přímek AC a EM. Přímka AC je zjevně zadána rovnicí $y = 0$. Pro EM hledáme koeficienty u, v, w tak, aby rovnici $ux + vy + wz = 0$ splňovaly body E i M. To dává dvojici rovnic

$$u + 2v = 0, \qquad v + w = 0.$$

Tu můžeme buďto vyřešit jako každou jinou soustavu, anebo si rovnou „tipneme“ nějaké úhledné řešení, např. $u = 2$, $v = -1$, $w = 1$. Tedy bod P bude určen jako $P = (x:y:z)$ splňující soustavu

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ 2x - y + z &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením $y = 0$ do druhé rovnice získáme $z = -2x$, takže řešením bude bod s homogenními souřadnicemi $(-1:0:2)$.

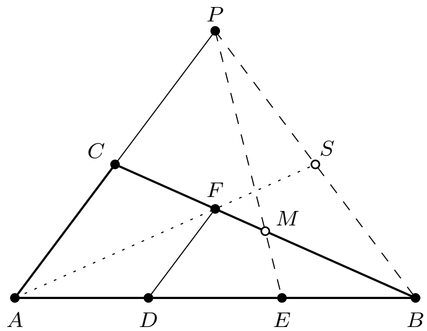
Všimněme si, že toto jsou rovnou i normované souřadnice, takže můžeme přímo psát $P = (-1, 0, 2)$. Posledním bodem vystupujícím v úloze je střed úsečky BP, označme ho S. Také pro B máme normované souřadnice $(0, 1, 0)$, čili snadno spočteme

$$S = \frac{B + P}{2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = (-1:1:2).$$

Nyní zbývá dokázat, že $A = (1:0:0)$, $F = (0:1:2)$ a $S = (-1:1:2)$ leží na jedné přímce. K tomu stačí spočíst, že matice vzniklá zapsáním jejich homogenních souřadnic do řádků má nulový determinant. To spočteme jako

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 2) - 0 \cdot (0 \cdot 2 - (-1) \cdot 2) + 0 \cdot (0 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = 1 \cdot 0 = 0,$$

tedy A, F, S skutečně leží na jedné přímce, jak jsme chtěli dokázat.



Alternativně bychom si taky mohli povšimnout a přímočaře ověřit, že A, F i S splňují $2y - z = 0$, takže leží na této společné přímce.

Poznámky:
Drtivá většina řešení postupovala stejně jako vzorák, možná až na drobné odlišnosti ve finiši. Pár lyrických řešitelů vymyslelo i zcela syntetický důkaz stavící na tom, že F je těžiště v trojúhelníku ABP.

(Matěj Doležálek)

Úloha 2.

Budiž ABC různostranný trojúhelník s kružnicí opsanou k. Tečny ke k v bodech A a B se protínají v bodě L_c, obdobně se tečny ke k v bodech A a C protínají v bodě L_b. Dále buďte I_b, I_c středy kružnic připsaných po řadě stranám AC, AB. Dokažte, že přímky L_bI_b, L_cI_c, a BC prochází jedním bodem.

Řešení:
Co jiného bychom použili než barycentrické souřadnice tak, jak jsme je vybudovali v seriálu? Souřadnice všech bodů v zadání se v seriálu ukázaly. Ve cvičení 72 jsme našli vzorec tečny ke kružnici k v bodě A, ta je dána rovnicí $b^2z + c^2y = 0$. Analogicky je tečna v B dána rovnicí $a^2z + c^2x = 0$ a bod L_c tak má souřadnice $(a^2 : b^2 : -c^2)$, na což byla v seriálu úloha 74. Opět analogicky má L_b souřadnice $(a^2 : -b^2 : c^2)$. V úloze 49 jsme určili středy kružnic připsaných.[1] Takže víme, že $I_b = (a : -b : c)$ a $I_c = (a : b : -c)$.

Rovnici přímky L_bI_b spočítáme nejsnáze determinantem (důsledek 47):

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a^2 & -b^2 & c^2 \\ a & -b & c \end{vmatrix} = x(bc^2 - b^2c) - y(a^2c - ac^2) + z(ab^2 - a^2b).$$

Přímka L_cI_c má analogicky rovnici

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a^2 & b^2 & -c^2 \\ a & b & -c \end{vmatrix} = x(bc^2 - b^2c) - y(ac^2 - a^2c) + z(a^2b - ab^2).$$

Přímka BC má rovnici $x = 0$. Pomocí determinantu s koeficienty rovnic těchto přímek můžeme ověřit, že se protínají v jednom bodě:

[1] Zároveň jsme spočítali i osy vnějších úhlů. To není potřeba, dá se udělat důkaz analogický příkladu 34, kde pouze jeden trojúhelník má vrcholy vrcholy v obráceném pořadí a bude tak mít záporný obsah.

$$\begin{vmatrix} bc^2-b^2c & a^2c-ac^2 & ab^2-a^2b \\ bc^2-b^2c & ac^2-a^2c & a^2b-ab^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc^2-b^2c & a^2c-ac^2 & ab^2-a^2b \\ 2(bc^2-b^2c) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

kde jsme nejdříve přičetli ke druhému řádku první řádek (po souřadnicích), čímž se determinant podle cvičení 39 nezměnil, a pak jsme si všimli, že jsou spodní dva řádky homogenně stejné, takže je determinant nulový, opět podle cvičení 39. A věta 57 říká, že když je tento determinant nulový, protnou se dosazené tři přímky v jednom bodě.[2]

Poznámky:
Došlá řešení byla správná a vesměs podobná vzorovému. Toto řešení je krátké a používá těžší věty, ale až na tečny ke kružnici bylo možné kroky provést elementárněji – rovnice přímek šlo najít soustavou rovnic a pak také (jednoduchou) soustavou rovnic ověřit, že průsečík přímek L_bI_b a L_cI_c má nulovou souřadnici x. *(Matouš Šafránek)*

Úloha 3.

Uvnitř stran AB a AC trojúhelníka ABC leží po řadě body X a Y. Zvolíme bod P na úsečce CX a bod Q na úsečce BY tak, aby platilo $PQ \parallel BC$. Dále přímky PY a QX protínají stranu BC po řadě v bodech U a V. Dokažte, že přímky XQ, YP a chordála kružnic opsaných trojúhelníkům ABV a ACU prochází jedním bodem.

Řešení:
Zaveďme barycentrické souřadnice vzhledem k trojúhelníku ABC. Podle cvičení 30 má přímka rovnoběžná s BC konstantní souřadnici x. Šikovně si nyní nejprve zavedeme (nehomogenní) body P, Q následovně:

$$P = (u : s : t+r), \qquad Q = (u : s+t : r),$$

kde $u \neq 0$, což přísluší tomu, že P a Q neleží na straně BC. Totiž v opačném případě by byly P a Q shodné s vrcholy po řadě C a B a snadno odvodíme, že $B = V$ a tedy kružnice opsaná ABV nedává smysl. Dále tedy uvažujme $u \neq 0$. Pokud by bod P ležel na straně AB, pak by se shodoval s bodem X, kde pak $BC \parallel QX$ a nemá tedy cenu uvažovat průsečíky těchto přímek. Platí proto $t + r \neq 0$ a podobně $s + t \neq 0$.

Proč začít s body P a Q? Totiž pak průsečíky cevián BP a CQ se stranami spočteme snadno, podle cvičení 25 můžeme psát $X \equiv CP \cap AB = (u : s : 0)$. Analogicky $Y = (u : 0 : r)$. Nyní již zbytek bodů spočítáme bez obtíží. Bod U je průsečíkem BC s přímkou PY, která je daná rovnicí

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & s & t+r \\ u & 0 & r \end{vmatrix} = rsx + uty - usz.$$

Hledaný průsečík je tedy $U = (0 : s : t)$ díky podmínce $u \neq 0$. Obdobně získáme přímku $QX : -rsx + ruy - tuz = 0$ a $V = (0 : t : r)$.

Nyní docházíme do druhé části, pojďme spočítat kružnice opsané. Snadno ověříme, že kružnice opsaná ABV má rovnici

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + \frac{a^2t}{t+r} z(x+y+z) = 0.$$

[2]V seriálu jsme to neřešili, ale technicky by se měly podotknout dvě věci. Jednak, jelikož je trojúhelník různostranný, nejsou všechny koeficienty rovnic přímek L_bI_b a L_cI_c nulové a jsou to tedy opravdu rovnice přímek. Zároveň nejsou (všechny tři) přímky rovnoběžné, což vyžaduje o trochu složitější diskuzi toho, proč nemůže mít jejich průsečík $(0 : ab^2 - a^2b : a^2c - ac^2)$ nulový součet souřadnic, a tedy že je možné ho normalizovat.

Dva koeficienty jsou totiž nulové a koeficient u z snadno dopočítáme dosazením. Poznamenejme, že díky dříve odvozenému $t + r \neq 0$ je koeficient $\frac{a^2 t}{t+r}$ reálné číslo. Obdobně kružnice opsaná ACU je dána rovnicí

$$-a^2 yz - b^2 xz - c^2 xy + \frac{a^2 t}{s+t} y(x+y+z) = 0.$$

Chordálu kružnic spočítáme dle věty 68 jako rozdíl právě získaných rovnic, tedy

$$(x+y+z)\left(\frac{a^2 t}{t+r} z - \frac{a^2 t}{s+t} y\right) = 0.$$

Všimněme si, že $t \neq 0$, jinak by kružnice splývaly, ale dle zadání máme existenci chordály zaručenou. Chordála tedy s přihlédnutím na $x+y+z \neq 0$ pro afinní body dává předpis $(t+r)y - (s+t)z = 0$.

Všechny přímky ze zadání máme spočítané a nyní si ukážeme, že prochází jedním bodem. Věta 57 zaručuje, že nám stačí spočítat jediný determinant složený z koeficientů přímek:

$$\begin{vmatrix} 0 & t+r & -s-t \\ rs & ut & -us \\ -rs & ru & -tu \end{vmatrix} = -(t+r)(-rstu - rs^2 u) - (s+t)(r^2 su + rstu) =$$
$$= rsu\Big(-(t+r)(-t-s) - (s+t)(r+t)\Big) = 0.$$

Determinant je nulový, přímky XQ, YP a chordála kružnic ABV a ACU se tak opravdu protnou v jednom bodě.

Poznámky:

Většině řešení chybělo rozebrat jisté konfigurační problémy nebo přesněji nulovosti jistých souřadnic bodů. Ve vzorovém řešení je též potřeba rozebíračka, jinak bychom například nemohli v získaných výrazech dělit. Jinak se všichni do počítání s vervou pustili, za to smekám. *(Zdeněk Pezlar)*